ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ
СОВРЕМЕННЫЙ УЧЕБНИК

Л. Д. Кудрявцев

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

2

ДРОФА

Предисловие

Во втором томе излагаются теория рядов, дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных.

В главе 3 изучаются числовые и функциональные ряды*. Большое внимание уделяется степенным рядам и методам разложения в них функций. Даются начальные сведения из теории асимптотических рядов по отрицательным степеням аргумента. Изучаются также бесконечные произведения и некоторые их приложения. Кратко излагается теория кратных рядов.

В главе 4 рассматривается та часть теории функций многих переменных, которая относится к их дифференциальным свойствам. Глава начинается с изучения некоторых вопросов теоретико-множественной топологии многомерных евклидовых пространств. Особое внимание уделено свойствам компактов. Доказывается, в частности, существование числа Лебега и лемма Гейне—Бореля о выделении конечного покрытия из любого покрытия компакта открытыми множествами.

Общие свойства функций, связанные понятиями предела и непрерывности, рассматриваются сразу для отображений множеств из n-мерного пространства в m-мерное. Доказывается, например, что образ компакта есть снова компакт, а также что непрерывное отображение компакта является и равномерно непрерывным, а непрерывное взаимно однозначное отображение компакта представляет собой гомеоморфизм. Соответствующие свойства функций многих переменных получаются из свойств рассмотренных отображений как частный случай при $m = 1$.

Собственно дифференциальное исчисление излагается более традиционным способом: для функций многих переменных, принимающих числовые значения, вводятся понятия частных производных и дифференциалов, изучаются их свойства, выводится формула Тейлора с остаточными членами в форме Пеано и

---

* Во втором томе нумерация глав и параграфов продолжает нумерацию первого тома.

Лагранжа, устанавливаются необходимые и достаточные условия наличия у функции локального экстремума в данной точке. Затем доказываются теоремы о существовании неявных функций. Они применяются к нахождению необходимых и достаточных условий, которым удовлетворяют точки относительного локального экстремума функций многих переменных, к исследованию вопроса о зависимости функций и к изучению свойств дифференцируемых отображений.

Для дифференцируемого отображения с неравным нулю якобианом из одного пространства в другое устанавливается локальный диффеоморфизм и, как его следствие, дается принцип сохранения области при рассматриваемых отображениях.

Глава 5 посвящена интегральному исчислению функций многих переменных. В ней вводится понятие кратного интеграла Римана, устанавливаются различные критерии его существования, приводятся формула сведения кратного интеграла к повторному и формула замены переменного в кратном интеграле для взаимно однозначных дифференцируемых отображений измеримых по Жордану множеств.

Определяется также несобственный интеграл и доказывается, что при введенном его определении понятия сходимости и абсолютной сходимости несобственного кратного интеграла равносильны. Затем рассматриваются понятия криволинейных интегралов первого и второго рода.

В этой же главе даются краткие сведения о дифференциальной геометрии двумерной поверхности, связанные с ее первой и второй квадратичной формой. Вводится понятие площади поверхности.

Далее изучаются поверхностные интегралы первого и второго рода, доказываются теоремы Гаусса—Остроградского и Стокса. Построенная теория применяется к изучению векторных полей, в частности, устанавливаются критерии их соленоидальности и потенциальности.

Заканчивается пятая глава изложением теории собственных и несобственных интегралов, зависящих от параметра, теории асимптотических рядов общего вида и их приложениями, например, для установления асимптотических формул для полной и неполной гамма-функции Эйлера.

Глава 3

Ряды

§ 30

Числовые ряды

30.1. Определение ряда и его сходимость

В настоящем параграфе понятие суммы обобщается на некоторые случаи бесконечного множества слагаемых и изучаются свойства таких обобщенных сумм. Многие из рассматриваемых ниже вопросов справедливы не только для действительных чисел, но и для комплексных. Поэтому, в отличие от предыдущего, в настоящей главе будем вести рассмотрение в комплексной области.

Аналитическое выражение, имеющее формально вид суммы, содержащей бесконечно много слагаемых, называется *бесконечным рядом* или, короче, *рядом*. Дадим строгое определение ряда и его суммы.

Определение 1. *Пусть задана последовательность комплексных чисел* u_n, $n = 1, 2, \ldots$. *Составим новую последовательность чисел* s_n, $n = 1, 2, \ldots$, *следующим образом*:

$$\begin{aligned} &s_1 = u_1, \\ &s_2 = u_1 + u_2, \\ &s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Пара последовательностей $\{u_n\}$ *и* $\{s_n\}$ *называется числовым рядом* (*подробнее*: *числовым рядом с общим членом* u_n) *и обозначается через*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots , \tag{30.1}$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{30.2}$$

Элементы исходной последовательности $\{u_n\}$ *называются членами ряда* (30.1), *а элементы последовательности* $\{s_n\}$ — *частичными суммами этого ряда, при этом* u_n *называется* n*-м членом ряда, а конечная сумма* s_n — n*-й частичной суммой ряда*, $n = 1, 2, \ldots$.

Если последовательность частичных сумм ряда (30.1) *сходится, то он называется сходящимся рядом, а если она расходится, то расходящимся.*

Определение 2. *Ряд, членами которого являются члены ряда* (30.1), *начиная с* $(n + 1)$*-го взятые в том же порядке, что и в исходном ряде, называется* n*-м остатком ряда* (30.1) *и обозначается через*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \quad \text{или} \quad u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots .$$

Определение 3. *Если ряд* (30.1) *сходится, то предел*

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n$$

называется его суммой.

В этом случае пишут

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots ,$$

или

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{30.3}$$

Таким образом, мы будем употреблять один и тот же символ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ как для обозначения самого ряда (30.1), так и для обозначения его суммы, если он сходится.

Если $\lim_{n \to \infty} s_n = \infty$, или $\lim_{n \to \infty} s_n = +\infty$, или $\lim_{n \to \infty} s_n = -\infty$, то соответственно пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\infty.$$

Итак, каждый ряд является парой двух последовательностей таких, что первая может быть взята произвольной (последовательность членов ряда), а вторая составлена определенным образом из членов первой (последовательность частичных сумм членов ряда). Однако ряд однозначно определяется каждой из этих последовательностей. Действительно, если задана последовательность членов u_n ряда, то члены последовательности его частичных сумм находятся, согласно определе-

нию 1, по формулам $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Если же задана последовательность $\{s_n\}$ частичных сумм ряда, то его члены определяются по формулам $u_1 = s_1$, $u_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$. Отсюда следует, что для всякой последовательности всегда можно найти такой ряд, что она будет последовательностью его частичных сумм.

В самом деле, пусть дана последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$. Положим

$$u_1 = z_1,\ u_2 = z_2 - z_1,\ \ldots,\ u_n = z_n - z_{n-1},\ \ldots$$

и рассмотрим ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots .$$

Тогда для его частичных сумм имеем

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n =$$
$$= z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) = z_n.$$

Это означает, что рассмотрение рядов эквивалентно рассмотрению последовательностей. Всякий вопрос, сформулированный в терминах рядов, можно перефразировать в вопрос, сформулированный в терминах последовательностей, и наоборот. Например, задача изучения сходимости рядов равносильна задаче изучения сходимости последовательностей.

Подчеркнем, что всюду, где не оговорено противное, члены рассматриваемых рядов подразумеваются комплексными.

Если n-й остаток ряда (30.1) (см. определение 2) сходится, то его сумму будем обозначать через r_n:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k, \tag{30.4}$$

и называть для краткости просто *остатком ряда*.

Всякую сумму конечного числа слагаемых

$$s_{n_0} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n_0}$$

можно рассматривать как ряд, добавив к ней члены

$$u_{n_0+1} = u_{n_0+2} = \ldots = 0.$$

Сумма получившегося ряда, очевидно, совпадает с заданной суммой, так как при всех $n \geqslant n_0$ его частичные суммы равны s_{n_0}.

Если заранее неизвестно, содержит сумма конечное или бесконечное число слагаемых, то иногда удобно в обоих случаях называть ее рядом, считая, что конечная сумма является рядом в указанном выше смысле.

Отметим одно существенное свойство сходящихся рядов.

ТЕОРЕМА 1 (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд* (30.1) *сходится, то*

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0. \qquad (30.5)$$

Доказательство. Если ряд (30.1) сходится, то последовательности его частичных сумм s_n, $n = 1, 2, \dots$, и s_{n-1}, $n = 2, 3, \dots$, очевидно, имеют один и тот же предел, равный сумме s этого ряда. Поэтому, замечая, что $u_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$, имеем

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} s_n - \lim_{n \to \infty} s_{n-1} = 0. \ \square$$

С помощью теоремы 1 иногда удается установить расходимость рассматриваемого ряда: *если для данного ряда условие* (30.5) *не выполняется, то он расходится.*

Примеры. 1. Пусть q — комплексное число и $|q| < 1$. Тогда ряд $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots$ с членами $u_n = q^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, образующими *бесконечную убывающую геометрическую прогрессию*, сходится.

Действительно,

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q},$$

и так как $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{q^{n+1}}{1 - q} = 0$, то

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{1 - q}.$$

2. Ряд, члены которого образуют геометрическую прогрессию $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots$, при $|q| \geqslant 1$ расходится, так как его общий член $u_n = q^n$ не стремится к нулю: $|u_n| = |q|^n \geqslant 1$.

3. Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$ с членами $u_n = (-1)^{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, расходится.

В самом деле, в этом случае

$$s_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \ s_{2k+1} = 1, \quad k = 0, 1, \dots,$$

поэтому последовательность частичных сумм $\{s_n\}$ не имеет предела.

Расходимость рассматриваемого ряда следует, конечно, и из того, что все его члены по абсолютной величине равны единице, и поэтому не выполняется необходимое условие (30.5) сходимости ряда.

30.2. Свойства сходящихся рядов

ТЕОРЕМА 2. *Пусть c — комплексное число. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in \boldsymbol{C}$, сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$, называемый произведением данного ряда на число c, также сходится и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{30.6}$$

Эта теорема означает, что числовой множитель «можно выносить за скобку» и в случае бесконечного множества слагаемых, если они образуют сходящийся ряд. «Можно» в том смысле, что справедливо равенство (30.6).

Доказательство. Пусть $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ и $s'_n = \sum_{k=1}^{n} cu_k$. По условию $\lim_{n\to\infty} s_n$ существует, поэтому, в силу очевидного равенства $s'_n = cs_n$, существует предел $\lim_{n\to\infty} s'_n$ и

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = c\lim_{n\to\infty} s_n.$$

Согласно определению суммы ряда, отсюда сразу следует (30.6). □

ТЕОРЕМА 3. *Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся; тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$, называемый суммой данных рядов, также сходится и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{30.7}$$

Эта теорема означает, что сходящиеся ряды «можно складывать почленно» (n-й член с n-м), «можно» в том смысле, что справедливо равенство (30.7).

Доказательство. Пусть

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad s'_n = \sum_{k=1}^{n} v_k \quad \text{и} \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k + v_k);$$

тогда $\sigma_n = s_n + s'_n$, и так как $\lim_{n\to\infty} s_n$ и $\lim_{n\to\infty} s'_n$ по условию существуют, то $\lim_{n\to\infty}\sigma_n$ также существует и

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}(s_n + s'_n) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} s'_n.$$

Это равенство эквивалентно равенству (30.7). □

Пример. Найдем сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$, сведя его к суммам членов бесконечно убывающих геометрических прогрессий

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{7}{2}.$$

ТЕОРЕМА 4. *Если ряд сходится, то любой его остаток сходится. Если какой-либо остаток ряда* (30.1) *сходится, то и сам ряд также сходится. При этом если*

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad s_m = \sum_{k=1}^{m} u_k, \quad r_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} u_k,$$

то

$$s = s_m + r_m, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Доказательство. Пусть $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $n = 1, 2, \ldots$, — частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, а

$$s_k^{(m)} = u_{m+1} + \ldots + u_{m+k}, \quad k = 1, 2, \ldots, —$$

частичные суммы его m-го остатка:

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+k} + \ldots .$$

Очевидно, что при $n > m$ имеем

$$s_n = s_m + s_k^{(m)}, \quad n = m + k, \tag{30.8}$$

откуда при произвольно фиксированном m следует, что предел $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ существует тогда и только тогда, когда существует предел $\lim\limits_{k \to \infty} s_k^{(m)}$.

Иначе говоря, ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится некоторый его остаток $r_m = \lim\limits_{k \to \infty} s_k^{(m)}$. Поскольку натуральное число m было произвольным, первая часть теоремы доказана.

Наконец, переходя к пределу в равенстве (30.8) при $k \to \infty$ и фиксированном m, имеем $s = s_m + r_m$, так как $n = m + k \to \infty$ при $k \to \infty$, а $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s$, $\lim\limits_{k \to \infty} s_k^{(m)} = r_m$. □

Из этой теоремы следует, что отбрасывание или добавление конечного числа членов к данному ряду не влияет на его сходимость.

Из формулы $s = s_m + r_m$, очевидно, следует, что если ряд сходится, то его остаток стремится к нулю:

$$\lim_{m \to \infty} r_m = \lim_{m \to \infty} (s - s_m) = 0. \qquad (30.9)$$

Отметим, что само собой разумеется, что условие (30.9) нельзя принять в качестве определения сходящегося ряда, так как остаток ряда сам является рядом, и говорить о его стремлении к нулю можно лишь уже зная определение сходимости ряда.

30.3. Критерий Коши сходимости ряда

Критерий Коши сходимости последовательностей может быть легко перефразирован применительно к рядам. Действительно, как известно (см. п. 4.7 и 19.3), для того чтобы последовательность комплексных чисел $\{s_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер n_ε, что для любых номеров $n > n_\varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$, и любых целых $p \geqslant 0$ выполнялось неравенство

$$|s_{n+p} - s_{n-1}| < \varepsilon.$$

Для удобства использования этого критерия в случае рядов мы пишем здесь разность $s_{n+p} - s_{n-1}$ вместо разности $s_{n+p} - s_n$, которую писали раньше в п. 4.7. Это, конечно, не влияет на суть дела. При этом, поскольку сумма s_0 не определена, мы всегда будем считать по определению, что $s_0 = 0$.

Если теперь под $\{s_n\}$ подразумевать последовательность частичных сумм ряда (30.1), то

$$s_{n+p} - s_{n-1} = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}$$

и сформулированный в этих обозначениях критерий принимает следующий вид.

ТЕОРЕМА 5 (критерий Коши). *Для того чтобы ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* n_ε*, что при любом* $n > n_\varepsilon$ *и любом целом* $p \geqslant 0$ *выполнялось неравенство*

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon. \qquad (30.10)$$

Из критерия Коши сходимости ряда легко можно получить снова необходимое условие (30.5) сходимости ряда. Действительно, в этом случае неравенство (30.10) выполняется для любого $p \geqslant 0$ и, в частности, для $p = 0$. Поэтому для всех

$n > n_\varepsilon$ имеем $|u_n| < \varepsilon$, а это, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, и означает, что $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

Свойство (30.5) означает, что *«общий член сходящегося ряда стремится к нулю»*.

Пример. Рассмотрим *гармонический ряд*

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

и докажем, что он расходится (факт, установленный еще Н. Оресмом).

Действительно, для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{2n-1} =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad (30.11)$$

т. е. для любого n при $\varepsilon = 1/2$ и $p = n - 1$ неравенство (30.10) не выполняется.

Таким образом, из критерия Коши следует, что гармонический ряд расходится.

В гармоническом ряде его n-й член $u_n = 1/n$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом, пример гармонического ряда показывает, что условие стремления к нулю последовательности членов ряда, являясь необходимым условием сходимости ряда (теорема 1), не является достаточным.

Из рассмотренного примера следует также, что ряд

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots \qquad (30.12)$$

при $\alpha < 1$ расходится. В самом деле, замечая, что при $\alpha < 1$ для любого $n = 2, 3, \ldots$ справедливо неравенство $n^\alpha < n$, имеем, в силу (30.11), неравенства

$$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2}.$$

Поэтому в случае ряда (30.12) при $\alpha < 1$ для любого $n = 1, 2, \ldots$ при $\varepsilon = 1/2$ и $p = n - 1$ неравенство (30.11) не выполняется и, следовательно, в силу критерия Коши, ряд (30.12) при $\alpha < 1$ также расходится.

Задача 1. Доказать, что для всякого сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами $a_n \geqslant 0$ существует такая возрастающая бесконечно большая последовательность $\{b_n\}$, $\lim_{n \to \infty} b_n = +\infty$, $b_n \leqslant b_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ также сходится.

30.4. Ряды с неотрицательными членами

В этом пункте рассмотрим ряды, все члены которых — неотрицательные действительные числа.

ЛЕММА 1. *Пусть все члены ряда* (30.1) *неотрицательны*:

$$u_n \geqslant 0, \ \ n = 1, 2, \ldots . \tag{30.13}$$

Для того чтобы этот ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы существовала хотя бы одна сходящаяся подпоследовательность последовательности его частичных сумм.

Действительно, из условия (30.13) следует, что

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k = s_n + u_{n+1} \geqslant s_n,$$

т. е. последовательность частичных сумм $\{s_n\}$ рассматриваемого ряда является возрастающей. Монотонная же последовательность сходится в том и только в том случае, когда сходится хотя бы одна ее подпоследовательность (см. замечание после теоремы 3 в п. 4.5). □

ЛЕММА 2. *Для того чтобы ряд* (30.1) *с неотрицательными членами сходился, необходимо, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной сверху, и достаточно, чтобы была ограниченной сверху хотя бы одна подпоследовательность* $\{s_{n_k}\}$ *последовательности* $\{s_n\}$ *его частичных сумм, причем если*

$$s = \sup_k \{s_{n_k}\},$$

то s *является суммой ряда* (30.1).

В самом деле, сходимость ряда означает сходимость последовательности его частичных сумм, а всякая сходящаяся последовательность ограничена, в частности ограничена сверху. Таким образом, первая часть леммы справедлива и без предположения неотрицательности членов ряда.

Однако в общем случае условие ограниченности даже всех частичных сумм ряда (а не только некоторой их подпоследовательности) не является достаточным для сходимости ряда, как это показывает, например, пример 3, разобранный в п. 30.1. Поэтому условие неотрицательности членов ряда существенно для справедливости второй части леммы 2. Докажем ее.

Из неотрицательности членов ряда, как мы убедились при доказательстве предыдущей леммы, следует, что последова-

тельность его частичных сумм — возрастающая. Поэтому, если существует ограниченная сверху подпоследовательность $\{s_{n_k}\}$ последовательности частичных сумм $\{s_n\}$ рассматриваемого ряда, то она тоже возрастающая (как всякая подпоследовательность возрастающей последовательности) и, следовательно (см. теорему 3 в п. 4.5), сходится, причем

$$s = \sup_k \{s_{n_k}\} = \lim_{k \to \infty} s_{n_k}.$$

Согласно предыдущей лемме, из сходимости подпоследовательности частичных сумм $\{s_{n_k}\}$ следует сходимость ряда, т. е. существование конечного предела $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$, а так как предел сходящейся последовательности совпадает с пределом любой ее подпоследовательности, то

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{k \to \infty} s_{n_k} = s. \square$$

Из леммы 2 следует, что если ряд с неотрицательными членами расходится, то последовательность его частичных сумм не ограничена сверху и в силу ее монотонности $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = +\infty$. Поэтому для расходящихся рядов с неотрицательными членами, согласно сделанному в п. 30.1 соглашению, пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$.

Доказанные леммы по своей формулировке внешне напоминают соответствующие утверждения для несобственных интегралов (см. п. 29.3). Между сходимостью рядов с неотрицательными членами и сходимостью несобственных интегралов от неотрицательных функций можно иногда установить и более непосредственную связь. Для убывающих функций это сделано в п. 30.7.

Пример. Рассмотрим теперь ряд (30.12) при $\alpha > 1$. Покажем, что в этом случае он сходится. Возьмем сначала частичные суммы этого ряда порядков $n = 2^k - 1$, $k = 1, 2, \ldots$, объединив их слагаемые в k групп, которые имеют следующий вид:

$$\frac{1}{2^{p\alpha}} + \frac{1}{(2^p + 1)^\alpha} + \frac{1}{(2^p + 2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^{p+1} - 1)^\alpha}, \quad p = 0, 1, \ldots, k - 1,$$

т. е.

$$s_{2^k - 1} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{2^{(k-1)\alpha}} + \ldots + \frac{1}{(2^k - 1)^\alpha}\right).$$

Заметив, что для каждого слагаемого p-й группы справедливо неравенство

$$\frac{1}{(2^p + m)^\alpha} \leqslant \frac{1}{2^{p\alpha}}, \quad m = 0, 1, \ldots, 2^p - 1$$

и что в этой группе 2^p слагаемых, получим

$$s_{2^k - 1} < 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2^2}{2^{2\alpha}} + \ldots + \frac{2^{k-1}}{2^{(k-1)\alpha}} <$$

$$< \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{(k-1)(\alpha-1)}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1}.$$

Таким образом, последовательность частичных сумм $s_{2^k - 1}$ ряда (30.12) при $\alpha > 1$ ограничена сверху. Далее, в силу положительности членов рассматриваемого ряда, последовательность его частичных сумм возрастает. Поэтому существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s$. Но тогда и любая подпоследовательность $\{s_n\}$, в частности последовательность $\{s_{2^k - 1}\}$, имеет тот же предел s, а так как по доказанному эта последовательность ограничена, то предел s конечен.

Отметим, что в случае $\alpha = 2$ сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ доказывается значительно проще. Действительно, для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2, \; n = 1, 2, \ldots,$$

т. е. частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ограничены сверху и, следовательно, согласно лемме 2, он сходится. Отсюда для любого $\alpha > 2$ в силу неравенства

$$\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

сразу следует ограниченность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha \geqslant 2$, поэтому и его сходимость (подобный метод установления сходимости ряда с неотрицательными членами рассмотрен в общем случае в следующем пункте). Таким образом, только из-за случая $1 < \alpha < 2$ пришлось применить выше более сложный способ оценки частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$ для установления его сходимости.

Сумма ряда (30.12) при $\alpha > 1$ является, очевидно, функцией от α. Эта функция называется *дзета-функцией* Римана и обозначается греческой буквой ζ. Обычно ее аргумент обозначают буквой s. Таким образом,

$$\zeta(s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1.$$

30.5. Признак сравнения для рядов с неотрицательными членами. Метод выделения главной части члена ряда

Рассмотрим теперь признаки сравнения рядов, также по своей форме весьма напоминающие соответствующие признаки сходимости несобственных интегралов.

ТЕОРЕМА 6 (признак сравнения). *Пусть*

$$u_n \geqslant 0, \ v_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{30.14}$$

и

$$u_n = O(v_n)^*. \tag{30.15}$$

Тогда если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{30.16}$$

сходится, то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{30.17}$$

а если ряд (30.17) *расходится, то расходится и ряд* (30.16).

Доказательство. Пусть выполнено условие (30.15). Тогда существует такое $c > 0$, что

$$u_k \leqslant c v_k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{30.18}$$

Если теперь ряд (30.16) сходится, то, согласно лемме 2, последовательность $\{s_n\}$ его частичных сумм ограничена, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant M, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{30.19}$$

Обозначим через σ_n частичную сумму ряда (30.17). Тогда, в силу неравенств (30.18) и (30.19),

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant c \sum_{k=1}^{n} v_k = c s_n < cM, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

---

* В частности, $u_n \leqslant v_n$. Объяснение обозначения O см. т. 1, п. 23.3.

Согласно лемме 2, из ограниченности сверху частичных сумм ряда (30.17) следует его сходимость. Итак, если ряд (30.16) сходится, то ряд (30.17) также сходится.

Если же ряд (30.17) расходится, то и ряд (30.16) расходится, так как если бы он сходился, то, по доказанному, сходился бы и ряд (30.17), что противоречит условию. □

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть* $v_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *и*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = k, \tag{30.20}$$

тогда:

1) *если ряд* (30.16) *сходится и* $0 \leqslant k < +\infty$, *то ряд* (30.17) *также сходится*;

2) *если ряд* (30.16) *расходится и* $0 < k \leqslant +\infty$, *то ряд* (30.17) *также расходится*.

В частности, если $u_n \sim v_n$ (u_n *и* v_n *эквивалентны,* см. п. 19.3), *то ряды* (30.16) *и* (30.17) *сходятся или расходятся одновременно*.

Из выполнения условия (30.20) для $0 \leqslant k < +\infty$ следует существование такого n_0, что если $n > n_0$, то

$$\frac{u_n}{v_n} < k + 1, \text{ т. е. } u_n < (k + 1)v_n,$$

а это означает, что $u_n = O(v_n)$. Поэтому утверждение 1 следствия непосредственно вытекает из утверждения 1 теоремы.

Из выполнения условия (30.20) для $0 < k \leqslant +\infty$ следует, что если зафиксировать такое k', что $0 < k' < k$, то существует номер $n_0 = n_0(k')$, обладающий тем свойством, что если $n > n_0$, то $\frac{u_n}{v_n} > k'$, т. е. $v_n < \frac{1}{k'}u_n$, а это означает, что $v_n = O(u_n)$. Поэтому утверждение 2 следствия непосредственно вытекает из утверждения 2 теоремы. □

Примеры. 1. Пусть $u_n = \frac{\sin^2 n\alpha}{2^n}$. Тогда $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, и так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится (см. п. 30.1), то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{2^n}$.

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{n}}$ расходится, так как $\frac{1}{1 + \sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, \ldots$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, как было показано (см. исследование ряда (30.12)), расходится.

Приведем еще один способ доказательства сходимости ряда (30.12), т. е. ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, при $\alpha > 1$, основанный на признаке сравнения рядов.

3. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right], \quad \alpha > 1; \tag{30.21}$$

его члены положительны, и он сходится. В самом деле, для него легко находятся его частичные суммы:

$$s_n = 1 - \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}},$$

откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$. Применив теперь формулу конечных приращений Лагранжа к функции $\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ на отрезке $[n-1, n]$, получим

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} = -\frac{\alpha-1}{(n-1+\theta)^\alpha}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{(n-1+\theta)^\alpha} > \frac{\alpha-1}{n^\alpha},$$

поэтому

$$\frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^\alpha}\right].$$

Из этого неравенства, в силу признака сравнения рядов, следует сходимость ряда (30.12), так как исходный ряд (30.21) сходится.

Эффективность использования критерия сравнения для исследования сходимости ряда зависит, конечно, от запаса «рядов сравнения», т. е. рядов, о которых уже известно, сходятся ли они или расходятся, и которые мы можем пытаться использовать для исследования сходимости данного ряда.

Если в качестве «ряда сравнения» (30.16) взять ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, о котором уже известно, при каких α он сходится, то из теоремы 6 непосредственно следует справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть* $u_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$. *Тогда если* $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ *и* $\alpha > 1$, *то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{30.22}$$

сходится; если же $\frac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$ *и* $\alpha \leqslant 1$, *то ряд* (30.22) *расходится.*

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть* $\lim\limits_{n \to \infty} n^{\alpha} u_n = k$, *тогда*:
1) *если* $\alpha > 1$ *и* $0 \leqslant k < +\infty$, *то ряд* (30.22) *сходится*;
2) *если* $\alpha \leqslant 1$ *и* $0 < k \leqslant +\infty$, *то ряд* (30.22) *расходится*.

В частности, если $u_n \sim \frac{1}{n^{\alpha}}$, *то ряд* (30.22) *сходится при* $\alpha > 1$ *и расходится при* $\alpha \leqslant 1$.

Если члены u_n ряда (30.22) с неотрицательными членами заданы с помощью формулы, представляющей собой функцию от n, которая имеет смысл для всех действительных достаточно больших неотрицательных значений переменной n и, более того, является «достаточно гладкой» функцией этой переменной, то для практического применения теоремы 7 обычно бывает целесообразно разложить член u_n с помощью формулы Тейлора по степеням $\frac{1}{n}$.

Если главный член получившегося разложения имеет вид $\frac{1}{n^{\alpha}}$, то, беря в качестве ряда сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ и применяя теорему 7, можно определить, сходится ли данный ряд или расходится. В известном смысле можно сказать, что этот метод исследования сходимости ряда, называемый *методом выделения главной части* общего члена ряда, является наиболее удобным и вместе с тем достаточно общим.

Примеры. Исследуем сходимость рядов, общие члены u_n которых задаются указанными ниже формулами.

1. $u_n = 1 - \cos\frac{\pi}{n}$. Очевидно, $u_n > 0$. Так как (см. замечание в конце п. 13.3) $\cos x = 1 + O(x^2)$, $x \to 0$, и, следовательно,

$$u_n = 1 - \left[1 + O\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)\right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty,$$

то, в силу теоремы 7, ряд с общим членом u_n сходится.

2. $u_n = \ln\cos\frac{1}{n}$. Здесь $u_n < 0$. Вспомнив, что $\ln(1 + x) = O(x)$, $x \to 0$, и, применив последовательно формулу Тейлора для косинуса и логарифма, получим

$$u_n = \ln\cos\frac{1}{n} = \ln\left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty,$$

и поэтому, в силу теоремы 7, ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-u_n)$ сходится, а вместе с ним сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

3. $u_n = \ln\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$, $n = 3, 4, \ldots$. Имеем $u_n \geqslant 0$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$, поэтому

$$u_n = \ln\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) - \ln\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) = 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} + o\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, $u_n \sim \frac{2\pi}{n}$; так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\ln\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$.

30.6. Признаки Даламбера и Коши для рядов с неотрицательными членами

Иногда оказываются полезными некоторые специальные признаки сходимости ряда. Отметим среди них так называемый признак Даламбера* и признак Коши, непосредственно получающиеся из признака сравнения, если в качестве ряда сравнения взять соответствующим образом выбранную геометрическую прогрессию.

ТЕОРЕМА 8 (признак Даламбера). *Пусть дан ряд с положительными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n > 0, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{30.23}$$

Тогда:

1) *если существует такое число* q, $0 < q < 1$, *что выполняется неравенство*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q, \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

то данный ряд сходится;

2) *если выполняется неравенство*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1, \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

то данный ряд расходится.

---

* Ж. Даламбер (1717—1783) — французский философ и математик.

Доказательство. Пусть $0 < q < 1$ и пусть

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q, \text{ т. е. } u_{n+1} \leqslant q u_n, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Тогда

$$\begin{gathered} u_2 \leqslant u_1 q, \\ u_3 \leqslant u_2 q \leqslant u_1 q^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n \leqslant u_{n-1} q \leqslant \dots \leqslant u_1 q^{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered}$$

и так как ряд $u_1 q + u_1 q^2 + \dots + u_1 q^{n-1} + \dots$, являясь суммой бесконечной убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q $(0 < q < 1)$, сходится, то, по признаку сравнения, сходится ряд и исходный ряд (30.23).

Если же выполняется неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, $n = 1, 2, \dots$, то

$$\begin{gathered} u_2 \geqslant u_1, \\ u_3 \geqslant u_2 \geqslant u_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant \dots \geqslant u_1 \end{gathered}$$

и так как, по предположению, $u_1 > 0$, то n-й член ряда, будучи ограничен снизу положительной постоянной, не стремится к нулю. Следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости ряда (см. теорему 1 этого параграфа), поэтому ряд (30.23) расходится. □

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть существует* $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. *Тогда если* $l < 1$, *то ряд* (30.23) *сходится, а если* $l > 1$, *то ряд* (30.23) *расходится.*

Это вытекает непосредственно из доказанной теоремы.

В качестве примера рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Здесь $u_n = \frac{1}{n!}$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, поэтому, согласно следствию теоремы 10, данный ряд сходится. Его сходимость, конечно, можно установить и сравнив его, например, со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Более содержательные примеры на применение признака Даламбера приведены в дальнейшем (см., например, п. 32.1).

ТЕОРЕМА 9 (признак Коши). *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \ u_n \geqslant 0, \ n = 1, 2, \ldots . \qquad (30.24)$$

Тогда:

1) *если существует такое* q, $0 \leqslant q < 1$, *что для всех* $n = 1, 2, \ldots$ *выполняется неравенство* $\sqrt[n]{u_n} \leqslant q$, *то данный ряд сходится*;

2) *если для всех* $n = 1, 2, \ldots$ *выполняется неравенство* $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$, *то данный ряд расходится.*

Доказательство. Если при $\sqrt[n]{u_n} \leqslant q$, т. е. $u_n < q^n$, $n = 1, 2, \ldots$, то, по признаку сравнения, ряд (30.24) сходится, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ при $0 < q < 1$ сходится.

Если же $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$, то $u_n \geqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, ряд (30.24) расходится (см. теорему 1). □

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть существует*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Тогда, если $l < 1$, *то ряд* (30.24) *сходится, а если* $l > 1$, *он расходится.*

Доказательство следствия очевидно.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$. Так как $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, то, согласно следствию из теоремы 9, данный ряд сходится. Его сходимость легко устанавливается и с помощью теоремы 7.

Замечание. Если о ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, известно лишь, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \quad \text{или} \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1, \qquad (30.25)$$

то ничего определенного о его сходимости сказать нельзя: ряд может как сходиться, так и расходиться. Например, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

удовлетворяют обоим условиям (30.25), однако первый из них расходится, а второй сходится.

30.7. Интегральный признак сходимости рядов с неотрицательными членами

Если для данного ряда (30.1) с неотрицательными членами удается подобрать функцию, определенную при $x \geqslant 1$ и такую, что $f(n) = u_n$, то при определенных условиях по сходимости или расходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ можно судить и о сходимости или расходимости ряда (30.1).

ТЕОРЕМА 10 (интегральный признак сходимости рядов). *Если функция $f(x)$, определенная при всех $x \geqslant 1$, неотрицательна и убывает, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x) \tag{30.26}$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx. \tag{30.27}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что, в силу монотонности функции f на промежутке $[1, +\infty)$, она интегрируема по Риману на любом конечном отрезке $[1, \eta]$, и поэтому имеет смысл говорить о несобственном интеграле (30.27).

Если $k \leqslant x \leqslant k + 1$, то, в силу убывания функции $f(x)$ (рис. 1), $f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k + 1)$, $k = 1, 2, \ldots$; поэтому, интегрируя эти неравенства по отрезку $[k, k + 1]$, будем иметь

$$f(k) \geqslant \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \geqslant f(k+1), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Суммируя от $k = 1$ до $k = n$ (рис. 2), получим

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k+1),$$

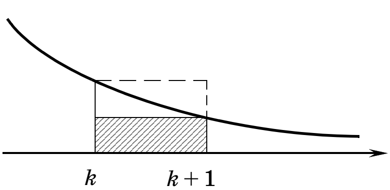


Рис. 1

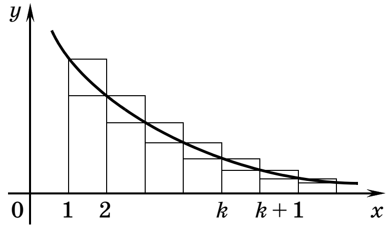


Рис. 2

и, полагая $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, будем иметь

$$s_n \geqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \geqslant s_{n+1} - f(1), \quad n = 1, 2, \ldots . \qquad (30.28)$$

Если интеграл (30.27) сходится, то, в силу неотрицательности функции f, согласно лемме п. 29.3, при любом $n = 1, 2, \ldots$

$$\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Отсюда и из неравенства (30.28) следует, что

$$s_{n+1} \leqslant f(1) + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx,$$

т. е. последовательность частичных сумм ряда (30.26) ограничена сверху, а значит, согласно лемме 2 п. 30.4, этот ряд сходится.

Если ряд (30.26) сходится и его сумма равна s, то, согласно той же лемме, $s_n \leqslant s$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, в силу неравенства (30.28), для всех $n = 1, 2, \ldots$

$$\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant s.$$

Если теперь $\xi \geqslant 1$, то, беря n так, чтобы $n \geqslant \xi$, получим, в силу неотрицательности функции f,

$$\int\limits_1^{\xi} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_1^{n} f(x)\,dx \leqslant s.$$

Итак, совокупность всех интегралов $\int\limits_1^{\xi} f(x)\,dx$, $\xi \geqslant 1$, ограничена сверху, поэтому интеграл (30.27) сходится (см. лемму п. 29.3). □

Эта теорема часто значительно облегчает исследование сходимости рядов, так как если для данного ряда удается подобрать соответствующую функцию f и, следовательно, свести вопрос об изучении сходимости ряда к изучению сходимости интеграла, то это дает возможность применить развитый в предшествующей главе аппарат интегрального исчисления.

Примеры. 1. Рассмотрим снова (см. п. 30.3 и п. 30.5) ряд (30.12)

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$$

с n-м членом $u_n = n^{-\alpha}$, $n = 1, 2, \ldots$. В данном случае при $\alpha \geqslant 0$ функция $f(x)$, указанная в теореме, подбирается легко:

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \;\; x \geqslant 1.$$

Так как интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$, то и ряд (30.12) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Расходимость ряда (30.12) при $\alpha < 0$ очевидна сразу — его общий член не стремится к нулю, поскольку $\frac{1}{n^\alpha} \geqslant 1$, $\alpha < 0$. Эти факты были установлены в п. 30.3, 30.4 и 30.5 другим методом. Как видно из изложенного выше, применение к изучению ряда (30.12) интегрального признака сходимости рядов значительно упростило задачу исследования сходимости этого ряда.

2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}. \tag{30.29}$$

Этот ряд легко можно исследовать с помощью интегрального признака сходимости: из того, что интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t}$$

расходится, следует, что и ряд (30.29) расходится.

Сформулируем теперь простое, но часто полезное в приложениях следствие из теоремы 10.

Если существует такое натуральное n_0, что неотрицательная функция f убывает при $x \geqslant n_0$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_{n_0}^{+\infty} f(x)\, dx$.

Этот случай сводится к рассмотренному в теореме заменой переменного $x = y + n_0 - 1$.

30.8*. Неравенства Гёльдера и Минковского для конечных и бесконечных сумм

Пусть заданы числа (вообще говоря, комплексные) $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$, $1 < p < +\infty$, и число q определяется равенством $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (см. (28.16) в п. 28.2*). Тогда справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q} \tag{30.30}$$

(неравенство Гёльдера) и

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} \tag{30.31}$$

(неравенство Минковского).

Их доказательство проводится по той же схеме, что и в случае соответствующих интегральных неравенств (см. п. 28.2*).

Введем для краткости обозначения

$$\|x\|_p \overset{\mathrm{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \|y\|_q \overset{\mathrm{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q}. \qquad (30.32)$$

Применив неравенство (28.17) $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ к $a = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}$, $b = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, имеем $\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$. Просуммировав эти неравенства по i от 1 до n, в силу (30.32) и условия $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, получим

$$\frac{1}{\|x\|_q \|y\|_q} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p\|x\|_p^p} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{q\|y\|_q^q} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q;$$

тем самым неравенство (30.30) доказано.

Неравенство Минковского (30.31) следует из неравенства Гёльдера (30.30): из очевидного соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i|\, |x_i + y_i|^{p-1},$$

применив к каждому слагаемому в правой части неравенство Гёльдера, получим

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{1/q} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{1/q}.$$

Если левая часть неравенства равна нулю, то неравенство Минковского, очевидно, справедливо; если же она не равна нулю, то, сокращая обе части неравенства на множитель $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{1/q}$ и заметив, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $q(p-1) = p$, получим неравенство (30.31). □

Для любых двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ справедливы аналогичные неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/q}, \tag{30.33}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{1/p}. \tag{30.34}$$

Действительно, для всех частичных сумм одного и того же порядка заданных рядов справедливы неравенства Гёльдера и Минковского. Переходя в них к пределу при $n \to \infty$, мы и получим неравенства (30.33) и (30.34).

Из доказанных неравенств следует, в частности, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$, $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|$ сходится, а если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$, $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p$, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p$.

30.9. Знакопеременные ряды

В этом пункте рассматриваются ряды с действительными членами, знаки которых, вообще говоря, изменяются при изменении номера; такие ряды называются *знакопеременными*.

Рассмотрим прежде всего *знакочередующиеся* ряды, т. е. ряды, члены которых поочередно то положительны, то отрицательны.

ТЕОРЕМА 1 (теорема Лейбница). *Если*

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0 \tag{30.35}$$

и

$$u_n \geqslant u_{n+1} > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{30.36}$$

то знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \tag{30.37}$$

сходится. При этом любая частичная сумма s_n ряда (30.37) *отличается от его суммы s на величину, меньшую следующего члена u_{n+1}, иначе говоря, абсолютная величина остатка ряда r_n в этом случае не превышает абсолютной величины его первого члена, т. е.*

$$|r_n| = |s - s_n| \leqslant u_{n+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы четного порядка ряда (30.37)

$$s_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} u_n.$$

Их можно записать в виде

$$s_{2k} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2k-1} - u_{2k}), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

В силу условия (30.36), выражения в круглых скобках неотрицательны и поэтому $s_{2k} \leqslant s_{2k+2}$, т. е. последовательность частичных сумм четного порядка ряда (30.37) возрастает.

Замечая, что частичные суммы s_{2k} можно записать также в виде

$$s_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k}, \quad k = 1, 2, \ldots ,$$

и что выражения в круглых скобках, в силу условия (30.36), неотрицательны, а $u_{2k} > 0$, получаем, что $s_{2k} < u_1$, т. е. последовательность $\{s_{2k}\}$ ограничена сверху. Из возрастания и ограниченности сверху последовательности $\{s_{2k}\}$ следует, что она сходится:

$$\lim_{k \to \infty} s_{2k} = s. \qquad (30.38)$$

Покажем, что и частичные суммы нечетного порядка ряда (30.37) стремятся к тому же пределу. Действительно,

$$s_{2k+1} = s_{2k} + u_{2k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots , \qquad (30.39)$$

и так как, согласно (30.35), $\lim\limits_{k \to \infty} u_{2k+1} = 0$, то, в силу (30.38) и (30.39), имеем

$$\lim_{k \to \infty} s_{2k+1} = s. \qquad (30.40)$$

Из (30.38) и (30.40) следует, что

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s.$$

Теперь отметим, что для ряда (30.37) справедливо неравенство

$$s_{2k} \leqslant s \leqslant s_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots . \qquad (30.41)$$

Действительно, с одной стороны, уже было показано, что s является пределом возрастающей последовательности $\{s_{2k}\}$, поэтому $s_{2k} \leqslant s$. С другой стороны,

$$s_{2k+1} = s_{2k-1} - (u_{2k} - u_{2k+1}) \leqslant s_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots ,$$

т. е. последовательность $\{s_{2k-1}\}$ убывает, и так как s является пределом и последовательности $\{s_{2k-1}\}$ (см. (34.40)), то $s \leqslant s_{2k-1}$. Из неравенства (30.41) следует

$$s - s_{2k} \leqslant s_{2k+1} - s_{2k} = u_{2k+1},$$
$$s_{2k-1} - s \leqslant s_{2k-1} - s_{2k} = u_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots ,$$

а это и означает, что для всех $n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство $|s - s_n| \leqslant u_{n+1}$. □

Если условия чередования знаков ряда и монотонности выполняются не с первого члена, а лишь начиная с некоторого номера n_0, то при выполнении условия (30.35), т. е. при стремлении общего члена ряда к нулю, рассматриваемый ряд будет также сходиться. Это следует из того, что отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (см. теорему 4 в п. 30.2).

В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \tag{30.42}$$

Его члены удовлетворяют, очевидно, условиям теоремы 11, и поэтому он сходится. Замечая, что здесь $s_1 = 1$ и $s_2 = \frac{1}{2}$, для суммы S ряда имеем оценку

$$\frac{1}{2} \leqslant S \leqslant 1. \tag{30.43}$$

На ряды переносятся не все свойства конечных сумм. Поясним это на примере того же ряда (30.42). Если

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots , \tag{30.44}$$

то

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots ;$$

сложив почленно этот ряд с рядом (30.44), получим равенство

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots , \tag{30.45}$$

т. е. ряд, составленный из тех же членов, что и данный ряд (30.44), взятых только в другом порядке, поэтому $\frac{3}{2}S = S$, откуда следует, что $S = 0$, что противоречит неравенству (30.43).

Несмотря на кажущуюся очевидность справедливости проведенных рассуждений, где-то совершена грубая ошибка. Подробный анализ причин, породивших эту ошибку, дан в одном из следующих пунктов.

30.10. Абсолютно сходящиеся ряды. Применение абсолютно сходящихся рядов к исследованию сходимости произвольных рядов

В этом пункте снова рассматриваются ряды, члены которых, вообще говоря, комплексные числа.

Определение 4. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \in \boldsymbol{C}, \tag{30.46}$$

называется абсолютно сходящимся, если ряд, составленный из абсолютных значений его членов, т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \tag{30.47}$$

сходится.

Применяя критерий Коши сходимости ряда к ряду (30.47), получим: *для того чтобы ряд* (30.46) *абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* n_ε, *чтобы для всех* $n > n_\varepsilon$ *и всех целых* $p \geqslant 0$ *выполнялось неравенство* $\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$.

Примеры. 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} \sin \frac{\pi n}{n+1}$ абсолютно сходится, так как $\left|\frac{i^n}{2^n} \sin \frac{\pi n}{n+1}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, как доказано выше, сходится, однако сходится он не абсолютно, ибо ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т. е. гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, расходится.

ТЕОРЕМА 12. *Если ряд абсолютно сходится, то он и просто сходится.*

Доказательство. Пусть ряд (30.46) абсолютно сходится, т. е. ряд (30.47) сходится. Тогда, в силу необходимости выполнения условия Коши для сходимости ряда (см. теорему 5), для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ и всех целых $p \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства $\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k|$ следует, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ и всех $p = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon$. А это и означает, в силу достаточности выполнения условия Коши для сходимости ряда, что ряд (30.46) сходится. □

Замечание. Следует иметь в виду, что свойство абсолютной величины суммы не превышать сумму абсолютных величин слагаемых остается справедливым и для сходящихся рядов:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{30.48}$$

Это неравенство содержательно, когда его правая часть конечна, т. е. когда рассматриваемый ряд абсолютно сходится. В этом случае левая часть неравенства всегда имеет смысл, так как из абсолютной сходимости ряда следует и его обычная сходимость. Формально неравенство (30.48), по принятому нами соглашению об употреблении символа $+\infty$ (см. п. 3.1 и 30.1), верно и для любого сходящегося ряда, у которого ряд в правой части (30.48) расходится.

Для доказательства неравенства (30.48) в случае сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ заметим, что для любого натурального m

$$\left|\sum_{n=1}^{m} u_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{m} |u_n|.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем неравенство (30.48).

Обозначим через

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* \tag{30.49}$$

ряд, составленный из тех же членов, что и ряд (30.46), но взятых, вообще говоря, в другом порядке.

ТЕОРЕМА 13. *Если ряд* (30.46) *абсолютно сходится, то ряд* (30.49) *также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.*

Доказательство. Пусть ряд (30.46) абсолютно сходится, т. е. сходится ряд (30.47), и пусть сумма ряда (30.46) равна s:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{30.50}$$

Покажем сначала, что ряд (30.49) также сходится и, более того, что его сумма равна сумме ряда (30.46), т. е. s. Обозначим частичные суммы ряда (30.46) через s_n:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

а частичные суммы ряда (30.49) — через s_m^*:

$$s_m^* = \sum_{k=1}^{m} u_k^*$$

и положим

$$\tilde{s} = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \quad \tilde{s}_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$; тогда, в силу сходимости ряда (30.47), существует такой номер n_ε, что

$$\sum_{n=n_\varepsilon+1} |u_n| = \tilde{s} - \tilde{s}_{n_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (30.51)$$

следовательно, выполняется и неравенство

$$|s - s_{n_\varepsilon}| = \left|\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (30.52)$$

Выберем далее номер m_ε так, чтобы частичная сумма $s_{m_\varepsilon}^*$ ряда (30.49) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (30.46), входящие в сумму s_{n_ε} (иначе говоря, номер m_ε таков, что все члены ряда (30.46) с номерами, не превышающими n_ε, имеют в ряде (30.49) номера, не превышающие m_ε). Пусть $m \geqslant m_\varepsilon$. Положим

$$s_m^{**} = s_m^* - s_{n_\varepsilon}.$$

Поскольку $|s_m^{**}|$ не превышает сумму абсолютных величин слагаемых, входящих в s_m^{**}, и так как номера этих слагаемых больше, чем n_ε, а следовательно, все их абсолютные значения содержатся в сумме $\sum\limits_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n|$, то, в силу (30.51), имеем

$$|s_m^{**}| \leqslant \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (30.53)$$

Используя (30.52) и (30.53), получаем при $m \geqslant m_\varepsilon$

$$|s - s_m^*| = |s - (s_{n_\varepsilon} + s_m^{**})| \leqslant |s - s_{n_\varepsilon}| + |s_m^{**}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает, что $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_m^* = s$.

Осталось доказать, что ряд (30.49) также абсолютно сходится. Это сразу следует из только что доказанного утверждения, если его применить к ряду (30.47). Действительно, этот ряд, очевидно, абсолютно сходится (как и всякий сходящийся ряд с неотрицательными членами), и поэтому, согласно доказанному, ряд $\sum_{m=1}^{\infty}|u_m^*|$, составленный из абсолютных величин ряда (30.49), не только сходится (что и означает абсолютную сходимость ряда (30.49)), но, более того, его сумма совпадает с суммой ряда (30.47). □

ТЕОРЕМА 14. *Если ряд* (30.46) *абсолютно сходится и c — какое-либо число, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ также абсолютно сходится.*

Это следует из критерия Коши сходимости рядов и равенства

$$\sum_{k=n}^{n+p}|cu_k| = |c|\sum_{k=n}^{n+p}|u_k|.$$

ТЕОРЕМА 15. *Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся, то их сумма $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ также абсолютно сходится.*

Это следует из критерия Коши сходимости рядов и из неравенства

$$\sum_{k=n}^{n+p}|u_k + v_k| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p}|u_k| + \sum_{k=n}^{n+p}|v_k|.$$

ТЕОРЕМА 16. *Если ряды*

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{30.54}$$

абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $u_m v_n$ членов этих рядов, расположенных в произвольном порядке, также абсолютно сходится. Если сумма этого ряда равна s, а сумма рядов (30.54) *равна соответственно s' и s'', т. е.*

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = s', \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = s'',$$

то

$$s = s's''. \tag{30.55}$$

Короче говоря, утверждение теоремы означает, что абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно.

Доказательство. Покажем, что ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $u_m v_n$ членов рядов (30.54), абсолютно сходится. Заметим, что если показать, что ряд из этих произведений абсолютно сходится при каком-то их порядке, то, согласно теореме 13, отсюда будет следовать его абсолютная сходимость и при любом другом порядке членов. Поэтому расположим произведения $u_m v_m$ в порядке, удобном для доказательства теоремы. Для его описания составим следующую таблицу попарных произведений членов рядов (30.54):

$$\begin{matrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 \ldots u_1 v_n \ldots \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 \ldots u_2 v_n \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m v_1 & u_m v_2 \ldots u_m v_n \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}$$

Составим из элементов этой таблицы ряд

$$u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_2 + u_2 v_1 + \ldots, \tag{30.56}$$

в котором ее элементы расположены в порядке, показанном на следующей ниже схеме, где на месте каждого произведения из таблицы указан его порядковый номер как члена ряда (30.56):

1	2	5	10	…
4	3	6	11	…
9	8	7	12	…
16	15	14	13	…
…	…	…	…	…

Докажем, что ряд (30.56) абсолютно сходится, т. е. что сходится ряд

$$|u_1 v_1| + |u_1 v_1| + |u_2 v_2| + |u_2 v_1| + \ldots \tag{30.57}$$

Для этого, в силу неотрицательности его членов, достаточно доказать, что существует по крайней мере одна ограниченная сверху подпоследовательность его частичных сумм (см. лемму 2 п. 30.4).

Положим

$$s' = \sum_{m=1}^{\infty} |u_m|, \quad s'' = \sum_{n=1}^{\infty} |v_n|, \quad s'_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|, \quad s''_n = \sum_{k=1}^{n} |v_k|$$

и через $\tilde{s}_n$ обозначим частичные суммы ряда (30.57). Тогда для этих частичных сумм порядка n^2 будем иметь

$$\tilde{s}_1 = |u_1 v_1| = \tilde{s}'_1 \tilde{s}''_1 \leqslant \tilde{s}' \tilde{s}'',$$

$$\tilde{s}_4 = |u_1 v_1| + |u_1 v_2| + |u_2 v_2| + |u_2 v_1| =$$

$$= (|u_1| + |u_2|)(|v_1| + |v_2|) = \tilde{s}'_2 \tilde{s}''_2 \leqslant \tilde{s}' \tilde{s}'',$$

. . . .

$$\tilde{s}_{n^2} = |u_1 v_1| + \ldots + |u_1 v_n| + \ldots + |u_n v_n| + \ldots + |u_n v_1| =$$

$$= (|u_1| + \ldots + |u_n|)(|v_1| + \ldots + |v_n|) = \tilde{s}'_n \tilde{s}''_n \leqslant \tilde{s}' \tilde{s}'',$$

. . . .

причем, в силу абсолютной сходимости рядов (30.54), в правых частях этих неравенств стоят конечные величины.

Итак, подпоследовательность частичных сумм $\{\tilde{s}_{n^2}\}$ ряда (30.57) ограничена сверху, и, следовательно, он сходится. Это означает абсолютную сходимость ряда (30.56) и любого ряда, полученного произвольной перестановкой его членов (см. теорему 13). Таким образом, любой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_{m_k} v_{n_k}, \tag{30.58}$$

составленный из всевозможных попарных произведений $u_m v_n$ членов рядов (30.54), сходится, и притом абсолютно.

Для доказательства (30.55) воспользуемся тем, что сумма ряда (30.58) в силу его абсолютной сходимости не зависит от порядка его членов, и снова расположим их наиболее удобным способом; именно, рассмотрим снова ряд (30.56).

Обозначим через s_n его частичные суммы и положим

$$s'_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad s''_n = \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Аналогично тому, как это сделано выше, получаем

$$s_{n^2} = (u_1 + \ldots + u_n)(v_1 + \ldots + u_n) = s'_n s''_n. \tag{30.59}$$

Поскольку уже доказано, что ряд (30.56) абсолютно сходится, следовательно, и просто сходится, то существует конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s$ и, следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} s_{n^2} = s$. Согласно же условиям теоремы, имеют место равенства

$$\lim_{n \to \infty} s'_n = s', \quad \lim_{n \to \infty} s''_n = s''.$$

Поэтому, перейдя к пределу в равенстве (30.59) при $n \to \infty$, получим $s = s's''$, т. е. (30.55). □

Теоремы 13—16 показывают, что свойства абсолютно сходящихся рядов во многом похожи на свойства конечных сумм: величина суммы такого ряда не зависит от порядка слагаемых, абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно и т. п. В следующем пункте будет доказано, что для сходящихся рядов, не сходящихся абсолютно, эти свойства не имеют места.

З а м е ч а н и е. В заключение этого пункта подчеркнем, что, когда члены ряда комплексные или действительные, но меняющие знак, вопрос о сходимости этого ряда нельзя решить только с помощью определения «порядка убывания» n-го члена. Например, n-е члены рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ имеют одинаковый порядок (см. п. 8.2 в т. 1) при $n \to \infty$, однако первый ряд расходится, а второй — сходится.

Более того, нетрудно привести пример двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, n-е члены которых эквивалентны ($u_n \sim v_n$, $n = 1, 2, \ldots$), но один ряд сходится, а другой расходится.

В качестве таких рядов можно взять, например, ряд с n-м членом

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

и ряд с n-м членом

$$v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

С одной стороны, здесь $u_n \sim v_n$, $n = 1, 2, \ldots$, так как

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}} = 1 + \frac{(-1)^{n+1} n}{(n+1)\ln(n+1)},$$

и поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$. С другой стороны, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ является рядом вида (30.37), поэтому он сходится. Ряд же $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится. В самом деле, если бы он сходился, то сходился бы и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)},$$

т. е. ряд (30.29), который, как мы видели, расходится.

Было бы ошибкой, однако, считать, что метод выделения главной части годится лишь в случае рядов с действительными членами, имеющими один и тот же знак. Метод выделения главной части может с успехом применяться для выяснения сходимости любых рядов. Суть этого метода в рассматриваемом случае основана на следующем замечании: пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Если представить его члены в виде $u_n = v_n + w_n$, где ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и расходится одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (почему?). Поэтому для исследования сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ целесообразно попытаться представить его члены, например, в виде $u_n = v_n + w_n$, так чтобы $w = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ при $\alpha > 1$. Тогда, поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится (и даже абсолютно), сходимость данного ряда сводится к исследованию сходимости ряда $\sum_{n \to \infty}^{\infty} v_n$. Этот прием, конечно, целесообразен в том случае, если получившийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ проще исследовать на сходимость, чем данный ряд (ср. с аналогичным исследованием сходимости интегралов в п. 29.6).

Рассмотрим, например, ряд с общим членом

$$u_n = \ln\left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right].$$

Так как (см. замечание в п. 13.3)

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3), \quad x \to 0,$$

то

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \quad n \to +\infty.$$

Положим $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}$ и $w_n = u_n - v_n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится как разность рядов, из которых один сходится, а другой расходится. Ряд же $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится, и даже абсолютно, так как

$$w_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \quad n \to \infty.$$

Таким образом, данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, хотя его «главная часть» $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ и представляет собой сходящийся ряд. Тем самым эти ряды являются еще одним примером двух рядов, члены которых образуют эквивалентные последовательности и из которых один сходится, а другой расходится.

30.11. Признаки Даламбера и Коши для произвольных числовых рядов

Если в случае числового ряда (30.1) $u_n \neq 0$, $u_n \in \boldsymbol{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, существует такое q, $0 < q < 1$, что для всех n выполняется неравенство

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant q \quad \text{или} \quad \sqrt[n]{|u_n|} \leqslant q,$$

то, согласно признаку Даламбера, соответственно Коши (см. п. 30.6), данный ряд сходится, и притом абсолютно.

Если же для всех n имеет место неравенство

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geqslant 1 \qquad (30.60)$$

или

$$\sqrt[n]{|u_n|} \geqslant 1, \qquad (30.61)$$

то по признакам Даламбера и Коши можно лишь утверждать, что в этом случае ряд из абсолютных величин членов ряда (30.1), т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, расходится, что лишь означает, что заданный ряд не сходится абсолютно.

На самом деле из (30.60) и из (30.61) следует, что данный ряд (30.1) вообще расходится. Действительно, как видно из доказательства признака Даламбера, соответственно признака Коши, применительно к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ (см. теоремы 8 и 9 в п. 30.6) при выполнении каждого из условий (30.60) и (30.61) в отдельности последовательность $\{|u_n|\}$ не стремится к нулю, следовательно, не стремится к нулю и последовательность $\{u_n\}$, т. е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда.

Полученные признаки расходимости ряда также обычно называются *признаками Даламбера и Коши*.

30.12. Сходящиеся ряды, не сходящиеся абсолютно. Теорема Римана

Если ряд сходится, но не абсолютно (такие ряды иногда называют *условно сходящимися*), то, как ниже будет показано, уже нельзя утверждать, что, переставив его члены в другом порядке, получим сходящийся к той же сумме ряд. Парадокс в конце п. 30.9 и объясняется этим обстоятельством: рассмотренный там ряд (30.45) отличался порядком членов от заданного сходящегося, но не абсолютно, ряда (30.42), и поэтому нельзя было утверждать, что его сумма также равна S. Более того, получившееся противоречие показывает, что это заведомо не так.

Итак, сумма ряда зависит от порядка слагаемых, т. е. коммутативный закон сложения не имеет места для не абсолютно сходящихся рядов.

Если в данном ряде сгруппировать каким-либо образом его члены, не нарушая их порядка, и сложить, то последовательность частичных сумм получившегося ряда является подпоследовательностью частичных сумм исходного ряда. Поэтому если исходный ряд сходится, то будет сходиться и вновь полученный, причем суммы обоих рядов одинаковы. Однако если данный ряд расходится, то второй ряд может сходиться. Например, ряд $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ расходится. Объединив же попарно его члены: $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$, получим сходящийся ряд. Таким образом, вообще говоря, для рядов неверен и ассоциативный закон сложения.

Рассмотрим некоторые свойства сходящихся, но не абсолютно, рядов с действительными членами. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{30.62}$$

где u_n, $n = 1, 2, \dots$, — действительные числа.

Обозначим через $u_1^+, u_2^+, \dots, u_n^+, \dots$ его неотрицательные члены: $u_n^+ \geqslant 0$, а через $-u_1^-, -u_2^-, \dots, -u_n^-, \dots$ его отрицательные члены: $u_n^- > 0$, взятые в том порядке, в каком они расположены в ряде (30.62). Рассмотрим ряды с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+; \tag{30.63}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-. \tag{30.64}$$

Отметим, что если ряд (30.63) содержит лишь конечное число членов, отличных от нуля, или ряд (30.64), все члены которого, по определению, отличны от нуля, состоит лишь из конечного числа членов, то начиная с некоторого номера все члены исходного ряда (30.62) имеют один и тот же знак и, следовательно, его сходимость равносильна абсолютной сходимости.

Таким образом, если ряд (30.62) сходится, но не абсолютно, то оба множества $\{u_n^+\}$ и $\{u_n^-\}$ бесконечные.

ЛЕММА 3. *Если ряд* (30.62) *сходится, но не абсолютно, то оба ряда* (30.63) *и* (30.64) *расходятся.*

Доказательство. Положим

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad \tilde{s}_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|, \tag{30.65}$$

$$s_n^+ = \sum_{k=1}^{n} u_k^+, \quad s_n^- = \sum_{k=1}^{n} u_k^-.$$

Все слагаемые последних трех сумм $\tilde{s}_n$, s_n^+ и s_n^- неотрицательны, поэтому последовательности этих сумм возрастают и, следовательно, имеют конечные или бесконечные пределы.

Суммы s_n и $\tilde{s}_n$ можно представить в следующем виде:

$$s_n = s_m^+ - s_k^-; \tag{30.66}$$

$$\tilde{s}_n = s_m^+ + s_k^-; \tag{30.67}$$

$$n = m + k \tag{30.68}$$

(m и k зависят от n для данного ряда), при этом условие стремления n к бесконечности равносильно одновременному стремлению к бесконечности k и m. Действительно, если бы при $n \to \infty$ номера $m = m(n)$ (номера $k = k(n)$) не стремились бы к бесконечности, то это означало бы, что в ряде (30.62) имеется лишь конечное число неотрицательных (отрицательных) членов, а в этом случае ряд (30.62) сходился бы абсолютно, что противоречило бы условию леммы.

Обратное утверждение, что при $k \to \infty$ и $m \to \infty$ имеет место $n \to \infty$, очевидно в силу равенства (30.68).

По условию, ряд (30.62) не сходится абсолютно, а это означает, что

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{s}_n = +\infty. \tag{30.69}$$

Поэтому, в силу равенства (30.67), по крайней мере один из пределов

$$\lim_{n \to \infty} s_n^+, \quad \lim_{n \to \infty} s_n^- \tag{30.70}$$

также равен $+\infty$. Но тогда из соотношения (30.66), в котором частичные суммы s_n стремятся к конечному пределу (ряд (30.62) сходится), явствует, что и другой из указанных пределов (30.70) также равен $+\infty$. Это и означает, что ряды (30.63) и (30.64) расходятся. □

ТЕОРЕМА 17 (теорема Римана). *Если ряд* (30.62) *сходится, но не абсолютно, то, каково бы ни было число A, можно так переставить члены этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равна A.*

Доказательство. Снова рассмотрим ряды (30.63) и (30.64). Согласно лемме,

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^+ = +\infty; \tag{30.71}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^- = +\infty. \tag{30.72}$$

Пусть задано число A. Выберем из ряда (30.71) подряд столько членов, чтобы их сумма превышала A и чтобы меньшее число таких членов не обладало этим свойством, т. е. их сумма была не больше A.

Точнее, выберем число n_1 так, чтобы

$$u_1^+ + u_2^+ + \dots + u_{n_1}^+ > A, \tag{30.73}$$

причем в том случае, когда номер $n_1 = 1$ не удовлетворяет этому условию, выбор n_1 произведем еще таким образом, чтобы при этом выполнялось также и неравенство

$$u_1^+ + u_2^+ + \dots + u_{n_1-1}^+ \leqslant A. \tag{30.74}$$

Существование номеров n_1, для которых выполняется условие (30.73), следует из условия (30.71); для того чтобы при этом выполнялось и условие (30.74), надо взять наименьший из этих номеров n_1.

Выберем теперь из ряда (30.72) подряд столько членов, чтобы, вычтя их сумму из суммы уже набранных из ряда (30.71) членов, получить значение, меньшее A, и чтобы меньшее число членов ряда (30.72) уже не обладало этим свойством.

Таким образом, выберем из ряда (30.72) n_2 первых членов так, чтобы

$$u_1^+ + \dots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \dots - u_{n_2}^- < A,$$

причем в том случае, когда номер $n_2 = 1$ не удовлетворяет этому условию, выберем n_2 таким образом, чтобы при этом выполнялось еще и неравенство

$$u_1^+ + \dots + u_{n_1-1}^+ - u_1^- - \dots - u_{n_2-1}^- \geqslant A.$$

Существование такого номера n_2 доказывается исходя из (30.72), аналогично существованию номера n_1.

Снова выберем подряд из ряда (30.71) члены до некоторого номера n_3 так, чтобы выполнялось неравенство

$$u_1^+ + \dots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \dots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \dots + u_{n_3}^+ > A$$

и (при $n_3 > n_1 + 1$) неравенство

$$u_1^+ + \dots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \dots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \dots + u_{n_3-1}^+ \leqslant A.$$

Продолжая этот процесс далее, получим ряд

$$u_1^+ + \dots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \dots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \dots + u_{n_3}^+ - \\ - u_{n_2+1} - \dots - u_{n_4}^- + \dots . \qquad (30.75)$$

Для последовательности его частичных сумм

$$s_{n_1},\ s_{n_1+n_2},\ s_{n_2+n_3},\ \dots,\ s_{n_k+n_{k+1}},\ \dots,\quad k = 1, 2, \dots,$$

в силу построения, выполняются неравенства

$$s_{n_1} > A,\ s_{n_1+n_2} < A,\ s_{n_2+n_3} > A,\ \dots,$$

причем отклонение от числа A каждой из указанных частичных сумм $s_{n_k+n_{k+1}}$ не превышает ее последнего члена:

$$|A - s_{n_k+n_{k+1}}| \leqslant u_{n_{k+1}}^{\pm}. \qquad (30.76)$$

Здесь $u_{n_{k+1}}^{\pm}$ является абсолютной величиной члена ряда (30.75) с номером n_{k+1} и соответствующим верхним индексом «+» или «−».

В силу сходимости исходного ряда (30.62), имеем $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, и так как при $k \to \infty$ номер члена $u_{n_{k+1}}^{\pm}$ в ряде (30.62) также стремится к ∞, то

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_{k+1}}^{\pm} = 0.$$

Поэтому из (30.76) следует, что

$$\lim_{k \to \infty} s_{n_k + n_{k+1}} = A. \qquad (30.77)$$

Если теперь взять любую частичную сумму s_n ряда (30.75), $n > n_1 + n_2$, то, в силу конструкции этого ряда, всегда можно найти такой номер $k = k(n)$, что будет иметь место либо неравенство

$$s_{n_k + n_{k+1}} \leqslant s_n \leqslant s_{n_{k+1} + n_{k+2}},$$

либо неравенство

$$s_{n_k + n_{k+1}} \geqslant s_n \geqslant s_{n_{k+1} + n_{k+2}},$$

поэтому из (30.77) следует, что и

$$\lim_{n \to \infty} s_n = A. \ \square$$

УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что если ряд (30.62) сходится, но не абсолютно, то можно так переставить его члены, что полученный ряд будет расходиться. В частности, можно сделать так, чтобы его сумма была равна $+\infty$, $-\infty$, а также и так, чтобы последовательность его частичных сумм не имела ни конечного, ни бесконечного предела.

30.13. Преобразование Абеля. Признаки сходимости Дирихле и Абеля

В этом пункте будут доказаны достаточные признаки сходимости числовых рядов, пригодные и для рядов с комплексными членами.

Предварительно рассмотрим одно преобразование сумм вида

$$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n, \qquad (30.78)$$

где a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — комплексные числа. Положим

$$B_1 = b_1,\ B_2 = b_1 + b_2,\ \ldots,\ B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n;$$

тогда

$$b_1 = B_1,\ b_2 = B_2 - B_1,\ \ldots,\ b_n = B_n - B_{n-1}$$

и

$$S = a_1 B_1 + a_2(B_2 - B_1) + \ldots + a_n(B_n - B_{n-1}).$$

Раскрыв скобки и группируя по-новому члены, получим равенство

$$S = (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_n B_n.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1})B_i + a_n B_n. \qquad (30.79)$$

Преобразование сумм вида (30.78) называется *преобразованием Абеля*; оно является в известном смысле аналогом интегрирования по частям. Эта аналогия особенно бросается в глаза, если формулу (30.79) записать в виде

$$\sum_{i=2}^{n} a_i(B_i - B_{i-1}) = (a_n B_n - a_1 B_1) - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) B_i.$$

Докажем с помощью преобразования Абеля лемму.

ЛЕММА 4 (неравенство Абеля). *Если*

$$a_i \geqslant a_{i+1},\ \ i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{30.80}$$

или

$$a_i \leqslant a_{i+1},\ \ i = 1, 2, \ldots, n-1^*, \tag{30.81}$$

и

$$|b_1 + \ldots + b_i| \leqslant B, \quad b_i \in \boldsymbol{C}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{30.82}$$

то

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant B(|a_1| + 2|a_n|). \tag{30.83}$$

Доказательство. Согласно условиям (30.80) или (30.81), все разности $a_i - a_{i+1}$ в формуле (30.79) одного знака, поэтому, в силу этой формулы и условия (30.82), имеем

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_{i-1}|\,|B_i| + |a_n|\,|B_n| \leqslant B\left(\left|\sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1})\right| + |a_n|\right) =$$
$$= B(|a_1 - a_n| + |a_n|) \leqslant B(|a_1| + 2|a_n|). \square$$

Важно обратить внимание на то, что в неравенстве Абеля оценка рассматриваемой суммы дается через первый и последний ее члены и не зависит от числа слагаемых в этой сумме.

ТЕОРЕМА 18 (признак Дирихле). *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{30.84}$$

такой, что последовательность $\{a_n\}$ *монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм* $\{B_n\}$ *ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n \in \boldsymbol{C}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ограничена; тогда ряд (30.84) *сходится.*

---

* Из этих неравенств следует, что числа a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, действительны.

Доказательство. В силу ограниченности последовательности $\{B_n\}$, существует такое число $B > 0$, что $|B_n| \leqslant B$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что для любого $n = 2, 3, \ldots$ и любого целого $p \geqslant 0$

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p} b_i\right| = |B_{n+p} - B_{n-1}| \leqslant |B_{n+p}| + |B_{n-1}| \leqslant 2B. \qquad (30.85)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ следует существование такого номера n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}. \qquad (30.86)$$

Теперь, применив неравенство Абеля (30.83) к сумме $\sum\limits_{i=1}^{n+p} a_i b_i$, где $n > n_\varepsilon$, и приняв во внимание неравенства (30.85) и (30.86), получим

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p} a_i b_i\right| \leqslant 2B(|a_n| + 2|a_{n+p}|) < \varepsilon,$$

отсюда, согласно критерию Коши, и следует, что ряд (30.84) сходится. □

В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}. \qquad (30.87)$$

Прежде всего, если $\alpha \neq 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin k\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\,\sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

и, следовательно, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\alpha\right| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$.

Если же $\alpha = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то все члены сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\alpha$ равны нулю, поэтому эти суммы при любом n равны нулю и, следовательно, ограничены. Таким образом, при всех α суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\alpha$ ограничены.

С другой стороны, последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ монотонно убывает и стремится к нулю, поэтому, по признаку Дирихле, ряд (30.87) сходится при любом α.

Аналогично ряду (30.87) исследуется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n}. \tag{30.88}$$

Так как при $\alpha \neq 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos k\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha\right] =$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \tag{30.89}$$

то для указанных α выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$$

и, следовательно, по принципу Дирихле, ряд (30.88) сходится при всех $\alpha \neq 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Если же $\alpha = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то ряд (30.88) в отличие от ряда (30.87) расходится, так как он превращается в гармонический ряд.

Заметим, что признак Лейбница (см. п. 30.9) следует из признака Дирихле. Действительно, если в ряде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \tag{30.90}$$

где $a_n \geqslant a_{n+1} > 0$, положить $b_n = (-1)^n$, то, очевидно, суммы $b_1 + \ldots + b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, равны нулю или единице и поэтому ограничены и, значит, по признаку Дирихле, ряд (30.90) сходится.

Из неравенства Абеля (30.83) можно получить еще один признак сходимости ряда.

ТЕОРЕМА 19 (признак Абеля). *Если последовательность* $\{a_n\}$ *монотонна и ограничена, а ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n \in \boldsymbol{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, *сходится, то ряд* (30.84) *также сходится.*

Доказательство. В силу ограниченности последовательности $\{a_n\}$ существует такое $M > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $|a_n| \leqslant M$.

Пусть теперь задано $\varepsilon > 0$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует существование такого номера n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ и всех целых $p \geqslant 0$ выполняется неравенство $\left|\sum\limits_{i=n}^{n+p} b_i\right| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Поэтому для всех номеров $n > n_\varepsilon$ и всех целых $p \geqslant 0$, согласно лемме 4, справедливо неравенство

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p} a_i b_i\right| < \frac{\varepsilon}{3M}(|a_n| + 2|a_{n+p}|) \leqslant \varepsilon.$$

В силу критерия Коши сходимости рядов, это означает, что ряд (30.84) сходится. □

Отметим, что теорема 19 может быть получена и из теоремы 18. Действительно, если выполнены условия теоремы 19, то, в силу монотонности и ограниченности последовательности $\{a_n\}$, существует конечный предел $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ и, следовательно, последовательность $c_n = a_n - a$, $n = 1, 2, \ldots$, монотонно стремится к нулю. Последовательность же частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничена, так как этот ряд, по условию, сходится. Поэтому, согласно теореме 18, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n b_n$ сходится. Но $c_n b_n = a_n b_n - a b_n$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a b_n = a \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится. Следовательно, как сумма двух сходящихся рядов сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n + a \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Пример. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \cos \frac{\pi}{n}}{\ln \ln n}. \qquad (30.91)$$

Заметим, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln \ln n}$ сходится согласно признаку Дирихле: последовательность $\frac{1}{\ln \ln n}$ монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sin n\alpha$ ограничена (см. предыдущий пример). Последовательность же $\cos \frac{\pi}{n}$, $n = 2, 3, \ldots$, монотонна, поэтому, по признаку Абеля, ряд (30.91) сходится при всех α.

30.14*. Асимптотическое поведение остатков сходящихся рядов и частичных сумм расходящихся рядов

Подобно несобственным интегралам, для рядов бывает нужно ответить не только на вопрос об их сходимости, но в случае сходимости ряда оценить ее скорость, а в случае расходимости выяснить характер поведения его частичных сумм при возрастании их номера.

В случае рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, где f — неотрицательная убывающая функция, на подобные вопросы иногда удается получить ответы с помощью метода, примененного при доказательстве интегрального признака сходимости рядов (см. п. 30.7). Действительно, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, следовательно, сходится и интеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, то, обозначив, как обычно, через r_n остаток рассматриваемого ряда, получим неравенство

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_n^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (30.92)$$

Это и есть искомая оценка остатка ряда, показывающая, что при $n \to \infty$ этот остаток убывает не медленнее, чем интеграл $\int_n^{+\infty} f(x)\,dx$.

Аналогично получается и оценка снизу для остатка ряда:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \geqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx = \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx. \qquad (30.93)$$

Если $f(x)$ — неотрицательная убывающая функция при $x \geqslant 1$, то можно получить полезные оценки для частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, не зависящие от того, сходится этот ряд или нет (следовательно, и не зависящие от того, сходится или расходится интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$).

Заметив, что

$$0 \leqslant f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k) - f(k+1),$$

и просуммировав эти неравенства по k от 1 до n, получим

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(1) - f(n+1) < f(1).$$

Из приведенных неравенств следует, что последовательность

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

монотонно возрастает и ограничена сверху, поэтому стремится к конечному пределу. Иначе говоря, существует такая постоянная c, что

$$\lim_{n \to \infty} \left[\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx \right] = c. \tag{30.94}$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx + c + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{30.95}$$

где $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$. Оно показывает, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится, то его частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ с точностью до бесконечно малой последовательности растут так же, как $\int\limits_{1}^{n+1} f(x)\,dx + c$, где c — некоторая постоянная. Отсюда следует, что частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ и интеграл $\int\limits_{1}^{n+1} f(x)\,dx$ асимптотически равны при $n \to \infty$, т. е. их отношение стремится к единице при $n \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \sim \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx, \quad n \to \infty.$$

Примеры. 1. Рассмотрим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{1}{n}$, который, полагая $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geqslant 1$, запишем в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Функция $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geqslant 1$, удовлетворяет условиям теоремы 10, и, поскольку $\int\limits_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$, из доказанного следует, что существует такая постоянная C, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln(n+1) + C + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$. Эта постоянная C называется *постоянной Эйлера*. Замечая, что $\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 0$ при $n \to \infty$,

в полученной формуле можно заменить $\ln(n+1)$ на $\ln n$ (при этом, конечно, изменится и последовательность ε_n, но она останется бесконечно малой последовательностью):

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots . \quad (30.96)$$

Любопытно заметить, что до сих пор не удается выяснить природу эйлеровой постоянной в том смысле, что неизвестно даже, является ли она рациональным числом или нет.

Из формулы (30.96), очевидно, следует асимптотическое равенство

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \sim \ln n, \quad n \to \infty.$$

2. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Возьмем функцию $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $x \geqslant 1$; тогда

$$\int\limits_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha}.$$

Из формул (30.94) и (30.95) для данного случая следует, что существует такая постоянная c_α, что

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} + c_\alpha + \varepsilon_n,$$

где $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$. Отсюда получаем асимптотическое равенство

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

3. Рассмотрим сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$.

Взяв снова в качестве функции f функцию $\frac{1}{x^\alpha}$ и замечая, что

$$\int\limits_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha - 1}},$$

в силу формул (30.92) и (30.93), получаем

$$\frac{1}{(\alpha - 1)(n+1)^{\alpha - 1}} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha - 1}},$$

откуда

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha - 1}}.$$

4. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \quad (30.97)$$

Мы уже знаем, что этот ряд сходится и что его предел равен числу e (см. пример 6 в п. 4.9):

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{30.98}$$

Оценим остаток r_n этого ряда:

$$0 \leqslant r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n!(n+1)^2} < \frac{1}{n!n}. \tag{30.99}$$

Следовательно, если s_n — частичная сумма ряда (30.98), то

$$e = s_n + r_n \tag{30.100}$$

и, в силу неравенства (30.99), справедлива следующая оценка погрешности при замене e на s_n:

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}.$$

Таким образом, число e можно приближенно вычислять в виде суммы

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

причем полученная оценка указывает точность получающихся приближений.

Замечание. Если положить $\theta_n \overset{\text{def}}{=} r_n n!n$, то из (30.99) получим $0 < \theta_n < 1$ и, следовательно, в силу формулы (30.100),

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}, \quad 0 < \theta_n < 1, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{30.101}$$

Отсюда легко следует, что число e является иррациональным. Действительно, если бы e было рациональным числом: $e = \frac{m}{n}$, $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$, то, в силу (30.101), было бы справедливо равенство

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n},$$

откуда

$$n!m - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)n!n = \theta_n.$$

Но это равенство невозможно, так как слева стоит целое число, а справа θ_n, где $0 < \theta_n < 1$. □

30.15. О суммируемости рядов методом средних арифметических

Иногда представляет интерес изучение расходящихся рядов, т. е. рядов, частичные суммы которых не стремятся к конечному пределу. Как было уже показано, подобные ряды дают возможность получать асимптотические формулы (см. п. 30.14*, а также далее п. 33.10*). Изучение расходящихся рядов целесообразно, в частности, в том случае, когда для них удается определить надлежащим способом понятие суммы. Различные методы определения сумм рядов называются *методами суммирования рядов*. Метод суммирования ряда называется регулярным, если для сходящегося ряда его сумма, определенная по этому методу, совпадает с обычной его суммой (в этом случае говорят: регулярный метод суммирует сходящийся ряд к его сумме).

Рассмотрим метод суммирования ряда средними арифметическими его частичных сумм. Пусть дан ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

и пусть

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad n = 1, 2, \ldots, —$$

последовательность его частичных сумм. Обозначим через σ_n среднее арифметическое первых n членов этой последовательности:

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}.$$

Определение 5. *Ряд называется суммируемым методом средних арифметических к числу* σ, *если последовательность* $\{\sigma_n\}$ *средних арифметических его частичных сумм сходится к* σ:

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sigma.$$

Метод суммирования средними арифметическими является регулярным методом суммирования, так как из того, что некоторая последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, следует, что последовательность, составленная из средних арифметических первых ее n членов:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

имеет тот же предел (см. пример 5 в п. 4.1).

С другой стороны, существуют расходящиеся ряды, которые суммируются методом средних арифметических. Таким примером является ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots . \tag{30.102}$$

В этом случае $s_{2k} = 0$, $s_{2k-1} = 1$, $\sigma_{2k} = \frac{1}{2}$, $\sigma_{2k-1} = \frac{k}{2k-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$, т. е. ряд (30.102) суммируется методом средних арифметических.

С применением суммирования рядов методом средних арифметических мы встретимся в п. 55.6.

Задача 2 (признак Дюбуа—Реймона сходимости ряда). Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (a_n и b_n — комплексные числа) сходится, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ абсолютно сходится.

Задача 3 (признак Дедекинда сходимости ряда). Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (a_n и b_n — комплексные числа) сходится, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ абсолютно сходится, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ и частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены.

§ 31
Бесконечные произведения

31.1. Основные определения. Простейшие свойства бесконечных произведений

Аналитическое выражение, имеющее вид произведения бесконечного множества сомножителей, называется *бесконечным произведением*. Дадим более детальное и строгое определение этого понятия.

Определение 1. *Пара последовательностей комплексных чисел $\{a_n\}$ и $\{p_n\}$, где*

$$p_n = a_1 a_2 \dots a_n, \quad n = 1, 2, \dots , \tag{31.1}$$

называется бесконечным произведением и обозначается

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{31.2}$$

Члены последовательности $\{a_n\}$ *называются сомножителями бесконечного произведения* (31.2), *а члены последовательности* $\{p_n\}$ — *его частичными произведениями* (*порядка* n).

Если последовательность частичных произведений $\{p_n\}$ имеет конечный или определенного знака бесконечный предел p:

$$p = \lim_{n \to \infty} p_n = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} a_k, \tag{31.3}$$

то этот предел называют *значением бесконечного произведения* (31.2) и пишут

$$p = a_1 a_2 \ldots a_n \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Таким образом, аналогично случаю ряда, здесь одним и тем же символом обозначают как само бесконечное произведение, так и его значение, если оно существует.

Если хотя бы один из сомножителей бесконечного произведения равен нулю, то и значение этого бесконечного произведения равно нулю: $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 0$. Поэтому естественно предполагать, что все сомножители рассматриваемых бесконечных произведений отличны от нуля. Это всегда и будем делать, не оговаривая специально, в дальнейшем.

Для таких бесконечных произведений можно построить теорию, аналогичную теории сходящихся рядов. Этим оправдывается следующее определение.

Определение 2. *Бесконечное произведение называется сходящимся, если оно имеет конечное значение*, *отличное от нуля.*

В противном случае бесконечное произведение называется *расходящимся*. Таким образом, бесконечное произведение называется расходящимся, если предел последовательности его частичных произведений либо равен нулю, либо $\pm\infty$, либо не существует. В частности, если

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = 0,$$

то произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *расходящимся к нулю*.

Примеры. 1. Бесконечное произведение $1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \ldots$ сходится, и его значение равно 1.

2. Бесконечное произведение $(-1)(-1)\ \ldots\ (-1)\ \ldots$ расходится, так как для него $p_n = (-1)^n$, а последовательность $\{(-1)^n\}$ не имеет предела.

3. Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ расходится, так как $p_n = n + 1$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$.

4. Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ расходится к нулю, так как здесь $p_n = 1/n$.

5. Для бесконечного произведения $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ имеем

$$p_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) =$$
$$= \frac{1\cdot 3}{2^2}\frac{2\cdot 4}{3^2}\ \ldots\ \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}$, т. е. бесконечное произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ сходится и его значение равно $1/2$.

6. Формулу Валлиса (см. пример 1 в п. 26.2)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

можно рассматривать как разложение числа $\pi/2$ в бесконечное произведение:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\ \ldots\ \frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1}\ \ldots\ .$$

7. Покажем, что бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}$$

сходится, и найдем его значение. Имеем

$$p_n = \frac{e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}{n+1} = \frac{e^{\ln n + C + \varepsilon_n}}{n+1} = \frac{n}{n+1}e^C e^{\varepsilon_n},$$

где C — постоянная Эйлера (см. п. 30.14*), а $\{\varepsilon_n\}$ — бесконечно малая последовательность, поэтому

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} p_n = e^C.$$

Если в бесконечном произведении (31.2) отбросить первые n сомножителей, то получившееся бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_{n+k} \tag{31.4}$$

называется *n-м остаточным произведением*.

Отметим простейшие свойства бесконечных произведений.

1^0. *Если бесконечное произведение сходится, то и все его остаточные произведения сходятся.*

Если какое-либо остаточное произведение сходится, то и само бесконечное произведение сходится.

Эти утверждения легко доказываются аналогично соответствующей теореме об остатках ряда (см. п. 30.2).

Таким образом, для бесконечного произведения как отбрасывание конечного множества первых сомножителей, так и присоединение конечного множества отличных от нуля первых сомножителей не влияют на его сходимость.

УПРАЖНЕНИЯ 1. Доказать, что как отбрасывание конечного множества сомножителей, не обязательно первых, бесконечного произведения, так и добавление конечного множества отличных от нуля сомножителей не влияют на его сходимость.

2^0. *Если бесконечное произведение* (31.2) *сходится, то последовательность его остаточных произведений*

$$q_n = \prod_{k=1}^{\infty} a_{n+k} \tag{31.5}$$

имеет пределом единицу:

$$\lim_{n\to\infty} q_n = 1. \tag{31.6}$$

Доказательство. Если

$$\prod_{n=1}^{\infty} q_n = p, \tag{31.7}$$

то

$$q_n \underset{(31.5)}{=} \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} a_{n+k} = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k} \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{n+m} a_k \underset{\substack{(31.7)\\(31.1)}}{=} \frac{p}{p_n}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} p_n \underset{(31.7)}{=} p \neq 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \frac{p}{p_n} = \frac{p}{p} = 1. \square$$

3^0 **(необходимое условие сходимости бесконечного произведения).** *Если бесконечное произведение* (31.2) *сходится, то последовательность его сомножителей стремится к единице*:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1. \tag{31.8}$$

Доказательство. В самом деле, $a_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$, $n = 2, 3, \ldots$, поэтому

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{p}{p} = 1. \square$$

Отметим, что выполнение условия (31.8), т. е. стремление последовательности сомножителей бесконечного произведения к единице, недостаточно для его сходимости. Это видно, например, из рассмотренных выше примеров 3 и 4, в которых у расходящихся бесконечных произведений последовательности сомножителей стремятся к единице.

31.2. Критерий Коши сходимости бесконечных произведений

Установим необходимые и достаточные условия сходимости бесконечных произведений.

ТЕОРЕМА 1 (критерий Коши). *Для того чтобы бесконечное произведение* (31.2) *сходилось, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашлось такое* n_0, *что для всех* $n > n_0$ *и всех* $m \geqslant 0$ *выполняется неравенство*

$$\left| \frac{p_{n+m}}{p_n} - 1 \right| < \varepsilon. \tag{31.9}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть бесконечное произведение (31.2) сходится, и, следовательно, не равно нулю: $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} p_n = p \neq 0$.

Поэтому существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|p_n| > \frac{|p|}{2} > 0$, т. е. последовательность $|p_{n_0+k}|$, $k = 1, 2, \ldots$, ограничена снизу, а так как все сомножители $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то и вся последовательность $\{|p_n|\}$ ограничена снизу положительной постоянной: существует такое число $c > 0$, что

$$|p_n| > c, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{31.10}$$

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Из сходимости последовательности $\{p_n\}$, согласно критерию Коши для последовательности, следует, что найдется такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ и всех $m \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$|p_{n+m} - p_n| < c\varepsilon, \tag{31.11}$$

тогда

$$\left|\frac{p_{n+m}}{p_n} - 1\right| = \frac{1}{|p_n|}|p_{n+m} - p_n| \underset{\substack{(31.10)\\(31.11)}}{<} \frac{1}{c}c\varepsilon = \varepsilon,$$

т. е. выполнено условие (31.9).

Достаточность. Пусть выполнено условие (31.9). Тогда для $\varepsilon = 1$ существует такой номер n_1, что для всех $m \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{p_{n_1+m}}{p_{n_1}} - 1\right| < 1,$$

откуда

$$|p_{n_1+m}| = \left|\frac{p_{n_1+m}}{p_{n_1}} - 1 + 1\right||p_{n_1}| \leqslant \left|\frac{p_{n_1+m}}{p_{n_1}} - 1\right||p_{n_1}| + |p_{n_1}| \leqslant 2|p_{n_1}|,$$

и, следовательно, последовательность $\{p_n\}$ ограничена, т. е. существует такое $c > 0$, что

$$|p_n| \leqslant c, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{31.12}$$

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. В силу условия теоремы, найдется такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ и всех $m \geqslant 0$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{p_{n+m}}{p_n} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{c}, \tag{31.13}$$

т. е.

$$|p_{n+m} - p_n| \underset{(31.13)}{<} \frac{\varepsilon}{c}|p_n| \underset{(32.12)}{\leqslant} \varepsilon.$$

Это означает, что числовая последовательность $\{p_n\}$ удовлетворяет критерию Коши сходимости числовых последовательностей и, следовательно, сходится.

Покажем, что ее предел $p = \lim\limits_{n \to \infty} p_n$ не равен нулю. Если бы он был равен нулю, то, перейдя к пределу в неравенстве (31.13) при $m \to \infty$ (n фиксировано), мы получили бы неравенство $1 \leqslant \frac{\varepsilon}{c}$, что противоречит произвольному выбору $\varepsilon > 0$. □

31.3. Бесконечные произведения с действительными сомножителями

До сих пор все доказанные для бесконечных произведений теоремы были справедливы независимо от того, являлись ли их сомножители комплексными или только действительными

числами. Перейдем теперь к изучению бесконечных произведений, сомножители которых являются только действительными числами. В этом случае из необходимого условия сходимости (31.8) бесконечного произведения (31.2) следует, что все его сомножители начиная с некоторого номера положительны. Согласно же свойству 1^0 п. 31.1, отбрасывание конечного множества сомножителей не влияет на сходимость бесконечного произведения, поэтому дополнительное предположение о том, что все сомножители бесконечного произведения положительны, не будет ограничивать общности изучения сходимости бесконечных произведений с действительными сомножителями.

Взаимно обратную связь между бесконечными произведениями с положительными сомножителями и рядами устанавливает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы бесконечное произведение*

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{31.14}$$

сходилось, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n. \tag{31.15}$$

Если при сходимости ряда (31.15) *число s является его суммой, а число p — значением бесконечного произведения* (31.14), *то*

$$p = e^s. \tag{31.16}$$

Доказательство. В самом деле, если s_n — частичная сумма порядка n для ряда (31.15), а p_n — частичное произведение того же порядка для бесконечного произведения (31.14), то

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln a_k = \ln \prod_{k=1}^{n} a_k = \ln p_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

следовательно, $p_n = e^{s_n}$. Перейдя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим формулу (31.16). □

При исследовании бесконечного произведения (31.2) часто бывает удобным его сомножители a_n представлять в виде

$$a_n = 1 + u_n, \ n = 1, 2, \dots .$$

В случае сходящегося бесконечного произведения (31.2), в силу его свойства 3^0 (см. п. 31.1), последовательность $\{u_n\}$ является бесконечно малой.

ТЕОРЕМА 3. *Если все* u_n, $n = 1, 2, \ldots$, *знакопостоянны* (*т. е. все* $u_n \geqslant 0$ *или все* $u_n \leqslant 0$), *то, для того чтобы сходилось бесконечное произведение*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n), \tag{31.17}$$

необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{31.18}$$

Доказательство. Согласно необходимому условию сходимости бесконечного произведения (см. свойство 3^0 в п. 31.1) и необходимому условию сходимости ряда (теорема 1 в п. 30.1), из сходимости бесконечного произведения (31.17), так же, как и из сходимости ряда (31.18), следует, что

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0. \tag{31.19}$$

Поэтому будем предполагать это условие выполненным.

Сходимость бесконечного произведения (31.17), согласно теореме 1, равносильна сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln (1 + u_n). \tag{31.20}$$

В силу же (31.19), имеет место эквивалентность

$$\ln (1 + u_n) \sim u_n, \quad n \to \infty,$$

и так как все u_n одного знака, то, согласно признаку сравнения рядов (см. следствие теоремы 6 в п. 30.4), ряд (31.20) сходится и расходится одновременно с рядом (31.18)). □

Отметим, что нами уже было непосредственно и очень просто показано, что бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ расходится (см. пример 3 в п. 31.1). Из этого утверждения, в силу теоремы 3, следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, — еще одно доказательство расходимости гармонического ряда.

В случае знакопеременных u_n имеет место следующее достаточное условие сходимости ряда (31.17).

ТЕОРЕМА 4. *Если сходятся ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2, \tag{31.21}$$

то бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ *сходится.*

Доказательство. Прежде всего из сходимости рядов (31.21) следует выполнение условия (31.19). Тогда, согласно формуле Тейлора,

$$\ln(1 + u_n) = u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + o(u_n^2), \quad n \to \infty,$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n - \ln(1 + u_n)}{u_n^2} = \frac{1}{2}.$$

Из этого равенства, согласно признаку сравнения рядов, явствует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n - \ln(1 + u_n) \tag{31.22}$$

сходится, так как, по условию, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$. По условию, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, поэтому из сходимости ряда (31.22) следует и сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 + u_n)$, что, в силу теоремы 2, означает сходимость бесконечного произведения (31.17). □

Примеры. 1. Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^x}\right), \quad x > 0,$$

сходится при $x > 1$ и расходится при $x \leqslant 1$. Согласно теореме 3, это следует из того, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ сходится при $x > 1$ и расходится при $x \leqslant 1$.

2. Имеет место равенство Эйлера

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n) = \frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1})}, \quad 0 < q < 1.$$

Произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + q^n)$ и $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1})$ сходятся, так как сходятся соответственно ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{2n-1}$ (см. теорему 3). Заметим еще, что в силу аналогичных соображений сходится и бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})$, следовательно, в силу критерия Коши сходимости бесконечных произведений, выполняется условие

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{k=n+1}^{2n} (1 - q^{2k}) = 1. \tag{31.23}$$

Теперь имеем

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{2n}(1+q^k) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{2n}\frac{1-q^{2k}}{1-q^k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\prod\limits_{k=n+1}^{2n}(1-q^{2k})}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-q^{2k-1})} \underset{(35.23)}{=} \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}.$$

УПРАЖНЕНИЯ. 2. Доказать, что, для того чтобы $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 0$, $a_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n = -\infty.$$

3. Доказать, что если $u_n < 0$, $n = 1, 2, \dots$, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = -\infty$, то $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n) = 0$.

4. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ расходится, то $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n) = 0$.

5. Построить пример сходящегося бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$, у которого ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

6. Построить пример сходящегося бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$, у которого оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ расходятся.

31.4. Абсолютно сходящиеся бесконечные произведения

Вернемся снова к изучению бесконечных произведений, вообще говоря, с комплексными сомножителями. Подобно рядам для бесконечных произведений вводится понятие абсолютной сходимости.

Определение 3. *Бесконечное произведение*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n) \tag{31.24}$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|u_n|). \tag{31.25}$$

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы бесконечное произведение* (31.24) *абсолютно сходилось, необходимо и достаточно, чтобы сходился знакопостоянный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + |u_n|), \tag{31.26}$$

а также необходимо и достаточно, чтобы абсолютно сходился каждый из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + u_n) \tag{31.27}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{31.28}$$

Доказательство. Равносильность сходимости бесконечного произведения (31.24) и ряда (31.26) сразу следует из определения абсолютной сходимости бесконечного произведения и из теоремы 3.

Из сходимости каждого из рядов (31.26), (31.27) и (31.28) следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$, а при выполнении этого условия имеет место эквивалентность

$$\ln(1 + |u_n|) \sim |u_n| \sim |\ln(1 + u_n)|, \quad n \to \infty.$$

Поэтому все ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + |u_n|), \quad \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\ln(1 + u_n)|$$

одновременно сходятся или расходятся. Это и означает, что сходимость ряда (31.26) равносильна абсолютной сходимости каждого из рядов (31.27) и (31.28). □

Замечание. Если сходится бесконечное произведение (31.24), то сходится и бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + u_n}, \tag{31.29}$$

причем

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + u_n} = \frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)}.$$

Это следует из того, что если p_n, $n = 1, 2, \ldots$, является частичным произведением порядка n бесконечного произведения (31.24), то обратная величина $1/p_n$ является частичным

произведением того же порядка бесконечного произведения (31.29).

Бесконечные произведения (31.24) и (31.29) одновременно сходятся абсолютно или нет, так как абсолютная сходимость и того и другого произведения равносильна абсолютной сходимости ряда (31.27).

ТЕОРЕМА 6. *Из абсолютной сходимости бесконечного произведения следует его сходимость.*

Доказательство. Если бесконечное произведение (31.24) абсолютно сходится, то, согласно теореме 5, сходится, и даже абсолютно, ряд (31.27), что, согласно теореме 2, равносильно сходимости бесконечного произведения (31.24). □

ТЕОРЕМА 7. *Значение абсолютно сходящегося произведения не зависит от порядка сомножителей.*

Это сразу следует из формулы (31.16), ибо если бесконечное произведение (31.24) абсолютно сходится, то абсолютно сходится и ряд (31.15) (он совпадает с рядом (31.27)), а следовательно, его сумма s не зависит от порядка слагаемых. □

Если бесконечное произведение сходится, но не абсолютно, то его значение зависит от порядка сомножителей. В этом легко убедиться, сведя тем же методом, что и при доказательстве теоремы 7, рассмотрение бесконечных произведений к соответствующим рядам.

Пример. Выясним, при каких x сходится, абсолютно сходится и расходится бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right).$$

При $x > 1$ это произведение абсолютно сходится, так как сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$. При $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$ оно сходится, но не абсолютно, ибо сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2x}}$ (см. теорему 4).

Наконец, при $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$ оно расходится к нулю, поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2x}}$ расходится (см. упражнение 4).

31.5*. Дзета-функция Римана и простые числа

Функция

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \tag{31.30}$$

определенная этой формулой для $x > 1$ (см. п. 30.3), как известно, называется дзета-функцией Римана. Она играет большую роль во многих вопросах математического анализа.

Докажем, что для нее имеется следующее разложение в бесконечное произведение:

$$\zeta(x) = \prod_k \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^x}}, \tag{31.31}$$

где произведение берется по всем простым числам p_k, $k = 1, 2, \ldots$, взятым в порядке возрастания (впрочем, как это будет показано ниже, это бесконечное произведение сходится абсолютно и поэтому не зависит от порядка сомножителей). Отметим, что во всех проводимых ниже рассуждениях не будет предполагаться, что простых чисел бесконечно много (т. е. все сказанное верно и в случае, если произведение (31.31) было бы конечно, а не бесконечно). Бесконечность множества простых чисел будет отдельно доказана в конце этого раздела.

Так как

$$\prod_k \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^x}} = \frac{1}{\prod_k \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)}$$

и ряд $\sum_k \frac{1}{p_k^x}$ при $x > 1$ сходится (это следует из сходимости ряда (31.30) при $x > 1$), то, согласно теореме 5, абсолютно сходится бесконечное произведение $\prod_k \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)$, следовательно, и произведение (31.31) (см. замечание после теоремы 5).

По формуле для суммы геометрической прогрессии имеем

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^x}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(p_k^m)^x}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{31.32}$$

где ряды в правых частях равенств, очевидно, абсолютно сходятся. Зафиксируем некоторое натуральное число N и перем-

ножим равенства (31.32), отвечающие всем простым числам $p_1, p_2, \ldots$, не превышающим N; тогда

$$P_N(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{p_k \leqslant N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}} \underset{(31.32)}{=} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{\infty}{}^{*} \frac{1}{n^x}, \quad (31.33)$$

где знак «звездочка» у суммы означает, что суммирование распространяется только на те натуральные числа $n \geqslant N+1$, в разложении которых на простые множители участвуют только простые числа $p_k \leqslant N$ и которые получаются при умножении отобранных рядов (31.32). Этими двумя свойствами заведомо обладают все натуральные числа $1, 2, \ldots, N$.

Так как

$$0 < P_N(x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \underset{(31.33)}{=} \sum_{n=N+1}^{\infty}{}^{*} \frac{1}{n^x} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad (31.34)$$

и ряд (31.30) сходится, следовательно,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 0,$$

то

$$\zeta(x) \underset{(31.30)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \underset{(31.34)}{=} \lim_{N\to\infty} P_N(x) \underset{(31.33)}{=} \prod_k \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}},$$

т. е. представление (31.31) доказано.

Заметим, что при $x = 1$ равенство (31.33) (в его правой части стоит конечная сумма) остается верным, поэтому

$$p_N(1) \underset{(31.33)}{=} \prod_{p_k \leqslant N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + \sum_{n=N+1}^{\infty}{}^{*} \frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n},$$

а так как гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty$ и, следовательно,

$$\prod_k \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} = +\infty. \quad (31.35)$$

Из этого равенства следует, что простых чисел бесконечно много, так как если бы их было конечное множество, то произведение $\prod\limits_k \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$ было бы конечным. Это доказательство бесконечности простых чисел было дано еще Эйлером.

Из равенства (31.35) следует больше, чем просто констатация того, что множество простых чисел бесконечно. Этот факт можно установить и более простым способом. В самом деле, допустим, что простых чисел конечное множество $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда число $n = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ больше каждого из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и, следовательно, не равно никакому из них, а вместе с тем оно простое: если бы оно было не простым, то оно делилось бы на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, так как, по предположению, других простых чисел нет. Но это не так: число n не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ибо при делении его на любое из них остаток от деления равен 1.

Запишем равенство (31.35) в виде

$$\prod_k \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = 0.$$

Из него, согласно теореме 3, следует, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \tag{31.36}$$

расходится. Это утверждение сильнее утверждения о том, что гармонический ряд расходится, так как здесь идет речь лишь о некоторых его членах. Расходимость ряда (31.36) содержит информацию о росте простых чисел p_k при $k \to \infty$.

§ 32

Функциональные последовательности и ряды

32.1. Сходимость функциональных последовательностей и рядов

В настоящем параграфе будут рассматриваться последовательности и ряды, членами которых являются некоторые, вообще говоря, комплекснозначные функции, т. е. последовательности

$$f_n(x) \in \boldsymbol{C}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{32.1}$$

и соответственно ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad u_n(x) \in \boldsymbol{C}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{32.2}$$

При каждом фиксированном значении аргумента x эти последовательности и ряды, очевидно, представляют собой уже рассматривавшиеся числовые последовательности и ряды.

Пусть X — некоторое множество элементов, в частности множество точек прямой, плоскости, пространства или вообще элементов произвольной природы, и пусть (32.1) — последовательность функций, которые определены на множестве X и значениями которых являются, вообще говоря, комплексные числа.

Определение 1. *Последовательность* (32.1) *называется ограниченной на множестве X, если существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in X$ и всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства*

$$|f_n(x)| \leqslant M.$$

(Иногда в этом случае последовательность (32.1) называют также *равномерно ограниченной*.)

Определение 2. *Последовательность* (32.1) *называется убывающей* (*возрастающей*) *на множестве X, если для всех $x \in X$ и всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства*

$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$$

(*соответственно если для всех $x \in X$ и всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства*

$$f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)).$$

Это определение, очевидно, предполагает, что функции $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, принимают действительные значения.

Определение 3. *Последовательность* (32.1) *называется сходящейся в точке** $x_0 \in X$, *если числовая последовательность* $\{f_n(x_0)\}$ *сходится.*

Последовательность (32.1) *называется сходящейся на множестве X, если она сходится в каждой точке множества X. Если $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, то говорят, что последовательность* (32.1) *на множестве X сходится к функции $f(x)$, $x \in X$.*

Аналогичные определения можно дать и для ряда (32.2).

Определение 4. *Ряд* (32.2) *называется сходящимся в точке* $x_0 \in X$, *если сходится числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Ряд (32.2) *называется сходящимся на множестве X, если он сходится в каждой точке этого множества.*

---

* Мы называем элементы множества X точками.

Определение 5. *Ряд* (32.2) *называется абсолютно сходящимся на множестве* X, *если на множестве* X *сходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

Подобно случаю числовых рядов, сумма

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

называется *n-й частичной суммой* ряда (31.2); предел частичных сумм сходящегося на множестве X ряда (32.2) называется его *суммой* $s(x)$:

$$s(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x).$$

При этом пишут

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

и говорят, что функция $s(x)$ раскладывается в ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Ряд

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \qquad (32.3)$$

называется *n-м остатком ряда* (32.2). Остаток ряда сходится на X тогда и только тогда, когда на X сходится сам ряд (32.2). Если в этом случае сумму остатка ряда обозначить через $r_n(x)$, то

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x).$$

Как и в случае числовых рядов, согласно определению, каждый функциональный ряд является парой последовательностей $\{u_n(x)\}$ и $\{s_n(x)\}$, где $u_n(x)$ — его члены, а $s_n(x)$ — частичные суммы:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

При этом для каждой функциональной последовательности (32.1) существует ряд (32.2), для которого она является последовательностью его частичных сумм. Члены этого ряда определяются однозначно:

$$u_1(x) = f_1(x), \quad u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Поэтому всякую теорему, доказанную для функциональных рядов, можно перефразировать в соответствующую теорему для функциональных последовательностей, и наоборот. Это обстоятельство неоднократно будет использоваться в дальнейшем.

Примеры. 1. Пусть дан ряд

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \qquad (32.4)$$

где z — комплексное число. Исследуем его абсолютную сходимость, т. е. сходимость ряда с n-м членом $u_n = \frac{|z|^n}{n!}$. Применив признак Даламбера, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$$

при любом комплексном z. Таким образом, ряд (32.4) абсолютно, а значит, и просто сходится при любом комплексном z, или, как обычно говорят, на всей комплексной плоскости.

2. Изучим сходимость ряда

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots, \qquad (32.5)$$

где x — действительное число. Этот ряд сходится при всех x. Действительно, если $x \neq 0$, то имеем сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{1+x^2}$, $0 < q < 1$. В этом случае сумма $s(x)$ ряда (32.5) легко вычисляется:

$$s(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Если же $x = 0$, то все члены ряда (32.5) равны нулю, поэтому он, очевидно, сходится и $s(0) = 0$.

Таким образом,

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x = 0, \\ 1 + x^2 & \text{для } x \neq 0. \end{cases}$$

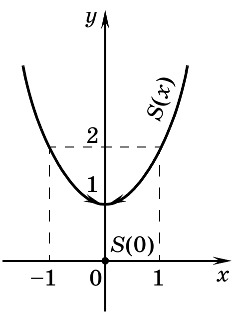


Рис. 3

График функции $s(x)$ изображен на рис. 3.

Как видно, несмотря на то что все члены ряда (32.5) — непрерывные функции и ряд сходится во всех точках действительной оси, его сумма является разрывной функцией. Следовательно, в случае сходящегося ряда (32.2), члены которого непрерывные действительные функции $u_n(x)$, его сумма $s(x)$, вообще говоря, не является непрерывной, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} s(x) \neq s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

или, что то же,

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u(x) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x).$$

Таким образом, предел суммы бесконечного числа слагаемых не обязательно равен сумме их пределов.

Рассмотренный ряд (32.5) показывает, как при предельных процессах (суммирование геометрической прогрессии) из простых непрерывных функций образуются функции значительно более сложной природы — разрывные функции.

В дальнейшем будут выяснены условия, при которых можно гарантировать непрерывность суммы сходящегося ряда непрерывных функций.

32.2. Равномерная сходимость функциональных последовательностей

Определение 6. *Пусть заданы последовательность функций* (32.1) *и функция* f, *определенные на множестве* X. *Будем говорить, что указанная последовательность сходится к функции* f *равномерно на множестве* X, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* n_ε, *что если* $n > n_\varepsilon$, *то для всех* $x \in X$ *выполняется неравенство*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{32.6}$$

Последовательность (32.1) *называется равномерно сходящейся на множестве* X, *если существует функция* f, *к которой она равномерно сходится на* X.

Очевидно, что если последовательность (32.1) равномерно сходится к функции f на множестве X, то она и просто сходится к этой функции на X.

Если последовательность $\{f_n\}$ сходится на множестве X к функции f, то символически будем записывать это следующим образом: $f_n \underset{X}{\to} f$.

Если же эта последовательность равномерно сходится на X к функции f, то будем писать $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$.

Заметим, что если последовательность (32.1) просто сходится к функции f на множестве X, то это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $x \in X$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, завися-

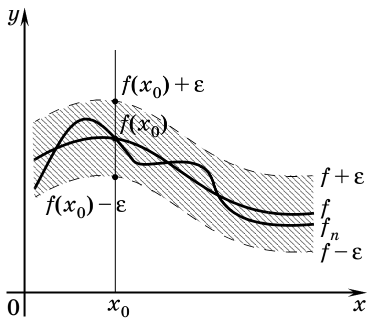


Рис. 4

щий как от ε, так и от x, такой, что для всех номеров $n > n_0$ имеет место неравенство (32.6).

Сущность равномерной сходимости последовательности функций состоит в том, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такой номер n_ε, зависящий т о л ь к о о т з а д а н н о г о ε и не зависящий от выбора точки $x \in X$, что при $n > n_\varepsilon$ неравенство (32.6) будет выполняться всюду на множестве X, т. е. «графики» функций f_n расположены в «ε-полоске», окружающей график функции f (рис. 4).

Таким образом, в случае равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n (а именно при $n > n_\varepsilon$) значения функций f_n приближают функцию f с погрешностью, меньшей ε, сразу на всем множестве X.

Запишем для наглядности определения сходящихся и равномерно сходящихся на множестве X последовательностей с помощью символов существования и всеобщности:

$$f_n \underset{X}{\to} f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\ \varepsilon > 0\ \forall\ x \in X\ \exists\ n_\varepsilon\ \forall\ n > n_\varepsilon\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon\ \forall\ x \in X\ \forall\ n\ \forall\ n_\varepsilon\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В этой записи одно определение от другого отличается перестановкой символов $\forall\ x \in X$ и $\exists\ n_\varepsilon$.

Примеры. 1. Последовательность

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots \tag{32.7}$$

на отрезке $[0, q]$, $0 < q < 1$, сходится равномерно к функции, тождественно равной нулю. Действительно, если $0 \leqslant x \leqslant q$, то

$$0 \leqslant x^n \leqslant q^n, \quad n = 1, 2, \ldots\ . \tag{32.8}$$

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$, то для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такое n_ε, что $q^n < \varepsilon$ для всех $n > n_\varepsilon$. В силу неравенства (32.8), $0 \leqslant x^n < \varepsilon$ для всех $n > n_\varepsilon$ и всех $x \in [0, q]$.

2. Та же последовательность (32.7) на полуинтервале [0, 1) также, очевидно, сходится к функции, тождественно равной нулю: $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = 0$, $0 \leqslant x < 1$. Однако в этом случае сходимость уже не является равномерной (рис. 5). Действительно, если последовательность x^n, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходилась бы на полуинтервале [0, 1) к некоторой функции, то она и просто сходилась бы к этой функции. В силу этого, последовательность (32.7) может равномерно на полуинтервале [0, 1) сходиться только к функции, равной нулю во всех точках этого полуинтервала.

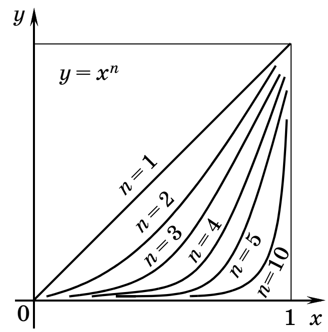


Рис. 5

Заметим, что $\lim\limits_{x \to 1} x^n = 1$ при любом фиксированном натуральном n. Следовательно, каково бы ни было ε, $0 < \varepsilon < 1$, при фиксированном n найдется такое x_ε, $0 < x_\varepsilon < 1$, что $x_\varepsilon^n \geqslant \varepsilon$ (например, при $x_\varepsilon = \sqrt[n]{\varepsilon}$ имеем $x_\varepsilon^n = \varepsilon$). Поэтому при фиксированном ε, $0 < \varepsilon < 1$, не существует такого номера n_0, что для всех $n > n_0$ и всех $x \in [0, 1)$ будет выполняться неравенство (32.6) при $f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$, $0 \leqslant x < 1$. Более того, какое бы N ни взять, для к а ж д о г о $n \geqslant N$ найдется такое $x \in [0, 1)$, что для него выполняется неравенство, противоположное неравенству (32.6), т. е. $|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$ (в качестве конкретного x здесь можно взять, например, указанное выше x_ε).

Итак, неравномерная сходимость последовательности (32.7) на полуинтервале [0, 1) доказана. Заметим, что из приведенных рассуждений следует, что последовательность (32.7) не сходится равномерно и на любом интервале вида $(r, 1)$, где $0 \leqslant r < 1$, в частности на интервале (0, 1).

Следует обратить внимание на то, что если последовательность функций $f_n(x)$, определенных на множестве X, не сходится равномерно на некотором его подмножестве $X_0 \subset X$, то она заведомо не сходится равномерно и на самом множестве X: если условия определения 1 не выполняются для всех точек $x \in X_0$, то они заведомо не выполняются и для всех точек множества X. Вместе с тем если последовательность функций равномерно сходится на некотором множестве, то

она и подавно равномерно сходится на каждом его подмножестве.

Отсюда следует, например, что последовательность (32.7), сходящаяся на отрезке [0, 1] к функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{при} \quad x = 1, \end{cases}$$

не сходится на нем равномерно, так как она уже не сходится равномерно на полуинтервале [0, 1).

УПРАЖНЕНИЕ 1. Доказать, что для последовательности $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, не существует максимального множества равномерной сходимости, т. е. такого множества X_0, что заданная на нем последовательность сходится равномерно, а на каждом множестве X, на котором эта последовательность сходится и которое содержит в себе множество X_0 в качестве собственного подмножества, она сходится неравномерно.

Перейдем к описанию критериев равномерной сходимости. Для функции f и последовательности функций $\{f_n\}$, заданных на некотором множестве X, будем рассматривать последовательность чисел (конечных или бесконечных)

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{32.9}$$

принадлежащих, вообще говоря, расширенному множеству действительных чисел $\overline{\boldsymbol{R}}$ (см. п. 2.5), и ее предел (см. п. 3.2).

Если последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве X к функции f, то существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ верхние грани (32.9) конечны. Действительно, если $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, то, согласно определению равномерной сходимости, для любого $\varepsilon > 0$, например, для $\varepsilon = 1$, существует такой номер n_0, что для всех $x \in X$ и всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < 1,$$

следовательно, и неравенство

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant 1.$$

Поэтому при $n > n_0$ все верхние грани (32.9) конечны.

ТЕОРЕМА 1. *Последовательность функций $\{f_n\}$, определенных на множестве X, равномерно сходится на этом множестве к функции f в том и только том случае, когда*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{32.10}$$

СЛЕДСТВИЕ. *Для того чтобы последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходилась на множестве X к функции f, необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая числовая последовательность $\{a_n\}$, что*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \quad a_n \geqslant 0, \ \ n = 1, 2, \dots, \tag{32.11}$$

и существовал такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n. \tag{32.12}$$

Доказательство теоремы. Если выполнены условия определения 6, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для всех $n > n_\varepsilon$ будем иметь

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

а это, согласно определению предела числовой последовательности, и означает выполнение условия (32.10).

Обратно: если условие (32.10) выполнено, то, по определению конечного предела последовательности элементов из $\overline{\boldsymbol{R}}$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для всех $n > n_\varepsilon$ и всех $x \in X$ справедливо неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

т. е. выполняются условия определения 6. □

В силу того что почти все члены последовательности верхних граней (32.9) для равномерно сходящихся последовательностей функций конечны, критерий (32.10), по существу, сводит понятие равномерной сходимости функциональной последовательности к понятию сходимости числовой последовательности.

Доказательство следствия. Если $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, то, согласно сказанному выше, существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ все верхние грани (32.9) конечны. Поэтому за последовательность $\{a_n\}$ можно взять

$$a_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|, \quad n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$$

(очевидно, $a_n \geqslant 0$), выбрав первые члены $a_1, \ldots, a_{n_0}$ произвольно. Тогда при $n > n_0$ условие (32.12) очевидно выполняется, а в силу (32.10), имеем $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Если же существует числовая последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющая условиям (32.11) и (32.12), то, в силу (32.12), для любого $n > n_0$ выполняется неравенство

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n.$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим, согласно (32.11), что

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Выполнение этого условия и означает (см. теорему 1) равномерную сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f на множестве X. □

Примеры. 3. Докажем еще раз с помощью условия (32.10), что последовательность x^n, $n = 1, 2, \ldots$, не сходится равномерно на полуинтервале $[0, 1)$. Предел указанной последовательности на рассматриваемом полуинтервале равен нулю, поэтому утверждение сразу следует из очевидного (при любом фиксированном $n = 1, 2, \ldots$) равенства $\sup\limits_{0 \leqslant x < 1} |x^n - 0| = 1$, из которого явствует, что условие (32.10) равномерной сходимости в данном случае не выполняется.

4. Последовательность $f_n(x) = \frac{1}{n} x^n$, $n = 1, 2, \ldots, 0 \leqslant x \leqslant 1$, сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$ (рис. 6).

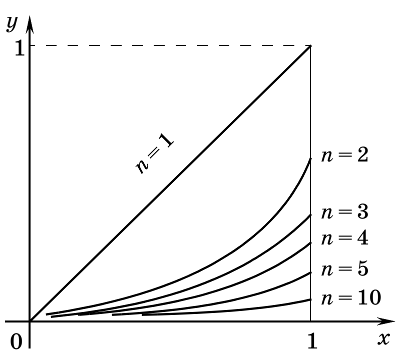


Рис. 6

Действительно, так как

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ и } 0 < \frac{1}{n} x^n \leqslant \frac{1}{n},$$

$0 \leqslant x \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$, высказанное утверждение следует из следствия теоремы 1.

Сформулируем и докажем критерий равномерной сходимости последовательности, обычно называемый критерием Коши.

ТЕОРЕМА 2 (критерий Коши равномерной сходимости последовательностей). *Для того чтобы последовательность функций f_n, $n = 1, 2, \ldots$, определенных на некотором множестве X, равномерно сходилась на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$, всех целых $p \geqslant 0$ и всех точек $x \in X$ выполнялось неравенство*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{32.13}$$

Доказательство необходимости. Пусть последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве X. Тогда, согласно определению равномерной сходимости, существует функция f такая, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому если $n > n_\varepsilon$ и $p \geqslant 0$, то для всех $x \in X$ получим

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство достаточности. Если выполнено условие (32.13), то при любом фиксированном $x \in X$ последовательность

$$f_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{32.14}$$

является числовой последовательностью, удовлетворяющей критерию Коши (см. п. 3.7 и 19.3), и потому она сходится.

Обозначим предел последовательности (32.14) на множестве X через $f(x)$. Покажем, что последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно к функции f на множестве X. Действительно, в силу условия (32.13), для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$, всех целых $p \geqslant 0$ и всех $x \in X$ справедливо неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{32.15}$$

Заметив, что $\lim\limits_{p \to \infty} f_{n+p}(x) = f(x)$, перейдем к пределу в неравенстве (32.15) при $p \to \infty$; тогда для всех $n > n_\varepsilon$ и всех $x \in X$ получим

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

а это и означает, что $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$. □

В заключение отметим следующие два свойства равномерно сходящихся последовательностей.

1^0. *Если последовательности* $\{f_n\}$ *и* $\{g_n\}$ *равномерно на множестве* X *сходятся соответственно к функциям* f *и* g, *то любая их линейная комбинация* $\{\lambda f_n + \mu g_n\}$, $\lambda \in \boldsymbol{C}$, $\mu \in \boldsymbol{C}$, *также равномерно на этом множестве сходится к такой же линейной комбинации предельных функций, т. е. к* $\lambda f + \mu g$.

Доказательство. Если $\lambda = \mu = 0$, то утверждение очевидно. Пусть хотя бы одно из чисел λ или μ отлично от нуля, т. е. $|\lambda| + |\mu| > 0$. Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. В силу условий $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$ и $g_n \underset{X}{\rightrightarrows} g$, существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ и всех $x \in X$ выполняются неравенства

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}, \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|},$$

а поэтому и неравенство

$$|[\lambda f_n(x) + \mu g_n(x)] - [\lambda f(x) + \mu g(x)]| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda|\,|f_n(x) - f(x)| + |\mu|\,|g_n(x) - g(x)| < |\lambda|\frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} + |\mu|\frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} = \varepsilon.$$

Согласно определению равномерной сходимости, это и означает, что $\lambda f_n + \mu g_n \underset{X}{\rightrightarrows} \lambda f + \mu g$. □

2^0. *Если последовательность* $\{f_n\}$ *равномерно сходится на множестве* X *к функции* f, *а функция* g *ограничена на этом множестве, то последовательность* $\{gf_n\}$ *также равномерно сходится на* X *к функции* gf.

Доказательство. Ограниченность функции g на множестве означает, что существует такое $M > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|g(x)| \leqslant M$. В силу же равномерной сходимости на множестве X последовательности $\{f_n\}$ к функции f, существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{M},$$

а следовательно, и неравенство

$$|g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| = |g(x)|\,|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Это и означает, что $gf_n \underset{X}{\rightrightarrows} gf$. □

32.3. Равномерно сходящиеся функциональные ряды

Для рядов можно также ввести понятие равномерной сходимости.

Определение 7. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{32.16}$$

члены которого являются функциями, определенными на множестве X, называется равномерно сходящимся на этом множестве, если последовательность его частичных сумм равномерно сходится на X.

Таким образом, равномерная сходимость ряда (32.16) означает существование такой функции $s(x)$, что

$$s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x) \tag{32.17}$$

(здесь, как всегда, $s_n(x)$ — частичная сумма порядка n ряда (32.16), $n = 1, 2, \ldots$).

Из (32.17) следует, что $s_n(x) \to s(x)$ на X, поэтому $s(x)$ является суммой ряда (32.16).

Положим

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Тогда $s(x) - s_n(x) = r_n(x)$ и условие (32.17) для сходящегося на множестве E ряда можно переписать в эквивалентной форме:

$$r_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0, \tag{32.18}$$

откуда, в силу эквивалентности определения 6 равномерной сходимости последовательности функций и условия (32.10), следует, что, *для того чтобы сходящийся на X ряд* (32.16) *равномерно сходился на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |r_n(x)| = 0. \tag{32.19}$$

Таким образом, из равномерной сходимости ряда, в частности, вытекает, что начиная с некоторого номера верхние грани $\sup\limits_{x\in X} |r_n(x)|$ конечны, а условие (32.19) сводит понятие равномерной сходимости ряда к стремлению к нулю числовой последовательности этих верхних граней.

Важное свойство равномерно сходящихся рядов составляет содержание следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3 (необходимое условие равномерной сходимости ряда). *Если ряд* (32.16) *равномерно сходится на множестве* X, *то последовательность его членов* $u_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, *равномерно стремится к нулю на множестве* X, *т. е.*

$$u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0.$$

Коротко это свойство выражается следующим образом: *у равномерно сходящегося ряда общий член равномерно стремится к нулю.*

Доказательство. Пусть ряд (32.16) равномерно сходится на множестве X. Обозначим его частичные суммы, как обычно, через $s_n(x)$, а его сумму — через $s(x)$, $x \in X$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$|s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для всех $n > n_\varepsilon$ и всех $x \in X$ справедливо также неравенство

$$|u_{n+1}(x)| = |s_{n+1}(x) - s_n(x)| =$$
$$= |[s_{n+1}(x) - s(x)] + [s(x) - s_n(x)]| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает равномерную (на множестве X) сходимость к нулю и последовательности членов равномерно сходящегося на этом множестве ряда. □

Отметим, что, в силу условия (32.10), равномерное стремление к нулю общего члена ряда (32.16) означает, что

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |u_n(x)| = 0.$$

Замечание. Теорема 3 следует также из свойства 1^0 равномерно сходящихся последовательностей (см. п. 32.2). Действительно, если ряд (32.16) равномерно сходится, т. е. выполняется условие (32.17), а следовательно, и условие $s_{n-1}(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x)$. Отсюда, в силу указанного свойства 1^0, имеем $u_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$.

С помощью теоремы 3 иногда удается установить, что рассматриваемый ряд не сходится равномерно. Так, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, члены которого образуют геометрическую прогрессию, не сходится равномерно на интервале $(0, 1)$, поскольку, как это было показано в п. 32.2 (см. пример 2), последовательность x^n,

$n = 0, 1, 2, \ldots$, членов этого ряда не сходится равномерно к нулю на этом интервале. Отсюда, кстати, следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, где z — комплексное число, также не сходится равномерно в единичном круге $|z| < 1$, так как он не сходится равномерно уже на подмножестве $(0, 1)$ этого круга.

Часто бывает полезным следующий достаточный признак равномерной сходимости.

ТЕОРЕМА 4 (признак Вейерштрасса). *Пусть даны два ряда: функциональный* (32.16), *членами которого являются функции $u_n(x)$, определенные на множестве X, и числовой*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{32.20}$$

Если ряд (32.20) *сходится и для любого $x \in X$ выполняются неравенства*

$$|u_n(x)| \leqslant a_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{32.21}$$

то ряд (32.16) *абсолютно и равномерно сходится на множестве X.*

Абсолютная сходимость ряда (32.16) на X в случае сходимости ряда (32.20) сразу следует, по признаку сравнения, из неравенства (32.21). Равномерная же сходимость этого ряда легко следует из следствия теоремы 1 п. 32.2. Приведем и непосредственное доказательство.

Пусть $s(x)$ — сумма ряда (32.16) и $s_n(x)$ — его частичная сумма. В силу сходимости ряда (32.20), для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство (см. 30.9) $\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m < \varepsilon$. Но тогда для всех $n > n_\varepsilon$ и всех $x \in X$ для разности $s(x) - s_n(x)$ будем иметь

$$|s(x) - s_n(x)| = \left|\sum_{m=n+1}^{\infty} u_m(x)\right| \leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} |u_m(x)| \leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m < \varepsilon,$$

т. е. $s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x)$. Это и означает, согласно определению 7, равномерную сходимость ряда (32.16) на множестве X. □

Отметим, что ряд (32.20) называется рядом, мажорирующим ряд (32.16).

В качестве примера возьмем снова ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, члены которого образуют геометрическую прогрессию. Рассмотрим его в круге радиуса $r : |z| \leqslant r$, где $0 < r < 1$. Числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ с неотрица-

тельными членами, образующими бесконечно убывающую геометрическую последовательность, сходится, а для членов данного функционального ряда справедлива оценка $|z^n| \leqslant r^n$, так как $|z| \leqslant r$, поэтому он, согласно признаку Вейерштрасса, равномерно сходится во всяком круге $|z| \leqslant r < 1$. Вместе с тем, как это было показано выше, этот ряд не сходится равномерно в круге $|z| < 1$.

Признак Вейерштрасса дает только достаточные условия равномерной сходимости ряда, которые не являются необходимыми. Убедиться в этом для рядов, у которых с возрастанием номеров членов чередуются их знаки, достаточно легко. Действительно, сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (как и всякий сходящийся числовой ряд) можно рассматривать как равномерно сходящийся, например, на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$ ряд: его члены $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ являются функциями, постоянными на $\boldsymbol{R}$. Вместе с тем всякий числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющий условию $|u_n| \leqslant a_n$, т. е. в данном случае условию $\frac{1}{n} \leqslant a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, расходится по признаку сравнения. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится равномерно, а сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющего условиям признака Вейерштрасса, не существует.

Можно показать, что, более того, условия признака Вейерштрасса не являются необходимыми для равномерной сходимости даже рядов, все члены которых неотрицательны. Чтобы в этом убедиться, приведем пример равномерно сходящегося на отрезке $[0, 1]$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ с неотрицательными членами, для которого также не существует сходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющего условию (32.21).

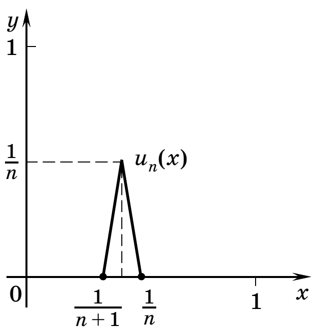


Рис. 7

Определим член ряда $u_n(x)$ следующим образом: $u_n(x) = 0$ на отрезках

$$\left[0, \frac{1}{n+1}\right] \text{ и } \left[\frac{1}{n}, 1\right], \quad u_n\!\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}$$

и функция $u_n(x)$ линейна и непрерывна на каждом из отрезков

$$\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right] \text{ и } \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right), \frac{1}{n}\right].$$

Ее график изображен на рисунке 7.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на отрезке [0, 1]. Действительно, если $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ — остаток этого ряда, $n = 1, 2, \ldots$, то для любого $x \in [0, 1]$ среди его членов существует не более одного, для которого $u_k(x) \neq 0$, $k \geqslant n + 1$. При этом, очевидно, $0 \leqslant u_k(x) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n+1}$, поэтому $0 \leqslant r_n(x) \leqslant \frac{1}{n+1}$ и, следовательно, $r_n(x) \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, т. е. рассматриваемый ряд равномерно сходится на отрезке [0, 1].

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — такой числовой ряд, что для всех $x \in [0, 1]$ выполняется неравенство $0 \leqslant u_n(x) \leqslant a_n$, то

$$\frac{1}{n} = \max_{[0,1]} u_n(x) \leqslant a_n.$$

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, поэтому расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Таким образом, в рассмотренном случае числового ряда, удовлетворяющего по отношению к функциональному ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ условиям признака Вейерштрасса, заведомо нет.

Перейдем теперь к условиям равномерной сходимости ряда, являющимся одновременно необходимыми и достаточными. Замечая, что

$$s_{n+p}(x) - s_{n-1}(x) = \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x), \tag{32.22}$$

из теоремы 2 получаем следующий критерий равномерной сходимости.

ТЕОРЕМА 5 (критерий Коши равномерной сходимости рядов). *Для того чтобы ряд* (32.16) *равномерно сходился на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$, всех целых $p \geqslant 0$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon. \tag{32.23}$$

Очевидно, что из критерия Коши равномерной сходимости ряда еще раз (если в (32.23) положить $p = 0$) получается теорема 3, т. е. необходимое условие равномерной сходимости ряда (32.16).

УПРАЖНЕНИЕ 2. Выяснить, может ли ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (a_n и z — комплексные числа), у которого бесконечно много коэффициентов отличны от нуля, равномерно сходиться на всей комплексной плоскости.

Примеры. 1. Рассмотрим снова ряд (32.4)

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

и покажем, что, каково бы ни было число $r > 0$, ряд (32.4) сходится равномерно в круге $|z| \leqslant r$.

Как было показано, ряд (32.4) сходится при любом комплексном z, в частности при $z = r$, т. е. числовой ряд

$$1 + r + \frac{r^2}{2!} + \ldots + \frac{r^n}{n!} + \ldots$$

сходится. Возьмем его в качестве ряда сравнения (32.20) для ряда (32.4), тогда при $|z| \leqslant r$ имеем $\left|\frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \frac{r^n}{n!}$. Поэтому утверждение о равномерной сходимости ряда (32.4) непосредственно следует из теоремы 4.

Покажем, что ряд (32.4) не сходится равномерно на всей комплексной плоскости. Это следует из невыполнения в данном случае необходимого условия равномерной сходимости ряда (см. теорему 3). Действительно, при любом фиксированном n_0

$$\lim_{|z| \to \infty} \left|\frac{z^{n_0}}{n_0!}\right| = +\infty. \tag{32.24}$$

Поэтому если задано $\varepsilon > 0$, то, каково бы ни было $n_0 > 0$, в силу (32.24), можно подобрать z_0 так, чтобы $\left|\frac{z^{n_0}}{n_0!}\right| > \varepsilon$, т. е. $\frac{z^n}{n!}$ не стремится равномерно к нулю на всей комплексной плоскости.

2. Исследуем равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin nx}{\sqrt{1 + n^2(1 + nx^2)}}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{32.25}$$

Прежде всего заметим, что

$$\left|\frac{x \sin nx}{\sqrt{1 + n^2(1 + nx^2)}}\right| \leqslant \frac{|x|}{\sqrt{1 + n^2(1 + nx^2)}}. \tag{32.26}$$

Далее, $1 + nx^2 \geqslant 2|x|\sqrt{n}$*, поэтому

$$\frac{|x|}{\sqrt{1 + n^2(1 + nx^2)}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n(1 + n^2)}} \leqslant \frac{1}{2n^{3/2}}. \tag{32.27}$$

---

* Мы воспользовались здесь неравенством $2ab \leqslant a^2 + b^2$, которое сразу получается из очевидного неравенства $(a - b)^2 \geqslant 0$.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$ сходится, то, согласно признаку Вейерштрасса, в силу неравенств (32.26) и (32.27), исходный ряд (32.25) равномерно сходится на всей действительной оси.

3. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^5x^2} \sin nx. \tag{32.28}$$

Очевидно, $|e^{-n^5x^2} \sin nx| \leqslant n|x|e^{-n^5x^2}$. Найдем максимум функции $v_n(x) = n|x|e^{-n^5x^2}$ при фиксированном n. Функция $v_n(x)$ четная, поэтому достаточно рассмотреть лишь случай $x \geqslant 0$ (почему?). Производная $v_n'(x) = n(1 - 2n^5x^2)e^{-n^5x^2}$ обращается в нуль в точке $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}n^{5/2}}$. Так как $v_n(x) \geqslant 0$ для всех x, $v_n(0) = 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n(x) = 0$, то в точке x_0 функция $v_n(x)$ имеет максимум (почему?).

Таким образом,

$$v_n(x) \leqslant v_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}n^{5/2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}n^{3/2}}\, e^{-1/2} < \frac{1}{n^{3/2}},$$

и так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, что согласно признаку Вейерштрасса, ряд (32.28) равномерно сходится на всей действительной оси.

Метод, примененный для установления равномерной сходимости ряда (32.28) (исследование на экстремум модуля общего члена или его мажоранты методами дифференциального исчисления), является достаточно общим и часто применяется на практике. С помощью этого метода можно было бы исследовать и равномерную сходимость ряда (32.25), однако примененный выше способ исследования данного ряда значительно быстрее приводит к цели.

4. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2 + n}. \tag{32.29}$$

Согласно признаку Лейбница (см. п. 31.5), он сходится при любом действительном x и, как было отмечено там же, остаток ряда оценивается первым своим членом

$$|r_n(x)| < \frac{1}{x^2 + n + 1} < \frac{1}{n + 1}.$$

Из этого следует, что $r_n(x) \rightrightarrows 0$ при $-\infty < x < +\infty$, т. е. ряд (32.29) равномерно сходится на всей действительной оси.

Покажем, что этот ряд не сходится абсолютно во всех точках. Действительно, выберем для данного числа x какое-либо натуральное n_x так, чтобы $x^2 \leqslant n_x$. Тогда для всех $n \geqslant n_x$ будет выполняться неравенство $x^2 \leqslant n$, следовательно, и неравенство $\frac{1}{x^2 + n} \geqslant \frac{1}{2n}$. А так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то, в силу признака сравнения, ряд (32.29) не сходится абсолютно.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Привести пример ряда, который абсолютно сходится во всех точках некоторого множества, но не сходится на этом множестве равномерно.

У к а з а н и е. См. пример 2 из п. 36.1.

5. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $z \in \boldsymbol{C}$, сходится в открытом круге $K = \{z : |z| < 1\}$ и при любом r, $0 \leqslant r < 1$, сходится равномерно в замкнутом круге $K_r = \{z : |z| \leqslant r\}$. Это следует, например, из признака равномерной сходимости Вейерштрасса, так как при $|z| \leqslant r$ имеем $|z^n| = |z|^n \leqslant r^n$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ сходится. Было показано, что в круге K заданный ряд не сходится равномерно. Это следует и из того, что

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{|z| < 1} |z^n| = \lim_{n \to \infty} \sup_{|z| < 1} |z|^n = \lim_{n \to \infty} 1 = 1,$$

и, следовательно, в круге K не выполняется необходимое условие равномерной сходимости ряда (см. теорему 3).

При $|z| < 1$ члены ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ образуют убывающую геометрическую прогрессию, поэтому $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $z^n = r^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi)$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \frac{1}{1 - r\cos\varphi - ir\sin\varphi} = \frac{1 - r\cos\varphi + ir\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2},$$

$$0 \leqslant r < 1, \ -\infty < \varphi < +\infty.$$

Приравняв действительную и мнимую части этого равенства, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\varphi = \frac{1 - r\cos\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi = \frac{r\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}.$$

При фиксированном r, $0 \leqslant r < 1$, эти ряды, как функции переменной φ, равномерно сходятся на множестве всех действительных чисел. Это следует, например, из признака равно-

мерной сходимости Вейерштрасса, так как $|r^n \cos n\varphi| \leqslant r^n$, $|r^n \sin n\varphi| \leqslant r^n$ и при $0 \leqslant r < 1$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ сходится.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Используя формулу $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$, $|z| < 1$, найти суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} r^n \sin n\varphi$ и $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n \cos n\varphi$, $0 \leqslant r < 1$. Исследовать их равномерную сходимость на числовой прямой.

Докажем теперь достаточный признак равномерной сходимости, применимый в отличие от признака Вейерштрасса и к не абсолютно сходящимся рядам. Его формулировка напоминает признак Дирихле для сходимости числовых рядов (см. п. 30.13) и впервые встречается в работах Харди*.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x), \tag{32.30}$$

в котором функции $a_n(x)$ *и* $b_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, *определены на множестве* X *и таковы, что*:

1) *последовательность* $\{a_n(x)\}$ *монотонна при каждом* $x \in X$ *и равномерно стремится к нулю на* X;

2) *последовательность частичных сумм* $B_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, *ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *ограничена на множестве* X.

Тогда ряд (32.30) *равномерно сходится на множестве* X.

Доказательство. В силу условия 2 теоремы, существует такое $B > 0$, что $|B_n(x)| \leqslant B$ для всех $x \in X$ и всех $n = 1, 2, \ldots$ и поэтому

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x)\right| = |B_{n+p}(x) - B_{n-1}(x)| \leqslant |B_{n+p}(x)| + |B_{n-1}(x)| \leqslant 2B$$

для всех $x \in X$, всех $n = 2, 3, \ldots$ и всех целых $p \geqslant 0$. Из условия же 1 теоремы следует, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $x \in X$ и всех $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $0 \leqslant |a_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{6B}$. Теперь, применив неравенство Абеля (см. п. 30.13), получим, что

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\right| \leqslant 2B[|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|] < \varepsilon$$

для всех $x \in X$, всех $n > n_\varepsilon$ и всех целых $p \geqslant 0$. Это и доказывает равномерную сходимость ряда (32.30). □

---

* Г. Харди (1877—1947) — английский математик.

В качестве примера использования теоремы 6 рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. Согласно теореме 6, этот ряд равномерно сходится на любом отрезке $[a, b]$, не содержащем точек вида $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Действительно, последовательность $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, в данном случае является числовой последовательностью, она монотонно убывает и стремится к нулю (значит, и равномерно стремится к нулю), а суммы $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$ удовлетворяют неравенству

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \leqslant \max_{[a,\, b]} \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} < +\infty$$

(см. п. 30.13), т. е. ограничены на любом указанном отрезке.

На всяком отрезке, содержащем точки вида $x = 2k\pi$, рассматриваемый ряд не сходится равномерно. В силу свойств синуса, это достаточно доказать для отрезка $[0, \pi]$. Положим $x_n = \frac{1}{2n}$; тогда для всех $k = n + 1, n + 2, \ldots , 2n$ имеем $0 < kx_n \leqslant \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, в силу неравенства $\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{2}{\pi}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (см. (14.1)), получим

$$\frac{\sin kx_n}{k} = \frac{\sin kx_n}{kx_n}\frac{1}{2n} \geqslant \frac{2}{\pi}\frac{1}{2n} = \frac{1}{\pi n}, \quad k = n + 1, \ldots, 2n.$$

Отсюда

$$\frac{\sin (n+1)x_n}{n+1} + \frac{\sin (n+2)x_n}{n+2} + \ldots + \frac{\sin 2nx_n}{2n} > \underbrace{\frac{1}{\pi n} + \ldots + \frac{1}{\pi n}}_{n \text{ раз}} = \frac{1}{\pi}.$$

Поэтому ни для какого $\varepsilon < \frac{1}{\pi}$ на отрезке $[0, \pi]$ не выполняется критерий Коши равномерной сходимости.

Заметим, что доказать равномерную сходимость рассматриваемого ряда на отрезке, не содержащем точек вида $x = 2k\pi$, с помощью признака Вейерштрасса нельзя. Например, для отрезка $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ имеем $\max\limits_{[\pi/2,\, 3\pi/2]} \left|\frac{\sin nx}{n}\right| = \frac{1}{n}$. Поэтому не существует такого сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что $\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leqslant \leqslant a_n$ на $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, ибо тогда $a_n \geqslant \frac{1}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Подобно случаю числовых рядов, применяя неравенство Абеля, можно получить еще один признак равномерной схо-

димости функциональных рядов, аналогичный признаку Абеля для числовых рядов. Он также впервые встречается в работах Харди.

ТЕОРЕМА 7. *Если:*

1) *последовательность* $\{a_n(x)\}$ *ограничена на множестве* X:

$$|a_n(x)| \leqslant M, \quad x \in X, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и убывает или возрастает при каждом $x \in X$;

2) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* X, *то ряд* (32.30) *также равномерно сходится на* X.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$, существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$, всех целых $p \geqslant 0$ и всех точек $x \in X$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=0}^{p} b_{n+k}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Отсюда, в силу неравенства Абеля (см. 30.77), для всех номеров $n > n_\varepsilon$, всех целых $p \geqslant 0$ и всех точек $x \in X$ справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=0}^{p} a_{n+k}(x) b_{n+k}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}(|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) \leqslant \varepsilon.$$

Согласно критерию Коши, это и означает равномерную сходимость ряда (32.30). □

Пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sin nx \cos \frac{x}{n}}{\ln \ln n}$.

На любом отрезке, не содержащем точек вида $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \dots$, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{\ln \ln x}$, согласно теореме 6, равномерно сходится, а числовая последовательность $\cos \frac{x}{n}$, $n = 2, 3, \dots$, ограничена на всей числовой оси и при любом фиксированном значении x возрастает начиная с некоторого номера (причем можно выбрать такой номер, что начиная с этого номера эта последовательность возрастает во всех точках указанного отрезка). Поэтому на отрезке, не содержащем точек вида $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \dots$, рассматриваемый ряд, в силу теоремы 7, равномерно сходится.

В заключение заметим, что из двух свойств равномерно сходящихся последовательностей, доказанных в конце п. 32.2, непосредственно следует справедливость соответствующих свойств для равномерно сходящихся рядов.

1⁰. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ *сходятся равномерно на множестве* X, *то для любых чисел* $\lambda \in \boldsymbol{C}$ *и* $\mu \in \boldsymbol{C}$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda u_n(x) + \mu v_n(x)$ *также сходится равномерно на множестве* X.

2⁰. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* X, *а функция* $g(x)$ *ограничена на этом множестве, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(x)u_n(x)$ *также равномерно сходится на* X.

32.4. Свойства равномерно сходящихся рядов и последовательностей

Как было показано выше (см. пример 2 в п. 32.1), сумма сходящегося ряда, все члены которого непрерывные функции, может и не быть непрерывной функцией. Следующая ниже теорема 8 содержит достаточные условия непрерывности суммы ряда.

Следует обратить внимание, что рассмотрение непрерывных на некотором множестве функций накладывает дополнительные ограничения на само множество — оно уже не может быть множеством произвольной природы (каковым до сих пор было множество X, на котором были заданы члены рассматриваемых рядов, элементы последовательностей и т. д.), а должно быть таким, что для функций, заданных на нем, определено понятие непрерывности. Когда речь пойдет о производных и интегралах, придется еще более сузить класс допустимых множеств X.

При изучении вопроса о непрерывности суммы ряда будем рассматривать ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $x \in X \subset \boldsymbol{R}$, $u_n(x) \in \boldsymbol{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, т. е. ряды, члены которых являются функциями действительного аргумента, принимающие, вообще говоря, комплексные значения.

ТЕОРЕМА 8. *Если ряд равномерно сходится на некотором множестве и в какой-то точке этого множества все члены ряда непрерывны, то и сумма ряда непрерывна в этой точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на множестве X, $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — его сумма, а $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, $n = 1, 2, \dots$, — его частичные суммы. Согласно условию теоремы,

$$s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x), \quad n \to \infty.$$

Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Для него существует такой номер n_ε, что для всех $x \in X$ и всех $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (32.31)$$

Выберем произвольно $n_0 > n_\varepsilon$. Функция $s_{n_0}(x)$, как сумма конечного числа непрерывных в точке x_0 функций $u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n_0$, также непрерывна в этой точке. Поэтому существует $\delta = \delta\,(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех точек $x \in X$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|s_{n_0}(x_0) - s_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (32.32)$$

Теперь, заметив (рис. 8), что

$$s(x) - s(x_0) = [s(x) - s_{n_0}(x)] + [s_{n_0}(x) - s_{n_0}(x_0)] + [s_{n_0}(x_0) - s(x_0)],$$

из неравенства (32.31), взятого в точках x_0 и x, и неравенства (32.32) получим при $|x - x_0| < \delta$ и $x \in X$

$$|s(x) - s(x_0)| < |s(x) - s_{n_0}(x)| + |s_{n_0}(x) - s_{n_0}(x_0)| + |s_{n_0}(x_0) - s(x_0)| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

это и доказывает непрерывность функции $s(x)$ в точке x_0. □

Утверждению теоремы можно придать следующий вид:

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{x \to x_0} s(x) =$$
$$= s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

а так как каждая функция $u(x)$, $n = 1, 2, \dots$, непрерывна в точке $x_0 \in X$, то $u_n(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} u_n(x)$, поэтому

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x).$$

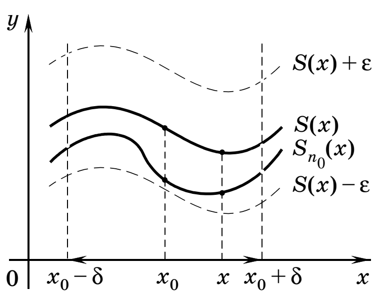


Рис. 8

Таким образом, в условиях теоремы 8 предел суммы ряда равен сумме пределов его членов, т. е. в рассматриваемом ряде допустим почленный переход к пределу.

Здесь, как и ниже, все пределы функций при $x \to x_0$ берутся по множеству задания рассматриваемых функций (если, конечно, не оговорено что-либо другое), т. е. в данном случае по множеству X.

Выше отмечалось, что каждой последовательности функций соответствует функциональный ряд, для которого она является последовательностью частичных сумм. При этом если данная последовательность равномерно сходится на некотором множестве, то и указанный ряд также, очевидно, равномерно сходится на этом множестве. Это обстоятельство позволяет перефразировать теоремы о равномерно сходящихся рядах в соответствующие теоремы о равномерно сходящихся последовательностях.

Будем рассматривать последовательности $\{f_n(x)\}$, $x \in X \subset \boldsymbol{R}$, $f_n(x) \in \boldsymbol{C}$, $n = 1, 2, \ldots$. Теорема 8 в терминах последовательностей равносильна следующей теореме.

ТЕОРЕМА 8′. *Если последовательность функций равномерно сходится на некотором множестве и в некоторой его точке все члены последовательности непрерывны, то и предельная функция последовательности непрерывна в этой точке.*

Таким образом, если $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, $x_0 \in X \subset \boldsymbol{R}$ и функции f_n, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны в точке x_0, то и функция f непрерывна в этой точке, поэтому

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x),$$

т. е. предельные переходы по n и по x можно переставлять.

Действительно, предел f последовательности f_n, $n = 1, 2, \ldots$, является, в силу теоремы 8′, непрерывной в точке $x_0 \in X$ функцией, поэтому левая часть равенства равна $f(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

но и правая часть рассматриваемого равенства, в силу непрерывности функций f_n, также равна $f(x_0)$:

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0). \ \square$$

В случае, когда члены ряда неотрицательны и непрерывны, а сумма ряда является непрерывной функцией, имеет место утверждение, в некотором смысле обратное к теореме 8: ряд оказывается равномерно сходящимся. Сформулируем это утверждение более точно.

ТЕОРЕМА 9 (Дини*). *Если члены сходящегося на отрезке ряда неотрицательны и непрерывны и его сумма также является непрерывной функцией, то ряд на этом отрезке сходится равномерно.*

Доказательство. Пусть функции $u_n(x)$ непрерывны и неотрицательны, $x \in [a, b]$, $n = 1, 2, \dots$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится и его сумма $s(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Из условия $u_n(x) \geqslant 0$ следует, что частичные суммы $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ данного ряда в каждой точке $x \in [a, b]$ представляют собой возрастающую числовую последовательность и, следовательно, остатки $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ ряда — убывающую последовательность: $r_n(x)\downarrow$. Очевидно, что $s_n(x) \leqslant s(x)$, поэтому $r_n(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$, $n = 1, 2, \dots$.

Для доказательства равномерной сходимости на отрезке $[a, b]$ рассматриваемого ряда достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n, что для всех точек $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $r_n(x) < \varepsilon$, так как в этом случае для всех $m > n$, в силу условий $r_n(x)\downarrow$ и $r_n(x) \geqslant 0$, будет выполняться неравенство $0 \leqslant r_m(x) \leqslant r_n(x) < \varepsilon$.

Допустим противное: пусть существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого номера n существует точка x_n, для которой $r_n(x_n) \geqslant \varepsilon_0$. Выделим из последовательности $\{x_n\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, и пусть $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0$.

В силу сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке x_0, существует такой номер n_0, что для остатка $r_{n_0}(x)$ ряда справедливо неравенство $r_{n_0}(x_0) < \frac{\varepsilon_0}{2}$.

Остаток $r_{n_0}(x) = s(x) - s_{n_0}(x)$ непрерывен в точке x_0 как разность непрерывных в этой точке функций $s(x)$ и $s_{n_0}(x)$. Поэто-

* У. Дини (1845—1918) — итальянский математик.

му существует такая $\delta > 0$, что для всех $x \in [a, b]$, $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|r_{n_0}(x) - r_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Следовательно, для всех таких точек x справедливо неравенство

$$r_{n_0}(x) = |r_{n_0}(x)| \leqslant |r_{n_0}(x) - r_{n_0}(x_0)| + |r_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0.$$

Отсюда, в силу неотрицательности и убывания остатков $r_n(x)$ во всех точках отрезка $[a, b]$, явствует, что для всех точек $x \in [a, b]$, $|x - x_0| < \delta$ и всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство $0 \leqslant r_n(x) < \varepsilon_0$.

Из того, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_{n_k} = x_0$, следует существование такого номера n_k, что $n_k > n_0$ и $|x_{n_k} - x_0| < \delta$, поэтому для этого номера имеет место неравенство $0 \leqslant r_{n_k}(x_{n_k}) < \varepsilon_0$, которое противоречит выбору точек x_n, согласно которому $r_{n_k}(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon_0$. Полученное противоречие доказывает теорему.□

Теорему 9 также можно перефразировать в терминах последовательностей.

ТЕОРЕМА 9′. *Если сходящаяся на отрезке последовательность непрерывных функций в каждой точке возрастает (в каждой точке убывает) и предел последовательности также является непрерывной функцией, то последовательность сходится равномерно.*

Теперь перейдем к вопросу о почленном интегрировании и дифференцировании рядов. Производная и интеграл определялись только в действительной области, поэтому, начиная с этого момента и до конца параграфа, будем считать, что все рассматриваемые функции определены на промежутках действительной оси и принимают действительные значения.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть функции $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны на отрезке $[a, b]$ и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad (32.33)$$

равномерно сходится на $[a, b]$. Тогда, какова бы ни была точка $c \in [a, b]$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t)\, dt \qquad (32.34)$$

также равномерно сходится на $[a, b]$, *и если*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{32.35}$$

то

$$\int_c^x s(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{32.36}$$

Если формулу (32.36) переписать в виде

$$\int_c^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t)\,dt,$$

то видно, что она означает законность при условиях, перечисленных в теореме 9, *почленного интегрирования* ряда.

Доказательство. В силу равномерной сходимости ряда (32.33) и непрерывности его членов на отрезке $[a, b]$, согласно теореме 8, его сумма $s(x)$ также непрерывна на этом отрезке, поэтому она интегрируется на любом отрезке с концами в точках $c \in [a, b]$ и $x \in [a, b]$.

Покажем, что ряд (32.34) равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ к функции

$$\sigma(x) = \int_c^x s(t)\,dt. \tag{32.37}$$

Пусть

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad r_n(x) = s(x) - s_n(x).$$

Обозначим через $\sigma_n(x)$ частичные суммы ряда (32.34):

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_c^x u_k(t)\,dt = \int_c^x \left(\sum_{k=1}^{n} u_k(t)\right) dt = \int_c^x s_n(t)\,dt.$$

Теперь для любого $x \in [a, b]$ имеем

$$|\sigma(x) - \sigma_n(x)| = \left|\int_c^x s(t)\,dt - \int_c^x s_n(t)\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_c^x |s(t) - s_n(t)|\,dt\right| = \left|\int_c^x |r_n(t)|\,dt\right| \leqslant \sup_{[a,b]} |r_n(t)| \left|\int_c^x dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant |x - c| \sup_{[a,b]} |r_n(t)| \leqslant (b - a) \sup_{[a,b]} |r_n(x)|. \tag{32.38}$$

Последовательность $\sup\limits_{[a,b]} |r_n(x)|$, $n = 1, 2, \ldots$, является числовой последовательностью. В силу равномерной сходимости ряда (32.33), имеем

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{[a,b]} |r_n(x)| = 0$$

(см. п. 32.3); поэтому из неравенства (32.38), согласно следствию теоремы 1, явствует, что последовательность частичных сумм ряда (32.34) равномерно сходится к функции (32.37), а это и означает равномерную сходимость ряда (32.34) к функции (32.37). Теорема и, в частности, формула (32.36) доказаны. □

Перефразируем полученный результат для последовательностей функций.

ТЕОРЕМА 10′. *Если последовательность непрерывных на отрезке* $[a, b]$ *функций* f_n, $n = 1, 2, \ldots$, *на этом отрезке равномерно сходится к функции* f, *то, какова бы ни была точка* $c \in [a, b]$,

$$\int_c^x f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_c^x f(t)\,dt \quad \text{на} \quad [a, b],$$

в частности

$$\lim_{n \to \infty} \int_c^x f_n(t)\,dt = \int_c^x [\lim_{n \to \infty} f_n(t)]\,dt.$$

Покажем теперь, что равенство

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x)\,dx$$

справедливо не всегда, когда на отрезке $[a, b]$ существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ и все рассматриваемые функции интегрируемы, т. е. что в этом случае не всегда можно переходить к пределу под знаком интеграла. Таким образом, требование равномерной сходимости в теореме 10′ (так же как и в теореме 10) является существенным.

Пусть $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда $f_n(0) = 0$ и при любом $x \neq 0$: $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$. Таким образом, $f_n \underset{[0,\,1]}{\to} 0$ и, следовательно, интеграл от предельной функции, т. е. от нуля, также равен нулю. Однако

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n\int_0^1 xe^{-nx^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^n e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}(1 - e^n).$$

Поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$, т. е. действительно, для рассмотренной последовательности $\{f_n(x)\}$ имеет место неравенство

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_1^0 \lim_{n \to \infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

Если построить ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, для которого рассмотренная последовательность $\{f_n(x)\}$ является последовательностью частичных сумм, т. е. положить $u_1(x) = f_1(x)$, $u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$, $n = 2, 3, \ldots$, то для этого ряда будем иметь

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\, dx \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 u_n(x)\, dx.$$

УПРАЖНЕНИЕ 4. Показать, что если

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n \text{ при } x = \dfrac{1}{2n}, \\ 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

и функция $f_n(x)$ линейна на отрезках $\left[0, \dfrac{1}{2n}\right]$ и $\left[\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n}\right]$, то для всех $x \in [0, 1]$ имеет место равенство $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$, а $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 1$.

Рассмотрим теперь вопрос дифференцирования рядов.

ТЕОРЕМА 11. *Пусть функции* $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[a, b]$ *и ряд, составленный из их производных*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \tag{32.39}$$

равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. *Тогда если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится хотя бы в одной точке* $c \in [a, b]$, *то он сходится равномерно на всем отрезке* $[a, b]$, *его сумма*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{32.40}$$

непрерывно дифференцируема и

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{32.41}$$

Если эту формулу переписать в виде

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),$$

то видно, что она означает законность при сделанных предположениях *почленного дифференцирования* ряда.

Доказательство. Пусть

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \qquad (32.42)$$

В силу равномерной сходимости этого ряда, его сумма является непрерывной функцией, а сам ряд можно почленно интегрировать:

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)],\ a \leqslant x \leqslant b. \qquad (32.43)$$

По теореме 10, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)], \quad a \leqslant x \leqslant b \qquad (32.44)$$

— сходящийся. Сходится, по условию теоремы, и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c), \qquad (32.45)$$

поэтому сходится и сумма рядов (32.44) и (32.45), т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \qquad (32.46)$$

Отсюда следует, что равенство (32.43) можно переписать в виде

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$$

или, что то же (см. (32.40)), в виде

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = s(x) - s(c). \qquad (32.47)$$

Функция в левой части равенства имеет производную по x, следовательно, и функция $s(x)$ имеет производную. Дифференцируя равенство (32.47), получаем (см. п. 25.2)

$$s'(x) = \sigma(x), \qquad (32.48)$$

где функция $\sigma(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, так как представляет собой сумму равномерно сходящегося ряда (32.39), члены которого — непрерывные функции. Поэтому сумма $s(x)$ ряда (32.46) имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную $s'(x)$, т. е. непрерывно дифференцируема. Подставляя (32.42) в (32.48), и получим искомую формулу (32.41).

Остается лишь отметить, что из равенства (32.43), в силу доказанной сходимости рядов (32.44) и (32.45), следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c).$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)\,dt$ равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ (см. теорему 10), а $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ — числовой ряд, поэтому и их сумма, т. е. ряд (32.40), равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. □

Итак, если сходящийся ряд непрерывно дифференцируемых функций таков, что ряд, составленный из его производных, равномерно сходится, то сумма ряда является непрерывно дифференцируемой функцией и ее производная получается почленным дифференцированием ряда.

Из предпосылок этой теоремы следует равномерная сходимость ряда, поэтому, не ограничивая общности теоремы, ее можно перефразировать следующим образом.

Если ряд непрерывно дифференцируемых функций и ряд, составленный из их производных, равномерно сходятся, то сумма исходного ряда непрерывно дифференцируема и ее производная равна сумме производных членов данного ряда (т. е. ряд можно почленно дифференцировать).

Заметим, что в теореме 10 условие равномерной сходимости ряда, членами которого являются производные членов заданного ряда, является существенным: если члены ряда непрерывно дифференцируемы, а равномерно сходится только сам ряд, то, вообще говоря, его нельзя почленно дифференцировать. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ равномерно сходится на всей числовой оси, поскольку $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, а ряд, полученный его почленным дифференцированием, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$, расходится в точках $x = \pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Необходимо также в теореме 11 и условие о сходимости самого ряда в некоторой точке, так как одной равномерной сходимости ряда из производных, т. е. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, недостаточно для того, чтобы гарантировать сходимость самого ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Так, ряд, полученный из производных членов ряда $1 + 1 + 1 + \ + 1 + \ldots$, т. е. ряд $0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$, конечно, равномерно сходится на всей числовой оси, а сам исходный ряд расходится.

Перефразируем теперь теорему 11 для последовательностей.

ТЕОРЕМА 11′. *Пусть последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке* $[a, b]$ *функций*

$$f_n, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{32.49}$$

сходится хотя бы в одной точке $c \in [a, b]$, *а последовательность их производных* f'_n, $n = 1, 2, \dots$, *равномерно сходится на* $[a, b]$. *Тогда последовательность* (32.49) *равномерно сходится на* $[a, b]$, *ее предел является непрерывно дифференцируемой на этом отрезке функцией и*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{df_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \lim_{n \to \infty} f_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Аналогично случаю рядов, это утверждение равносильно следующему.

Если функции f_n *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[a, b]$ *и* $f_n \underset{[a,\,b]}{\rightrightarrows} f$, $f'_n \underset{[a,\,b]}{\rightrightarrows} \varphi$, *то существует* f' *и* $f' = \varphi$ *на отрезке* $[a, b]$.

Примеры применения этих теорем приведены в § 33.

УПРАЖНЕНИЯ. 5. Выяснить, будет ли справедливым равенство

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x^n\, dx = \int_0^1 (\lim_{n \to \infty} x^n)\, dx.$$

Можно ли это установить с помощью теоремы 10?

6. Доказать, что при $x > 1$ для дзета-функции Римана ζ (см. (30.4) и п. 31.5*) справедлива формула

$$\zeta'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln x}{n^x}.$$

§ 33
Степенные ряды

33.1. Радиус сходимости и круг сходимости степенного ряда

Определение 1. *Функциональные ряды вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{33.1}$$

где a_n *и* z_0 *— заданные комплексные числа, а* z *— комплексное переменное, называются степенными рядами. Числа* a_n,

$n = 0, 1, 2, \dots$, *называются коэффициентами степенного ряда* (33.1).

Предполагая, что коэффициенты ряда и число z_0 фиксированы, будем исследовать поведение ряда (33.1) при различных z.

Если в ряде (33.1) выполнить замену переменного, положив $\zeta = z - z_0$, то получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n. \tag{33.2}$$

Очевидно, что исследование сходимости ряда (33.1) эквивалентно исследованию сходимости ряда (33.2), поэтому в дальнейшем будем рассматривать ряды вида (33.2), используя, как правило, для обозначения переменной букву z, а не ζ.

ТЕОРЕМА 1 (первая теорема Абеля). *Если степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{33.3}$$

сходится при $z = z_0 \neq 0$, *то он сходится, и притом абсолютно, при любом* z, *для которого* $|z| < |z_0|$.

Доказательство. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \tag{33.4}$$

сходится. Тогда его n-й член $a_n z_0^n$ стремится к нулю при $n \to \infty$ (см. п. 30.1), поэтому последовательность $\{a_n z_0^n\}$ ограничена, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$|a_n z_0^n| \leqslant M, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

В силу этого, для n-го члена ряда (33.3) имеет место оценка

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M\left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

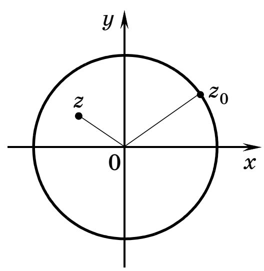


Рис. 9

Если $|z| < |z_0|$ (рис. 9), то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$, являясь суммой геометрической прогрессии со знаменателем $q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, схо-

дится. Поэтому, согласно признаку сравнения (см. п. 30.5), сходится и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$, а это означает абсолютную сходимость ряда (33.3) при $|z| < |z_0|$. □

СЛЕДСТВИЕ. *Если степенной ряд* (33.3) *расходится при* $z = z_0$, *то он расходится и при всяком* z, *для которого* $|z| > |z_0|$.

Действительно, если $|z| > |z_0|$ и ряд (33.4) расходится, то расходится и ряд (33.3), так как если бы он сходился, то, в силу доказанного, сходился бы и ряд (33.4).

Неравенство $|z| \leqslant R$ задает на комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$ замкнутый круг радиуса R с центром в точке $z = 0$.

Определение 2. *Пусть задан ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. *Если* R — *неотрицательное число или* $+\infty$ *обладает тем свойством, что при всех* z, *для которых* $|z| < R$, *ряд* (33.3) *сходится, а при всех* z, *для которых* $|z| > R$, *ряд* (33.3) *расходится, то* R *называется радиусом сходимости степенного ряда* (33.3).

Множество точек z, *для которых* $|z| \leqslant R$, *называется кругом сходимости ряда* (33.3).

Если $R = 0$, то круг сходимости вырождается в точку $z = 0$, а если $R = +\infty$, то круг сходимости совпадает со всей комплексной плоскостью $\boldsymbol{C}$.

ТЕОРЕМА 2. *У всякого степенного ряда* (33.3) *существует радиус сходимости* R. *Внутри круга сходимости, т. е. при любом* z, *для которого* $|z| < R$, *ряд* (33.3) *сходится абсолютно. На любом круге* $|z| \leqslant \leqslant r$, *где* r *фиксировано и* $r < R$, *ряд* (33.3) *сходится равномерно.*

Доказательство. Обозначим через A множество всех неотрицательных чисел x, в которых ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{33.5}$$

сходится. При $x = 0$ этот ряд заведомо сходится, поэтому множество A не пусто и, следовательно, имеет конечную или бесконечную верхнюю грань. Пусть $\sup A = R$. Покажем, что R — радиус сходимости ряда (33.3). Действительно, пусть $z \in \boldsymbol{C}$ и $|z| < R$. Согласно определению верхней грани, существует такое $x \in A$, что $|z| < x \leqslant R$ (см. определение 4′ в п. 3.4). В силу определения множества A, для указанного x ряд (33.5) сходится, поэтому, согласно первой теореме Абеля, в выбранной точке z сходится абсолютно ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Если $|z| > R$, то выберем такое действительное число x, что $R < x < |z|$; тогда снова, в силу определения множества A, ряд (33.5) в такой точке x расходится — она лежит на действительной оси правее всех точек, в которых ряд (33.5) сходится. Поэтому, согласно следствию из первой теоремы Абеля, для выбранного z расходится и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Итак, действительно, R является радиусом сходимости ряда (33.3).

Если теперь $0 < r < R$, то, по доказанному, ряд (33.3) при $z = r$ абсолютно сходится, т. е. сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. А так как для любой точки z круга $|z| \leqslant r$ (рис. 10)

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

то, согласно признаку Вейерштрасса (см. п. 32.3), на этом круге ряд (33.3) сходится равномерно. □

Таким образом, областью сходимости всякого степенного ряда является всегда «круг», т. е. обычный круг, исключая, быть может, некоторое множество точек ограничивающей его окружности (будем для краткости называть ее *границей* круга сходимости), в которых он может расходиться (см. следующие ниже примеры).

Подчеркнем, что радиус сходимости степенного ряда (33.3) обладает следующим свойством: для каждого числа z такого, что $|z| < R$, указанный ряд а б с о л ю т н о сходится, а для каждого z такого, что $|z| > R$, он просто, а следовательно, и подавно а б с о л ю т н о расходится (расходится ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда). Это следует, очевидно, из определения радиуса сходимости и теоремы 2.

Члены степенного ряда являются непрерывными функциями и, как было показано, на всяком круге, лежащем вместе со своей границей внутри круга сходимости, степенной ряд сходится равномерно, поэтому его сумма непрерывна на всяком указанном круге. Очевидно, что для любой точки z круга сходимости, $|z| < R$, можно подобрать круг, содержащий эту точку и лежащий вместе с границей в круге сходимости (достаточно взять его радиус r таким, что $|z| < r < R$), поэтому степенной ряд *непрерывен в каждой точке z, лежащей внутри его круга сходимости*: $|z| < R$.

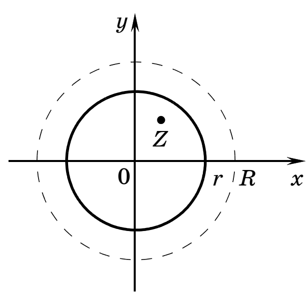


Рис. 10

Рассмотрим теперь случай, когда степенной ряд сходится в точке $z = R$, лежащей на границе его круга сходимости. Отметим, что случай $z = -R$ может быть сведен к случаю $z = R$ простой заменой переменного $\zeta = -z$.

ТЕОРЕМА 3 (вторая теорема Абеля). *Если R — радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и этот ряд сходится при $z = R$, то он сходится равномерно на отрезке* $[0, R]$ *действительной оси.*

СЛЕДСТВИЕ. *Если степенной ряд* (33.3) *сходится при $z = R$, то его сумма непрерывна на отрезке* $[0, R]$ *действительной оси.*

Доказательство. Пусть $0 \leqslant x \leqslant R$. Представим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ в виде $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$. Члены ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ не зависят от x, поэтому его сходимость означает и его равномерную сходимость. Последовательность же $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}$ ограничена на отрезке $[0, R]$, ее члены неотрицательны: $0 \leqslant \left(\frac{x}{R}\right)^n \leqslant 1$, и она убывает в каждой точке (при $x = R$ она не строго убывает, точнее, является стационарной). Поэтому, в силу признака Абеля равномерной сходимости рядов (см. теорему 7 в п. 32.3), ряд (33.3) равномерно сходится на отрезке $[0, R]$. □

Следствие вытекает из того, что сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций является также непрерывной функцией.

Все сказанное с помощью преобразования типа $z = \zeta - \zeta_0$ (ζ — новая переменная, ζ_0 фиксировано) переносится и на общие степенные ряды вида (33.1). В частности, областью сходимости такого степенного ряда всегда является круг вида $|z - z_0| \leqslant R$, конечно, как и выше, с точностью до точек ограничивающей его окружности. Этот круг называется кругом сходимости (ряда (33.1)), а R — его радиусом сходимости.

Примеры. 1. Радиус сходимости R ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ равен нулю, т. е. этот ряд сходится только при $z = 0$*.

Действительно, исследуя абсолютную сходимость этого ряда по признаку Даламбера, при любом $z \neq 0$ получим

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|(n+1)! z^{n+1}|}{|n! z^n|} = \lim_{n \to \infty} (n+1)|z| = +\infty.$$

* При $z = 0$, очевидно, сходится любой ряд вида (33.3).

Таким образом, рассматриваемый ряд не сходится абсолютно при любом $z \neq 0$; отсюда, в силу следствия из первой теоремы Абеля, он расходится при любом $z \neq 0$.

2. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ равен $+\infty$, так как было показано (см. п. 32.1), что этот ряд сходится при любом z.

3. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{33.6}$$

сходится при $|z| < 1$ и расходится при $|z| \geqslant 1$. Поэтому ее радиус сходимости $R = 1$. Отметим, что во всех точках границы круга сходимости, т. е. во всех точках окружности $|z| = 1$, ряд (33.6) расходится, так как для общего члена ряда имеем $|z^n| = 1$ и, следовательно, он не стремится к нулю при $n \to \infty$.

4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \tag{33.7}$$

сходится при $|z| \leqslant 1$, так как при выполнении этого условия $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

При $|z| > 1$ ряд (33.7) расходится, поскольку в этом случае $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{|z|^n}{n^2} = +\infty$*, т. е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Радиус сходимости ряда (33.7), как и ряда (33.6), равен единице, однако в каждой точке границы круга сходимости ряд (33.7), в отличие от ряда (33.6), сходится.

5. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ имеет радиус сходимости $R = 1$.

Действительно, применив признак Даламбера для определения z, при которых ряд абсолютно сходится (расходится), получим

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)}\right|}{\left|\frac{z^n}{n}\right|} = |z| \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = |z|$$

и, следовательно, при $|z| < 1$ данный ряд сходится, причем абсолютно, а при $|z| > 1$ он расходится. При $z = 1$ получается рас-

---

* Действительно, легко, например с помощью правила Лопиталя, убедиться, что $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{|z|^x}{x^2} = +\infty$ (см. пример 2 в п. 12.2).

ходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$, а при $z = -1$ — сходящийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (см. п. 30.3 и 30.9). Таким образом, в этом примере на границе круга сходимости есть точки, в которых ряд сходится, и точки, в которых он расходится.

Таким образом, область сходимости степенного ряда не совпадает, вообще говоря, с его кругом сходимости, а состоит из внутренности этого круга, т. е. множества $\{z : |z| < R\}$, и, быть может, еще из некоторого множества точек, лежащих на его границе.

Из рассмотренных примеров (см. также п. 32.1) видно, что иногда радиус сходимости R степенного ряда находится с помощью признака Даламбера сходимости рядов с положительными членами (см. теорему 8 в п. 30.6). Действительно, справедливо следующее утверждение: *если существует предел (конечный или бесконечный)* $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, *то*

$$R = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{33.8}$$

В самом деле, если число R определено этой формулой и $|z| < R$, то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{a_n z^n} = |z| \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|}{|R|} < 1,$$

поэтому ряд (33.3) для такого z сходится (и притом абсолютно).

Если же $|z| > R$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|z|}{|R|} > 1$, и, следовательно, ряд (33.3) абсолютно расходится. Таким образом, R действительно является радиусом сходимости ряда (33.3).

Аналогично можно найти величину радиуса сходимости R и с помощью признака Коши (см. теорему 9 в п. 30.6), если только существует предел (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. В этом случае

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{33.8′}$$

Действительно, если число R задается этой формулой и если $|z| < R$, то

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{|R|} < 1$$

и поэтому ряд (33.3) сходится. Если же $|z| > R$, то

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \frac{|z|}{|R|} > 1$$

и, следовательно, ряд (33.3) абсолютно не сходится.

Таким образом, R является радиусом сходимости ряда (33.3).

Затруднения при использовании таких методов определения радиуса сходимости степенного ряда могут возникнуть, например, уже в том случае, когда в рассматриваемом ряде имеются коэффициенты со сколь угодно большими номерами, равные нулю. Тогда можно попробовать применить один из этих методов, предварительно перенумеровав подряд все члены ряда с отличными от нуля коэффициентами (отчего его сходимость и сумма в случае, если он сходится, не изменяются).

Поясним сказанное на примере. Пусть требуется определить радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{где} \quad a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если } n = 1, 3, 5, \ldots, \\ 0, & \text{если } n = 0, 2, 4, \ldots . \end{cases}$$

Признак Даламбера неприменим для определения сходимости этого ряда, так как отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ не имеет смысла для четных номеров n. Не дает ответа здесь и признак Коши, поскольку нетрудно проверить, что здесь предел $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ не существует. Однако если положить $b_k = \dfrac{1}{2k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и записать данный ряд в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1},$$

то, исследовав абсолютную сходимость этого ряда с помощью признака Даламбера, получим

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|b_{k+1} z^{2k+3}|}{|b_k z^{2k+1}|} = |z|^2 \lim_{k \to \infty} \frac{2k+1}{2k+3} = |z|^2.$$

Отсюда следует, что рассматриваемый ряд абсолютно сходится, когда $|z^2| < 1$, т. е. когда $|z| < 1$, и абсолютно расходится, когда $|z| > 1$. Таким образом, радиус сходимости этого степенного ряда равен 1.

Подчеркнем, что с помощью признака Даламбера и признака Коши можно найти радиус сходимости не для произвольного степенного ряда, а лишь для такого, у которого существуют указанные выше пределы (быть может, после новой нумерации членов).

УПРАЖНЕНИЯ. Определить радиусы сходимости рядов:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} n^2z^n$. *2.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$. *3.* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n$. *4.* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}$. *5.* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{2n}$.

33.2*. Формула Коши—Адамара для радиуса сходимости степенного ряда

Найдем теперь формулу для определения радиуса сходимости произвольного степенного ряда через его коэффициенты в общем случае.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть R — радиус сходимости степенного ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

тогда

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}^{*}. \tag{33.9}$$

Формула (33.9) называется *формулой Коши—Адамара***.

Доказательство. Положим $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Рассмотрим сначала случай $\rho = 0$. Покажем, что в этом случае ряд (33.3) сходится при любом z. Возьмем какое-либо $z \neq 0$ и такое ε, что $0 < \varepsilon < 1$. Тогда (см. теорему 10 п. 4.12*) существует такое N_1, что

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\varepsilon}{|z|} \quad \text{для всех} \quad n > N_1,$$

т. е.

$$|a_n|\,|z|^n < \varepsilon^n \quad \text{для всех} \quad n > N_1.$$

Отсюда по признаку сравнения следует, что ряд (33.3) абсолютно, значит, и просто сходится при данном z, а так как z было произвольно, то это означает, что $R = +\infty$.

Возьмем другой крайний случай: пусть $\rho = +\infty$. Покажем, что в этом случае ряд (33.3) расходится при любом $z \neq 0$. Действительно, если $\rho = +\infty$, то существует последовательность n_k, $k = 1, 2, \ldots$, натурального ряда такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty$. Поэтому, каково бы ни было $z \neq 0$, существует такой номер k_z, что при $k > k_z$

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant \frac{1}{|z|}, \quad \text{т. е.} \quad \left|a_{n_k} z^{n_k}\right| \geqslant 1.$$

---

* О верхнем пределе см. в п. 3.12*.

** Ж. Адамар (1865—1963) — французский математик.

Таким образом, не выполняется необходимое условие сходимости ряда — стремление к нулю n-го члена, поэтому при данном $z \neq 0$ ряд расходится, а так как $z \neq 0$ было произвольно, то это означает, что $R = 0$.

Пусть теперь $0 < \rho < +\infty$. Покажем, что при всяком z таком, что $|z| < \frac{1}{\rho}$, ряд (33.3) сходится. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $|z| < \frac{1}{\rho + \varepsilon}$*; тогда число q, определяемое равенством $q = (\rho + \varepsilon)|z|$, будет удовлетворять неравенству $q < 1$. Согласно свойству верхнего предела, существует такой номер N_1, что при $n > N_1$

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \varepsilon,$$

поэтому при $n > N_1$

$$|z|\sqrt[n]{|a_n|} < |z|(\rho + \varepsilon) = q, \quad \text{т. е.} \quad |a_n z^n| < q^n, \quad 0 < q < 1,$$

и по признаку сравнения ряд (33.3) при рассматриваемом z абсолютно, а значит, и просто сходится.

Покажем теперь, что ряд (33.3) при всяком z таком, что $|z| > \frac{1}{\rho}$, расходится. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$|z| > \frac{1}{\rho - \varepsilon} > 0, \tag{33.10}$$

тогда $|z|(\rho - \varepsilon) > 1$. Согласно свойству верхнего предела (см. теорему 10 п. 4.12*), существует подпоследовательность n_k, $k = 1, 2, \ldots$, натуральных чисел такая, что

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \rho - \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Из этого, в силу (33.10), следует, что

$$|z|\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > |z|(\rho - \varepsilon) > 1$$

и, следовательно,

$$\left|a_{n_k} z^{n_k}\right| > 1,$$

т. е. в этом случае не выполняется необходимое условие сходимости ряда — стремление к нулю его n-го члена, и поэтому для рассматриваемого z ряд (33.3) расходится.

Таким образом, ряд (33.3) сходится, если $|z| < \frac{1}{\rho}$, и расходится, если $|z| > \frac{1}{\rho}$, а это и означает, что его радиус сходимости $R = \frac{1}{\rho}$. □

---

* Для этого достаточно взять $\varepsilon < \frac{1}{|z|} - \rho$.

Отметим, что из доказанной теоремы еще раз следует, что для каждого степенного ряда (33.3) существует такое конечное или бесконечное число $R \geqslant 0$, что для всех $z \in \boldsymbol{C}$, для которых $|z| < R$, ряд (33.3) сходится, а для которых $|z| > R$, — расходится, т. е. что для каждого степенного ряда существует радиус сходимости: им является $R = \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}}$.

33.3. Аналитические функции

Определение 3. *Функция $f(z)$ называется аналитической в точке z_0, если существует такое $R > 0$, что в круге $|z - z_0| < R$ она представима степенным рядом вида* (33.1), *т. е. существуют такие комплексные числа a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, что*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R. \tag{33.11}$$

Сумма, разность и произведение аналитических в точке функций снова являются аналитическими в этой точке функциями (почему?).

ЛЕММА 1. *Если R — радиус сходимости ряда* (33.11), $R > 0$ *и*

$$r_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

— остаток ряда (33.11), *то*

$$r_n(z) = O((z - z_0)^{n+1}),\ z \to z_0 \tag{33.12}$$

и, следовательно,

$$r_n(z) = o((z - z_0)^n),\ z \to z_0. \tag{33.13}$$

Доказательство. Если $|z - z_0| < R$, то

$$r_n(z) = (z - z_0)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n-1}$$

и ряд, получившийся после вынесения множителя $(z - z_0)^{n+1}$, сходится. Поэтому функция $\varphi(z) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n-1}$, как сумма степенного ряда, непрерывна в круге $|z - z_0| < R$.

Если теперь $0 < r < R$, то функция $\varphi(z)$, будучи непрерывной на замкнутом круге $|z - z_0| \leqslant r$, является ограниченной на нем,

т. е. найдется такая постоянная $M > 0$, что при $|z - z_0| \leqslant r$ выполняется неравенство $|\varphi(z)| \leqslant M$. Поскольку $r_n(z) = (z - z_0)^{n+1}\varphi(z)$, при $|z - z_0| \leqslant r$ получим

$$|r_n(z)| = |z - z_0|^{n+1}|\varphi(z) \leqslant M|z - z_0|^{n+1},$$

а это и означает (33.12). Условие (33.13) непосредственно следует из (33.12). □

ТЕОРЕМА 5. *Разложение аналитической в точке z_0 функции в степенной ряд вида* (33.11) *единственно, т. е. если*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R, \quad R > 0, \quad (33.14)$$

то $a_n = b_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Из равенства (33.14) (при $n = 0$), в силу формулы (33.12), следует, что при $z \to z_0$

$$a_0 + O(z - z_0) = b_0 + O(z - z_0).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $z \to z_0$, получаем, что $a_0 = b_0$.

Пусть уже доказано, что $a_j = b_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$; тогда, в силу (33.12) и (33.14),

$$a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + O((z - z_0)^{n+1}) =$$
$$= b_0 + b_1(z - z_0) + \ldots + b_n(z - z_0)^n + O((z - z_0)^{n+1}).$$

Уничтожая одинаковые члены в обеих частях этого равенства и разделив обе его части на $(z - z_0)^n$, имеем

$$a_n + O(z - z_0) = b_n + O(z - z_0), \quad z \to z_0, \quad z \neq z_0.$$

Отсюда в пределе при $z \to z_0$ получим, что $a_n = b_n$ (ср. с теоремой 2 в п. 13.2). □

Может оказаться, что лишь рассмотрение ряда в области комплексных чисел может объяснить величину его радиуса сходимости. Например, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, являющийся суммой геометрической прогрессии со знаменателем $-x^2$, сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geqslant 1$. Его сумма на интервале $(-1; 1)$ равна $\frac{1}{1 + x^2}$. Функция $\frac{1}{1 + x^2}$ определена и бесконечно диффе-

ренцируема на всей действительной оси и непонятно почему, раскладывая ее в ряд

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

мы получаем ряд, сходящийся только при $|x| < 1$. Это разложение делается совершенно естественным, если рассмотреть эту функцию в области комплексных чисел, поскольку функция $\frac{1}{1+x^2}$ имеет «особую точку» при $z = i$ (в этой точке функция не определена и при приближении к ней стремится к бесконечности), т. е. как раз на границе круга $|z| \leqslant 1$.

33.4. Аналитические функции в действительной области

В настоящем пункте будут в основном рассматриваться степенны́е ряды с действительными членами. Однако предварительно докажем лемму, справедливую для степенных рядов и в комплексной области.

Лемма 2. *Радиусы сходимости рядов*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{33.15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}, \tag{33.16}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} \tag{33.17}$$

равны.

Таким образом, ряды (33.16) и (33.17), получаемые из ряда (33.15) соответственно с помощью «формального интегрирования и дифференцирования», имеют те же радиусы сходимости, что и исходный ряд. Интегрирование и дифференцирование названы здесь формальными, поскольку для функций комплексного аргумента эти операции не были определены, и они выполнялись так, как если бы z было действительным числом, т. е. в действительной области ряд (33.16) получается из ряда (33.15) почленным интегрированием, а ряд (33.13) — почленным дифференцированием.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости ряда (33.15), R_1 — радиус сходимости ряда (33.16), а R_2 — радиус сходимости ряда (33.17). Из неравенств

$$\left|\frac{a_n z^{n+1}}{n+1}\right| \leqslant |z|\,|a_n z^n| \leqslant |z^2|\,|n a_n z^{n-1}|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и теоремы сравнения (см. теорему 6 в п. 30.5) следует, что если в некоторой точке z сходится ряд (33.17), то в этой точке сходится и ряд (33.15), и если в некоторой точке z сходится ряд (33.15), то в той же точке сходится и ряд (33.16). Отсюда следует, что

$$R_2 \leqslant R \leqslant R_1. \tag{33.18}$$

Покажем теперь, что

$$R_1 \leqslant R_2. \tag{33.19}$$

Возьмем какую-либо точку $z_0 \neq 0$ из круга сходимости ряда (33.16) и покажем, что в ней сходится ряд (33.17). Так как $|z_0| < R_1$, то найдется такое действительное число r, что $|z_0| < r < R_1$. Запишем абсолютную величину члена ряда (33.17) следующим образом:

$$|na_n z_0^{n-1}| = \frac{n(n+1)}{|z_0|^2}\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right|\left|\frac{z_0}{r}\right|^{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{33.20}$$

В силу сходимости ряда (33.16) при $z = r$, общий член этого ряда при $z = r$ стремится к нулю, когда $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty}\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right| = 0.$$

Следовательно, последовательность $\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right|$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена, т. е. существует такое $M > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$, выполняется неравенство

$$\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right| \leqslant M.$$

Положив $q = \left|\frac{z_0}{r}\right|$, из (33.20) получим неравенство

$$|na_n z_0^{n-1}| \leqslant \frac{n(n+1)}{|z_0|^2} M q^{n+1}, \quad 0 < q < 1.$$

Ряд с общим членом $\frac{n(n+1)}{|z_0|^2} M q^{n+1}$ сходится (в этом легко убедиться, например, по признаку Даламбера), поэтому при $z = z_0$ сходится и ряд (33.17). Таким образом, из сходимости в точке $z = z_0$ ряда (33.16) следует сходимость в ней и ряда (33.17). Это и означает справедливость неравенства (33.19). Из неравенств (33.18) и (33.19) следует, что $R = R_1 = R_2$. □

З а м е ч а н и е. Утверждение леммы может быть доказано проще, если использовать формулу Коши—Адамара для радиуса сходимости степенного ряда (см. п. 33.2*). Это не сделано, так как приведенное доказательство также не сложно, а п. 33.2*

можно пропустить при первом чтении (на что и указывает звездочка при его номере).

Далее в этом параграфе везде, где не оговорено противное, будем предполагать, что коэффициенты всех рассматриваемых рядов действительны и что переменные z и z_0 также действительны (в этом случае будем их обозначать x и x_0). Правда, все рассматриваемые ниже свойства степенных рядов переносятся в определенном смысле и на степенные ряды в комплексной области, однако для осуществления этого нам пришлось бы обобщить понятие производной и интеграла на функции комплексного аргумента, а это не входит в задачу настоящего курса.

Итак, будет рассматривать ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \tag{33.21}$$

где a_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$), x и x_0 действительны. Если R — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z - x_0)$, где z — комплексное число, т. е. ряда с теми же коэффициентами, что и у ряда (33.21), но рассматриваемого в комплексной области, то, очевидно, ряд (33.21) сходится, если $|x - x_0| < R$, и расходится, если $|x - x_0| > R$.

В этом случае R по-прежнему называется *радиусом сходимости ряда* (33.21), а интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ — *его интервалом сходимости*.

ТЕОРЕМА 6. *Если R — радиус сходимости степенного ряда*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \tag{33.22}$$

$R > 0$, *то*:

1) *функция f имеет в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ производные всех порядков, и они находятся из ряда* (33.22) *почленным дифференцированием*;

2) *для любого $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1},$$

т. е. внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать;

3) *степенны́е ряды, получающиеся из ряда* (33.22) *в результате почленного дифференцирования или интегрирования, имеют тот же радиус сходимости, что и сам ряд* (33.22).

Короче, внутри интервала сходимости степенного ряда его можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз.

Доказательство. В силу леммы, доказанной в начале этого пункта, радиусы сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$, получающегося из ряда (33.22) почленным дифференцированием, и ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$, получающегося из того же ряда почленным интегрированием, равны радиусу сходимости ряда (33.22) (чтобы в этом убедиться, достаточно сделать замену переменного $x - x_0 = z$).

Всякий степенной ряд вида (33.22) с радиусом сходимости R равномерно сходится на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$, $0 < r < R$ (см. теорему 2 в п. 33.1), поэтому утверждение теоремы о возможности почленного дифференцирования и интегрирования вещественных степенных рядов непосредственно следует из соответствующих теорем о дифференцируемости и интегрируемости функциональных рядов, доказанных в п. 32.4. □

Заметим, что, например, возможность почленного интегрирования степенного ряда (33.22) внутри интервала сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$ сразу вытекает (см. теорему 10 в п. 32.4) из того, что степенной ряд равномерно сходится на всяком отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$, $0 < r < R$. Отсюда следует, что при почленном интегрировании радиус сходимости степенного ряда не уменьшается. Доказанная теорема содержит более полное утверждение, что указанный радиус сходимости, кроме того, и не увеличивается, т. е. остается прежним.

ТЕОРЕМА 7. *Если функция f аналитическая в точке x_0, т. е. представима в окрестности этой точки рядом* (33.22) *с радиусом сходимости $R > 0$, то*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{33.23}$$

т. е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Доказательство. Продифференцировав n раз обе части равенства (33.22), получим (см. теорему 6)

$$f^{(n)}(x) = n(n-1) \ldots 2 \cdot 1 \cdot a_n + (n+1)n \ldots 2a_{n+1}(x - x_0) +$$
$$+ (n+2)(n+1) \ldots 3a_{n+2}(x - x_0)^2 + \ldots .$$

Отсюда при $x = x_0$ и вытекает формула (33.23). □

Заметим, что из доказанной теоремы следует еще раз свойство единственности разложения функции в степенной ряд (правда, на этот раз, в силу сделанных ограничений, только в действительной области (ср. с п. 33.3)).

33.5. Разложение функций в степенные ряды. Различные способы записи остаточного члена формулы Тейлора

Определение 4. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (33.24)$$

называется рядом Тейлора функции f в точке x_0.

При $x_0 = 0$ ряд (33.24) называется также *рядом Маклорена* функции $f(x)$.

Как известно, всякая аналитическая в точке x_0 функция бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности этой точки и равна в этой окрестности сумме своего ряда Тейлора. Вместе с тем оказывается, что существуют функции, бесконечно дифференцируемые, но не аналитические и, значит, не представимые своим рядом Тейлора.

Примером является функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{для} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{для} \quad x = 0. \end{cases} \qquad (33.25)$$

При $x \neq 0$ эта функция имеет производные всех порядков, которые легко вычисляются:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}, \quad f''(x) = -\frac{6}{x^4}e^{-1/x^2} + \frac{4}{x^6}e^{-1/x^2},$$

и вообще

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2},$$

где $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ — многочлен некоторой степени относительно $\frac{1}{x}$ (n — порядковый номер, а не степень многочлена), т. е. $f^{(n)}(x)$ — линейная комбинация слагаемых вида

$$\frac{1}{x^m}e^{-1/x^2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (33.26)$$

Это легко проверяется по индукции. Сделав замену переменного $t = \frac{1}{x^2}$, найдем, применив правило Лопиталя, предел модуля выражения (33.26) при $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \left|\frac{1}{x^m} e^{-1/x^2}\right| = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{m/2}}{e^t} = 0.$$

Отсюда следует, что и предел выражения (33.26) при $x \to 0$ также равен нулю и что при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\lim_{x \to \pm 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x \to 0} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0. \qquad (33.27)$$

Из формулы (33.27) при $n = 0$ и $n = 1$ следует, что функция f непрерывна в точке $x = 0$ и $\lim\limits_{x \to \pm 0} f'(x) = 0$, поэтому (см. следствие 2 из теоремы 3 п. 11.2) $f'(0)$ существует и $f'(0) = 0$. По индукции легко аналогично убедиться, что $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Таким образом, все члены ряда Тейлора функции (33.25) в точке $x_0 = 0$ равны нулю, поэтому его сумма при всех x также равна нулю и, следовательно, не совпадает с самой функцией. Заметим еще, что, согласно теореме 5 п. 33.3, функция (33.25) не может быть разложена ни в какой степенной ряд (так как если бы это было возможно, то он оказался бы рядом Тейлора), а это и означает, что она не является аналитической.

УПРАЖНЕНИЯ. 6. Установить, можно ли разложить функцию $f(x) = e^{-1/x}$, $x > 0$, $f(0) = 0$, на отрезке [0, 1] в ряд Маклорена.

7. Пусть

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Доказать, что функцию $\theta(x)e^{-1/x^2}$ можно так доопределить при $x = 0$, что в результате получится бесконечно дифференцируемая на всей числовой оси функция.

Заметим, что если функция раскладывается в некоторой окрестности данной точки в степенной ряд, то такой ряд единствен (см. теорему 5 или теорему 7) и является ее рядом Тейлора в этой точке. Однако один и тот же степенной ряд может служить рядом Тейлора для разных функций. Так, степенной ряд с нулевыми коэффициентами $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 0x^n$ является как рядом Тейлора функции, тождественно равной нулю на всей число-

вой оси: $f(x) = 0$, $x \in R$, так и рядом Тейлора функции (33.25) в точке $x = 0$.

Возникает вопрос: когда ряд Тейлора (33.24) бесконечно дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x)$ сходится на некотором интервале к $f(x)$? Чтобы исследовать этот вопрос, напишем формулу Тейлора для функции f (см. п. 13.1)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x) \tag{33.28}$$

(она справедлива при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$). В этой формуле $r_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора, а не остаток ряда Тейлора, так как с остатком ряда нельзя оперировать до тех пор, пока не будет установлено, что ряд сходится, и лишь в случае, когда его сумма равна функции $f(x)$, можно утверждать, что остаточный член формулы Тейлора совпадает с остатком ряда Тейлора. Полагая

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

перепишем формулу (33.28) в виде

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x), \tag{33.29}$$

где $s_n(x)$ — n-я частичная сумма ряда Тейлора. Отсюда следует, что, для того чтобы функция f была равна на рассматриваемом интервале сумме своего ряда Тейлора, т. е. чтобы $\lim\limits_{n \to \infty} s_n(x) = f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы *для всех x из этого интервала ее остаточный член в формуле Тейлора стремился к нулю*:

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0. \tag{33.30}$$

Если это имеет место, то из формулы (33.29) следует, что остаточный член формулы Тейлора $r_n(x)$ является также и суммой n-го остатка ряда Тейлора (33.24).

Для того чтобы найти условия, при которых остаточный член в формуле Тейлора стремится к нулю в окрестности данной точки, предварительно установим некоторые формы его возможной записи.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть функция f определена и непрерывна вместе со всеми своими производными до порядка $n + 1$ включительно на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$. Тогда остаточный член $r_n(x)$ ее формулы Тейлора* (33.29) *для всех*

$x \in (x_0 - h,\ x_0 + h)$ можно записать любым из следующих трех способов:

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt, \qquad (33.31)$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad (33.32)$$

где ξ принадлежит интервалу с концами в точках x_0 и x, и

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{n!}(1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1}, \qquad (33.33)$$

где $0 < \theta < 1$.

Формула (33.31) *называется остаточным членом формулы Тейлора в интегральной форме*, *формула* (33.32) — *в форме Лагранжа*, *а* (33.33) — *в форме Коши.*

Доказательство. Из основной теоремы дифференциального и интегрального исчисления (см. теорему 4 п. 25.3) имеем

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x_0) - \int_{x_0}^{x} f'(t)\,d(x - t).$$

Проинтегрировав по частям интеграл в правой части равенства, получим

$$f(x) = f(x_0) + (-f'(t)(x - t))\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x - t)\,dt =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x - t)\,dt.$$

Пусть для некоторого $m \leqslant n$ уже доказано, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x - t)^{m-1}\,dt. \qquad (33.34)$$

Проинтегрируем по частям последний член:

$$\frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x - t)^{m-1}\,dt = -\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)\,d(x - t)^m =$$

$$= -\frac{f^{(m)}(t)(x - t)^m}{m!}\Bigg|_{x_0}^{x} + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x - t)^m\,dt =$$

$$= \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x - t)^m\,dt$$

и подставим это выражение в (33.34):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x - t)^m\,dt.$$

В результате получилась формула (33.34), в которой m заменено на $m+1$.

Таким образом, формула (33.34) доказана методом математической индукции для всех $m \leqslant n$. При $m = n$ ее остаточный член имеет вид (33.31).

Применим теперь первую интегральную теорему о среднем значении к интегралу (33.31). Заметив, что функция $(x - t)^n$ не меняет знака на промежутке интегрирования, вынесем за знак интеграла «среднее значение» производной $f^{(n+1)}$ (см. следствие из теоремы 1 в п. 24.2):

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_{x_0}^{x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где ξ лежит на интервале с концами в точках x_0 и x. Формула (33.32) доказана.

Если же применить интегральную теорему о среднем к интегралу (33.31), вынося за знак интеграла «среднее значение» всей подынтегральной функции (см. п. 24.2), то получим

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0), \quad (33.35)$$

где ξ, как и выше, лежит на интервале с концами в точках x_0 и x, т. е.

$$\xi = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1.$$

Отсюда $x - \xi = x - x_0 - \theta(x - x_0) = (x - x_0)(1 - \theta)$. Подставив это выражение в (33.35), получим формулу (33.33). □

Приведем достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть функция f бесконечно дифференцируема и все ее производные ограничены в совокупности на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ и всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M. \quad (33.36)$$

Тогда на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ функция f раскладывается в ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad |x - x_0| < h. \quad (33.37)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что, каково бы ни было число a,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad (33.38)$$

(см. пример 4 в п. 4.9, впрочем, это равенство следует и непосредственно из того, что выражение $\frac{a^n}{n!}$ — общий член сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$; см. (32.4)).

Для того чтобы доказать формулу (33.37), достаточно убедиться (см. (33.30)), что

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0, \qquad (33.39)$$

где $r_n(x)$ — остаточный член в формуле Тейлора функции f. Возьмем $r_n(x)$ в форме Лагранжа (см. (33.32)). Из неравенства (33.36) следует, что

$$|r_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| \leqslant M\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $|\xi - x_0| < |x - x_0| < h$ и, следовательно, $\xi \in (x_0 - h, x_0 + h)$. На основании (33.38) при $a = |x - x_0|$ имеем

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

поэтому при $|x - x_0| < h$ выполняется условие (33.39). □

УПРАЖНЕНИЕ 8. Заменим в теореме 8 условие ограниченности производных $f^{(n)}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ условием их ограниченности только в точке x_0, т. е. пусть существует такое $M > 0$, что для всех n выполняется неравенство $|f^{(n)}(x_0)| \leqslant M$. Тогда, очевидно, ряд (33.37) сходится, и притом абсолютно, на всей действительной оси, так как $\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n\right| \leqslant \frac{M(x - x_0)^n}{n!}$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!}$ сходится при всех x (см. ряд (32.4)). Следует ли отсюда утверждение теоремы 9?

33.6. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Прежде всего найдем разложение в ряд некоторых основных элементарных функций.

1. Разложение в ряд функции $f(x) = e^x$. Так как $f^{(n)}(x) = e^x$, то для любого фиксированного $h > 0$ при всех $x \in (-h, h)$ и всех $n = 0, 1, \ldots$

$$0 < f^{(n)}(x) < e^h.$$

Таким образом, условия теоремы 9 выполнены ($x_0 = 0$), поэтому функция e^x раскладывается в ряд Тейлора (33.34) на любом конечном интервале, а следовательно, и на всей действительной оси. Так как в данном случае $f^{(n)}(0) = 1$, то, согласно формуле (33.37), разложение e^x имеет вид

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{33.40}$$

Напомним, что в п. 32.1 было установлено, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ абсолютно сходится на всей комплексной плоскости. Теперь показано, что для действительных $z = x$ его сумма равна e^x. В случае существенно комплексных z его сумму, по аналогии, обозначают e^z; таким образом, формула

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{33.41}$$

для комплексных z является определением функции e^z.

Данное определение естественно, во-первых, потому, что в случае действительного $z = x$ эта функция совпадает с показательной функцией e^x, а во-вторых, функция e^z сохраняет ряд характерных свойств функции e^x. Покажем, например, что

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \tag{33.42}$$

для любых комплексных z_1 и z_2.

Ряд (33.41) абсолютно сходится, поэтому ряды

$$e^{z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}, \quad e^{z_2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!}$$

можно почленно перемножить (см. п. 30.10), а так как получающийся при этом ряд также абсолютно сходится, то его члены можно располагать в произвольном порядке. Соберем все члены, содержащие произведения $z_1^n z_2^m$ с одинаковой суммой $n + m$, и расположим эти группы членов по ее возрастанию:

$$e^{z_1}e^{z_2} = \sum_{n+m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+m} \frac{z_1^{n+m-k}}{(n+m-k)!} \cdot \frac{z_2^k}{k!} =$$

$$= \sum_{n+m=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m)!} \sum_{k=0}^{n+m} \frac{(n+m)!}{(n+m-k)!k!} z_1^{n+m-k} z_2^k =$$

$$= \sum_{n+m=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^{n+m}}{(n+m)!} = e^{z_1+z_2}.$$

2. Разложение в ряд sh x и ch x. Заменив в формуле (33.40) x на $-x$ (это означает просто изменение обозначения), получаем

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}. \tag{33.43}$$

Складывая и вычитая равенства (33.40) и (33.43), а затем разделив их на два, получим

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}; \tag{33.44}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{33.45}$$

В силу единственности разложения функций в степенные ряды, правые части этих формул являются рядами Тейлора функций ch x и sh x.

Функция e^x определена теперь для всех комплексных z, поэтому на существенно комплексные значения аргумента можно распространить и гиперболические функции ch x и sh x, положив

$$\operatorname{ch} z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad z \in \boldsymbol{C}.$$

Определенные таким образом ch z и sh z для комплексных z раскладываются в степенные ряды (33.44) и (33.45), сходящиеся на всей комплексной плоскости (под x в них в этом случае понимается комплексное число).

3. Разложение в ряд $\sin x$ и $\cos x$. Формулы Эйлера. Если $f(x) = \sin x$, то $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ (см. пример 3, п. 10.1), поэтому $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ для всех действительных x. Согласно теореме 9, отсюда следует, что функция $\sin x$ раскладывается в степенной ряд на всей действительной оси. Вспоминая формулу Тейлора для синуса (см. п. 13.3), получаем ряд Тейлора для $\sin x$:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{33.46}$$

Рассуждая аналогично и используя формулу Тейлора для косинуса (см. п. 13.3), получаем и для него ряд Тейлора

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \tag{33.47}$$

также сходящийся на всей действительной оси.

В силу теоремы Абеля (см. п. 33.1), ряды в правых частях формул (33.46) и (33.47) сходятся также и при любом комплексном x; это позволяет дать определение синуса и косинуса для комплексных значений аргумента, положив для любого комплексного z

$$\sin z \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{33.48}$$

$$\cos z \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}. \tag{33.49}$$

В комплексной области легко установить связь между показательной и тригонометрическими функциями. Заменив z в ряде (33.41) сначала на iz, а затем на $-iz$, получим

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!}, \quad e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n z^n}{n!}. \tag{33.50}$$

В силу равенств $i^{2k} = (-1)^k$, $k = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, $i^{2k+1} = (-1)^k i$, $k = 0, 1, \ldots$, из (33.50) имеем

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Сравнив последние формулы с формулами (33.48) и (33.49), получим

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{33.51}$$

Отсюда непосредственно следует также формула

$$\cos z + i\sin z = e^{iz}. \tag{33.52}$$

Равенства (33.51) и (33.52) называются *формулами Эйлера*. Они справедливы, в частности, и для действительных z.

Если в формуле (33.52) $z = \varphi$ — действительное число, то

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

Отсюда, во-первых, следует, что

$$|e^{i\varphi}| = 1,$$

так как $|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$, и, во-вторых, что комплексное число z с модулем r и аргументом φ, т. е. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, можно записать в виде

$$z = re^{i\varphi},$$

называемом *показательной формой* записи комплексного числа.

Положив $z = -1$ и, следовательно, $\varphi = \pi$, получим

$$e^{i\pi} = -1.$$

Эта формула показывает, что числа -1, e, π и i связаны между собой.

Напомним, что числа -1, π, e и i были открыты математиками при изучении весьма далеких друг от друга задач: число -1 было введено для того, чтобы операция вычитания имела смысл для любых натуральных чисел (кроме того, введение отрицательных чисел оказалось удобным при сравнении температур тел с температурой замерзания воды, при измерении высот и низин на Земле относительно уровня моря и т. п.); число π найдено как отношение длины окружности к ее диаметру, e — как такое основание показательной функции, при котором производная функция совпадает с самой функцией, а мнимая единица i введена для того, чтобы каждое квадратное уравнение имело решение.

С помощью формул Эйлера легко находятся модуль и аргумент числа e^z, где $z = x + iy$. Действительно (см. (33.42)),

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

т. е. $|e^z| = e^x$, $\operatorname{Arg} e^z = y$.

Синус и косинус в комплексной области обладают многими, однако далеко не всеми свойствами, которыми они обладают и в действительной области. Появляются и новые свойства, не имеющие аналогов в действительной области.

УПРАЖНЕНИЯ. Доказать, что при любом комплексном z:

9. $\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z$.

10. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

11. $\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z$.

12. Для всех $z \in C$ справедливо неравенство $e^z \neq 0$.

13. Пусть $\operatorname{tg} z \overset{\text{def}}{=} \frac{\sin z}{\cos z}$. Доказать, что для всех $z \in C$ выполняется неравенство $\operatorname{tg} z \neq \pm i$.

Указание. Выразить $\operatorname{tg} z$ через показательную функцию e^z.

14. Можно ли разложить функции $\sqrt{z}$, $\sin\sqrt{z}$, $\cos\sqrt{z}$ в степенной ряд (33.3)?

Покажем, что абсолютные величины синуса и косинуса в комплексной области могут быть больше единицы и, более того, не ограничены по абсолютной величине.

Заменим в рядах (33.48) и (33.49) z на iz:

$$\sin iz = i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos iz = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Сравнив получившиеся ряды с рядами (33.44) и (33.45) (при $x = z$), получим

$$i \operatorname{sh} z = \sin iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz.$$

В частности, при действительном $z = y$ имеем

$$|\sin iy| = |\operatorname{sh} y| \quad \text{и} \quad |\cos iy| = \operatorname{ch} y,$$

откуда и следует, что на мнимой оси функции $\sin z$ и $\cos z$ не ограничены по абсолютной величине.

Заметим, что функции $\operatorname{ch} z$ и $\cos z$ в силу формулы $\operatorname{ch} z = \cos iz$ получаются одна из другой умножением их аргумента на число i. Геометрически это означает поворот координатных осей в комплексной плоскости на прямой угол. Иначе говоря, в комплексной области функции $\operatorname{ch} z$ и $\cos z$, как функции точки, являются одной и той же функцией, записанной в разных координатных системах, получающихся одна из другой поворотом на прямой угол! Подобное обстоятельство имеет место и для функций $\operatorname{sh} z$ и $\sin z$.

В качестве свойства нового типа у показательной функции в комплексной области укажем еще на ее периодичность*. Именно, докажем, что функция e^z имеет период $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} \underset{(33.42)}{=} e^z e^{2\pi i} \underset{(33.52)}{=} e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

Покажем еще, что множеством значений показательной функции $w = e^z$ является вся комплексная плоскость за исключением точки $z = 0$.

В самом деле, каково бы ни было число $w = \rho e^{i\psi}$, $\rho \neq 0$, существует такое $z = x + yi$, что $w = e^z$, т. е. $\rho e^{i\psi} = e^x e^{iy}$. Очевидно, что это имеет место, например, при $x = \ln \rho$, $y = \psi$.

4. Разложение в ряд функции $\ln(1 + x)$. Формула Тейлора для $\ln(1 + x)$ имеет вид (см. п. 13.3)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

* Если функция f определена на некотором множестве чисел (вообще говоря, комплексных) X, то число $T \in \boldsymbol{C}$ называется ее *периодом*, если для каждого $x \in X$ имеем $x \pm T \in X$ и $f(x + T) = f(x)$. Функция, имеющая период, называется *периодической*.

Запишем остаточный член $r_n(x)$ в форме Лагранжа. Заметив, что

$$[\ln(1+x)]^{(n+1)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}},$$

получим

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $0 < \frac{1}{1+\theta x} \leqslant 1$ и поэтому $|r_n(x)| < \frac{1}{n+1}$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \qquad (33.53)$$

Если же $-1 < x < 0$, то целесообразно записать остаточный член $r_n(x)$ в форме Коши:

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}.$$

В этом случае

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} = \frac{1-\theta}{1-\theta|x|} < 1,$$

так как в числителе дроби $\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}$ из единицы вычитается число большее, чем в знаменателе; кроме того,

$$\frac{1}{1+\theta x} = \frac{1}{1-\theta|x|} < \frac{1}{1-|x|},$$

поэтому

$$|r_n(x)| \leqslant \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \frac{1}{|1+\theta x|}|x|^{n+1} \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

откуда при $-1 < x < 0$ также получаем (33.53).

Таким образом, для любой точки x полуинтервала $(-1, +1]$ имеет место разложение

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}. \qquad (33.54)$$

При $x = -1$ ряд в правой части равенства (33.54) отличается от гармонического ряда лишь множителем -1 и поэтому расходится. Расходится он также и при всех x таких, что $|x| > 1$, так как в этом случае n-й член ряда (33.54) не стремится к нулю, более того (см. п. 12.2),

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^n}{n}\right| = +\infty.$$

5. Разложение в ряд степени бинома $(1+x)^\alpha$. Формула Тейлора для степени бинома имеет вид (см. п. 13.3)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(x), \ \ \alpha \in \boldsymbol{R},\ x > -1. \qquad (33.55)$$

Рассмотрим соответствующий ряд (называемый биномиальным рядом с показателем α):

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\,\dots\,(\alpha-n+1)}{n!}x^n. \qquad (33.56)$$

Если α — неотрицательное целое, то ряд (33.56) содержит конечное число членов, отличных от нуля, и, следовательно, сходится при всех x.

Рассмотрим теперь случай, когда α не является неотрицательным целым. В этом случае в ряде (33.56) все члены отличны от нуля при $x \neq 0$.

Для исследования абсолютной сходимости ряда (33.56) используем признак Даламбера. Иначе говоря, применим признак Даламбера к ряду с n-м членом

$$u_n = \left|\frac{\alpha(\alpha+1)\,\dots\,(\alpha-n+1)}{n!}x^n\right|.$$

Замечая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}x\right| = |x|$, получаем, что ряд (33.56) абсолютно, а значит, и просто сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$.

Однако из одного лишь факта сходимости биномиального ряда (33.56) при $|x| < 1$ нельзя еще сделать заключение о том, что его сумма равна $(1 + x)^\alpha$. Для этого надо доказать, что в формуле (33.55) $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ и $|x| < 1$.

Замечая, что

$$((1+x)^\alpha)^{(n+1)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1},$$

запишем остаточный член $r_n(x)$ формулы (33.55) в форме Коши:

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\,\dots\,(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1$$

(θ зависит от x и от n). Положим

$$A_n(x) = \frac{(\alpha-1)\,\dots\,[(\alpha-1)-(n-1)]}{n!}x^n,$$

$$B_n(x) = \alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}, \quad C_n(x) = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n;$$

тогда

$$r_n(x) = A_n(x)B_n(x)C_n(x).$$

Очевидно, $A_n(x)$ является общим членом биномиального ряда с показателем $\alpha - 1$ и, следовательно, в силу доказанной выше сходимости биномиального ряда при $|x| < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x) = 0, \quad |x| < 1.$$

Далее, из того, что $1 - |x| < 1 + \theta x < 1 + |x|$, следует, что значения $|B_n(x)|$ заключены между величинами

$$|\alpha x|(1 - |x|)^{\alpha - 1} \quad \text{и} \quad |\alpha x|(1 + |x|)^{\alpha - 1},$$

не зависящими от θ, т. е. последовательность $\{B_n(x)\}$ при фиксированном $x \in (-1, 1)$ ограничена. Наконец,

$$|C_n(x)| = \left|\frac{1 - \theta}{1 + \theta x}\right|^n \leqslant \frac{1 - \theta}{1 - \theta|x|} < 1.$$

Из установленных свойств $A_n(x)$, $B_n(x)$ и $C_n(x)$ следует, что

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0, \quad |x| < 1.$$

Таким образом, для любого $x \in (-1, 1)$ справедливо равенство

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n = 1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n.$$

Задача 4. Доказать, что: 1) в точке $x = 1$ при $\alpha > -1$ биномиальный ряд сходится, а при $\alpha \leqslant -1$ — расходится;

2) в точке $x = -1$ при $\alpha \geqslant 0$ биномиальный ряд абсолютно сходится, а при $\alpha < 0$ — расходится.

При этом каждый раз, когда биномиальный ряд (33.56) сходится, его сумма равна $(1 + x)^\alpha$.

6. Логарифмическая функция в комплексной области. Функция $w = w(z)$, обратная показательной функции e^w, т. е. определяемая равенством $e^w = z$, называется *логарифмической* и обозначается $\operatorname{Ln} z$.

Таким образом, для любого $z \neq 0$ имеем $e^{\operatorname{Ln} z} = z$.

Выше было показано, что множеством значений показательной функции e^z является вся комплексная плоскость за исключением точки $z = 0$, поэтому это же множество является и областью определения логарифмической функции.

В силу периодичности показательной функции, логарифмическая функция является многозначной: если при данном $z \neq 0$ комплексное число w — значение $\operatorname{Ln} z$, то всякое комплексное число вида $w + 2\pi n i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, также является значением $\operatorname{Ln} z$, так как

$$e^{w + 2\pi n i} = e^w.$$

Если $w = u + iv$, то

$$z = e^w = e^{u + iv} = e^u e^{iv} = e^u(\cos v + i \sin v),$$

поэтому

$$|z| = e^u, \quad \operatorname{Arg} z = v + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Следовательно, $u = \ln |z|$, и если φ — какое-либо значение аргумента z, то $v = \varphi + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Таким образом, все значения $\operatorname{Ln} z$, $z \neq 0$, задаются формулой

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + (\varphi + 2\pi n)i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \ z \neq 0.$$

Если значение аргумента φ числа $z \neq 0$ выбирать всегда на полуинтервале $(-\pi, \pi]$, т. е. считать, что $\varphi = \arg z$ (см. п. 19.1), то значение логарифма $\operatorname{Ln} z$ определяется однозначно. Однозначная функция, ставящая в соответствие числу z указанное значение $\operatorname{Ln} z$, обозначается $\ln z$ и называется *главной ветвью логарифма*. Итак, если $z \neq 0$ и

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi, \tag{33.57}$$

то

$$\ln z = \ln r + i\varphi. \tag{33.58}$$

Отсюда следует, что если $z = x + iy$ и $-\pi < y \leqslant \pi$, то

$$\ln e^z = z.$$

Если $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, то

$$\ln z_1 z_2 = \ln z_1 + \ln z_2, \ \ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2. \tag{33.59}$$

Эти формулы непосредственно вытекают из формулы (33.58) и правил умножения и деления комплексных чисел. Например, для первой формулы (33.59) имеем

$$-\pi < \arg z_1 + \arg z_2 = \arg z_1 z_2 \leqslant \pi,$$

поэтому

$$\ln z_1 z_2 = \ln |z_1 z_2| + i \arg z_1 z_2 = \ln |z_1| + \ln |z_2| + i(\arg z_1 + \arg z_2) =$$
$$= (\ln |z_1| + i \arg z_1) + (\ln |z_2| + i \arg z_2) = \ln z_1 + \ln z_2.$$

Если $|z - 1| \leqslant 1$, $z \neq 0$, то можно показать, что функция $\ln z$ раскладывается в ряд по степеням $z - 1$:

$$\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}, \quad |z - 1| \leqslant 1, \quad z \neq 0.$$

Заменив в этом разложении z на $1 + z$, получим равносильную формулу

$$\ln(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| \leqslant 1, \quad z \neq -1. \tag{33.60}$$

Естественный вывод этой формулы производится с помощью методов комплексного анализа, изложение которых выходит за рамки данной книги. Впрочем, ее можно получить и методами, рассматриваемыми в нашем курсе. Это будет сделано в п. 55.13.

Зная для комплексного переменного z функции e^z и $\mathrm{Ln}\, z$, можно определить степень w^z комплексного числа w с комплексным показателем z по формуле

$$w^z \stackrel{\text{def}}{=} e^{z \mathrm{Ln}\, w}.$$

В силу многозначности логарифма, степень w^z является многозначной функцией от z.

УПРАЖНЕНИЕ 15. Доказать, что все значения i^i являются действительными числами.

33.7. Методы разложения функций в степенные ряды

Дифференцируя или интегрируя известные разложения в ряд Тейлора, можно получать разложения новых функций в степенные ряды. Так, например, интегрируя формулу геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^n t^n + \ldots$$

в пределах от 0 до x, $|x| < 1$ (что законно, так как ряд в правой части этого равенства равномерно сходится на отрезке с концами в точках 0 и x при $|x| < 1$), получим известную уже формулу (33.54):

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots .$$

Раньше эта формула была доказана на полуинтервале $(-1; 1]$, теперь только для интервала $(-1; 1)$. Однако, в силу второй теоремы Абеля о степенных рядах (п. 33.1), из справедливости формулы (33.54) на интервале $(-1; 1)$ сразу следует ее справедливость и при $x = 1$. Действительно, ряд в правой части этой формулы сходится при $x = 1$ и, следовательно, его сумма непрерывна в этой точке (см. теорему 3 в п. 33.1), функция $\ln(1 + x)$ также непрерывна при $x = 1$, поэтому в обеих частях равенства (33.54) (если известно, что оно справедливо на интервале $(-1; 1)$) можно перейти к пределу при $x \to 1 - 0$ и тем самым доказать его справедливость и при $x = 1$:

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

В результате дифференцирования или интегрирования заданного степенного ряда иногда удается получить ряд, сумма которого уже известна; это позволяет вычислить и сумму исходного степенного ряда.

Примеры. 1. Найдем разложение функции $\arcsin x$ в ряд. Заметив, что

$$(\arcsin)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

разложим $(\arcsin x)'$ в ряд по формуле разложения степени бинома (см. п. 33.6):

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}. \qquad (33.61)$$

Радиус сходимости получившегося ряда равен единице (см. там же). Интегрируя ряд (33.61) от 0 до $|x| < 1$, получим

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

2. Разложим функцию $\operatorname{arctg} x$ в степенной ряд и с помощью него найдем числовой ряд, сумма которого равна π.

Поступая при $|x| < 1$ аналогично примеру 1, имеем

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \qquad (33.62)$$

Заметим, что полученный ряд при $x = \pm 1$ по признаку Лейбница (см. теорему 11 п. 30.9) сходится, поскольку сходится знакопеременный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Функция $\operatorname{arctg} x$ непрерывна при $x = \pm 1$, поэтому, согласно второй теореме Абеля для степенных рядов (см. теорему 3 п. 33.1), сумма ряда (33.62), являясь непрерывной функцией на отрезке $[-1; 1]$ и совпадая с $\operatorname{arctg} x$ на интервале $(-1; +1)$, совпадает с ним и в концевых точках $x = \pm 1$. Иначе говоря, разложение (33.62) справедливо для отрезка $[-1, +1]$. Взяв в этом разложении, например, $x = 1$ и заметив, что $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, получим

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \qquad (33.63)$$

Этот ряд называется *рядом Лейбница*.

Отметим, что арктангенс определен на всей действительной числовой оси, в частности и вне отрезка $[-1, 1]$. Однако его разложение в степенной ряд (33.63) справедливо только на этом отрезке. Вне этого отрезка ряд (33.63) расходится, в чем легко убедиться, найдя его радиус сходимости, например, по формуле (33.9). Анализ этого явления проводится в теории функций комплексного переменного.

3. Найдем сумму ряда

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n. \qquad (33.64)$$

Радиус сходимости этого ряда равен единице. В этом легко убедиться, например, по признаку Даламбера

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx}\right| = |x|.$$

Следовательно, ряд (33.64) абсолютно сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Из (33.64) следует, что

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad |x| < 1.$$

Проинтегрируем этот ряд почленно от 0 до x, $|x| < 1$,

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

и затем продифференцируем получившееся тождество:

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{d}{dx}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

В результате получаем

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

4. Найдем сумму ряда:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}. \qquad (33.65)$$

Радиус сходимости этого ряда равен единице; в этом легко убедиться, например, тем же способом, что и в случае ряда (33.64). Продифференцировав ряд (33.65) почленно

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

и использовав разложение логарифма (см. п. 33.6), получим

$$xS'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad |x| < 1, \quad \text{или} \quad S'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Принимая во внимание, что $S(0) = 0$, окончательно имеем

$$S(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt.$$

Таким образом, здесь ответ выражается не в элементарных функциях.

УПРАЖНЕНИЯ. 16. Разложить в степенной ряд функцию $(\arcsin x)^2$.

17. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n$.

5. При разложении рациональных функций в ряд Тейлора удобно использовать их разложение на элементарные дроби (см. п. 19.6). Поясним этот метод на примере: найдем разложение функции

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

в ряд Тейлора в окрестностях точек $z_0 = 0$, $z_0 = \frac{3}{2}$ и $z_0 = 4$. Разложив функцию $f(z)$ на элементарные дроби, получим

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{2}{2-z}.$$

Найдем сначала ряд Тейлора для $f(z)$ в окрестности $z_0 = 0$. Для этого заметим, что дроби $\frac{1}{1-z}$ и $\frac{2}{2-z} = \frac{1}{1-z/2}$ представляют собой суммы бесконечных геометрических прогрессий $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$ со знаменателями z и $\frac{z}{2}$ при условии, что $|z| < 1$ и, соответственно, что $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$. Оба этих условия выполняются, когда выполняется первое. Таким образом,

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) z^n, \quad |z| < 1.$$

Это и есть разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$, причем радиус сходимости получившегося ряда равен 1. Действительно, в силу доказанного, он не может быть меньше 1 (полученный степенной ряд сходится при $|z| < 1$), с другой стороны, он не может быть и больше 1, так как на расстоянии, равном единице от точки $z_0 = 0$, имеется точка $z_1 = 1$, для которой $\lim\limits_{z \to z_1} f(x) = \infty$, и поэтому разложение функции $f(z)$ в степенной ряд не может сходиться в точке z_1.

Для получения ряда Тейлора функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = \frac{3}{2}$ снова воспользуемся суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, но проделаем это иначе, вы-

деляя в знаменателях элементарных дробей, на которые разложена дробь $f(z)$, члены $z-\frac{3}{2}$:

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{1-z}-\frac{2}{2-z}=-\frac{1}{\frac{1}{2}+\left(z-\frac{3}{2}\right)}-\frac{2}{\frac{1}{2}-\left(z-\frac{3}{2}\right)}=$$

$$=-\frac{2}{1+2\left(z-\frac{3}{2}\right)}-\frac{4}{1-2\left(z-\frac{3}{2}\right)}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,2^n\left(z-\frac{3}{2}\right)^n-$$

$$-4\sum_{n=0}^{\infty}2^n\left(z-\frac{3}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}[(-1)^{n+1}-2]\left(z-\frac{3}{2}\right)^n.$$

Эта выкладка справедлива при условии, что $2\left|z-\frac{3}{2}\right|<1$ (абсолютная величина знаменателя рассматриваемых геометрических прогрессий меньше единицы), т. е. если $\left|z-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{2}$. Рассуждая, как и в случае $z_0=0$, получим, что радиус сходимости получившегося ряда равен $\frac{1}{2}$.

Наконец, в случае $z_0=4$ имеем

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{1-z}-\frac{2}{2-z}=\frac{1}{-3-(z-4)}-\frac{2}{-2-(z-4)}=$$

$$=-\frac{1}{3\left(1+\frac{z-4}{3}\right)}+\frac{1}{1+\frac{z-4}{2}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-4)^n}{3^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-4)^n}{2^n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{1}{2^n}\right](z-4)^n.$$

Все это справедливо, когда $\left|\frac{z-4}{2}\right|<1$, т. е. при $|z-4|<2$. Отсюда, как и выше, следует, что радиус сходимости получившегося ряда равен 2.

Обратим внимание на то, что во всех трех случаях радиус сходимости получившихся степенных рядов равен расстоянию от точки z_0, в окрестности которой искалось указанное разложение, до ближайшей от нее «особой точки» функции. В данном случае до такой точки z_1, что $\lim\limits_{z\to z_1}f(z)=\infty$. В случае $z_0=0$ такой точкой является 1 и $|z_0-z_1|=1$; в случае $z_0=3/2$ это точка $z_1=1$ или $z_1=2$ и здесь $|z_1-z_0|=1/2$; наконец, при $z_0=4$ имеем $z_1=2$ и $|z_1-z_0|=2$. Это не случайное явление, оно подробно изучается в теории функций комплексного переменного.

Рассмотренным методом можно раскладывать в соответствующих областях рациональные функции в ряды не только по положительным, но и по отрицательным степеням z.

Например, при $|z| > 2$ имеем

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{2}{2-z} = -\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)\frac{1}{z^{n+1}},$$

а в кольце $1 < |z| < 2$

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}.$$

В первом случае получившееся разложение содержит только отрицательные степени z, во втором — как положительные, так и отрицательные. Общая теория подобных разложений также изучается в теории функций комплексного переменного.

К разложению рациональных дробей в степенные ряды сводится и разложение в такие ряды функций вида $\ln\frac{P(x)}{Q(x)}$, $\operatorname{arctg}\frac{P(x)}{Q(x)}$ и $\operatorname{arctg}\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — некоторые многочлены. Для получения нужных разложений можно продифференцировать данные функции, в результате получатся рациональные дроби. Разложив эти рациональные дроби в степенные ряды и проинтегрировав их, будем иметь искомые разложения.

Иногда сумму ряда удается найти, применив какой-нибудь искусственный прием. Впрочем, следует отдавать отчет в том, что понятие «искусственный прием» весьма относительно: по поводу этого Г. Полиа и Г. Сеге в предисловии к своему задачнику (Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. — М.: Наука, 1956) писали: «Идея, примененная однажды, порождает искусственный прием, примененная дважды, она становится методом».

6. Найдем сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2n+1} \qquad (33.66)$$

и область его сходимости. При $|x| < 1$ этот ряд сходится абсолютно, так как

$$\left|(-1)^n \frac{x^n}{2n+1}\right| \leqslant |x|^n,$$

при $|x| > 1$ он расходится, поскольку его общий член не стремится к нулю; при $x = 1$ он сходится по признаку Лейбница; при $x = -1$ расходится, что, например, следует, согласно интегральному признаку сходимости рядов, из расходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{2x+1}$. Заметим (это и есть искусственный прием), что

$$\frac{1}{2n+1} = \int\limits_0^1 t^{2n}\, dt,$$

и преобразуем ряд (33.66) следующим образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^1 (-xt^2)^n\, dt. \qquad (33.67)$$

Для любого $t \in [1, 1]$ выполняется неравенство $|-xt^2|^n \leqslant |x|^n$. Поэтому если $|x| < 1$, то, по признаку Вейерштрасса, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-xt^2)^n \qquad (33.68)$$

равномерно сходится (по t) на отрезке $[0, 1]$, следовательно, его можно почленно интегрировать. Его можно почленно интегрировать и при $x = 1$, хотя в этом случае ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n$ не сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$, так как он даже расходится при $t = 1$. Возможность почленного дифференцирования ряда (33.68) при $x = 1$ можно проверить, например, непосредственно:

$$\int\limits_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n\, dt = \int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^1 (-t^2)^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \underset{(33.63)}{=} \frac{\pi}{4}$$

(при интегрировании функции $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n$ по отрезку $[0, 1]$ достаточно рассматривать ее значения только на полуинтервале $[0, 1)$, которые по формуле для бесконечно убывающей геометрической прогрессии равны $\frac{1}{1+t^2}$ и, следовательно, ограничены на указанном полуинтервале. Значение этой функции в точке $t = 1$ можно выбирать произвольно, так как это не влияет ни на интегрируемость функции, ни на значение интеграла, когда функция интегрируема).

Итак, для всех $x \in (-1, 1]$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n+1} \underset{(33.67)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-xt^2)^n \, dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-xt^2)^n \, dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+xt^2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, & \text{если} \quad 0 < x < 1, \\ 1, \text{ если } x = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} \displaystyle\int_0^{\sqrt{|x|}} \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{|x|}} \ln\frac{1+\sqrt{|x|}}{1-\sqrt{|x|}}, & \text{если} \quad -1 < x < 0. \end{cases} \qquad (33.69)$$

При выводе этой формулы было использовано соотношение (33.63), т. е. известное ранее частное значение суммы ряда (33.66) при $x = 1$. Это можно было и не делать, но тогда мы получили бы формулу (33.69) только при $|x| < 1$, из которой следует, что сумма $s(x)$ степенного ряда (33.66) является непрерывной на интервале $(-1, 1)$ функцией и имеет конечный предел

$$\lim_{x \to 1} s(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}. \qquad (33.70)$$

Ряд (33.66) сходится при $x = 1$, поэтому, в силу второй теоремы Абеля (см. теорему 3 в п. 33.1), его сумма непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и, следовательно, при $x = 1$ совпадает со значением предела (33.70), т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4},$$

и мы тем самым, наоборот, получили из формулы (33.69), доказанной только при $|x| < 1$, разложение (33.63).

УПРАЖНЕНИЕ 18. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$ в области его сходимости.

Указание. Воспользоваться соотношением

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right).$$

33.8. Формула Стирлинга

С помощью разложения логарифмической функции в степенной ряд можно легко найти формулу, описывающую асимптотическое поведение факториала $n!$ при $n \to \infty$. Она называется *формулой Стирлинга** и может быть записана в виде

$$n! \sim \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}, \quad n \to \infty; \qquad (33.71)$$

* Дж. Стирлинг (1692—1770) — английский математик.

согласно определению асимптотического равенства для последовательностей (см. п. 19.3), это означает, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}} = 1.$$

Из разложения

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leqslant 1,$$

следует, что

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x^n}{n}\right) = 2x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k+1}.$$

Положив здесь $x = \frac{1}{2n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, получим

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}} = \frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots\right] >$$

$$> \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}},$$

откуда

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1,$$

или, потенцируя и принимая во внимание, что функция $\ln x$ — возрастающая,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+(1/2)} > e. \tag{33.72}$$

Положим

$$x_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!e^n}{n^{n+(1/2)}}; \tag{33.73}$$

так как, согласно (33.72),

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+(1/2)} > 1,$$

то $x_n > x_{n+1}$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ убывает и, кроме того, она ограничена снизу $x_n \geqslant 0$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{n \to \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} a.$$

Поэтому

$$x_n = a(1+\varepsilon_n), \tag{33.74}$$

где $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$.

Покажем, что $a \neq 0$. Так как

$$\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots<\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}}=\frac{1}{12n(n+1)},$$

то

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)},$$

следовательно,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Поэтому

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}}=\frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}},$$

т. е.

$$x_n e^{-\frac{1}{12n}}<x_{n+1}\,e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

Таким образом, последовательность $y_n = x_n e^{-\frac{1}{12n}}$, $n = 1, 2, \ldots$, возрастает, и так как, очевидно, $y_n < x_n$, то она ограничена сверху и, следовательно, имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{12n}}=a.$$

Кроме того, при любом n справедливо неравенство $a > y_n > 0$, поэтому $a > 0$.

Подставим (33.74) в (33.73):

$$n!=a\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}(1+\varepsilon_n). \qquad (33.75)$$

Для того чтобы получить формулу (33.71), осталось лишь показать, что $a=\sqrt{2\pi}$. По формуле Валлиса (см. (26.8) в п. 26.2),

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2, \qquad (33.76)$$

а согласно (33.75),

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}=a\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{(1+\varepsilon_n)^2}{1+\varepsilon_{2n}}.$$

Подставив это выражение в (33.76), получим

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} a^2 \frac{n}{2} \frac{(1+\varepsilon_n)^4}{(1+\varepsilon_{2n})^2} = \frac{a^2}{4},$$

откуда $a = \sqrt{2\pi}$. □

33.9*. Формула и ряд Тейлора для векторных функций

Рассмотрим векторную функцию $\boldsymbol{f}$: $[a, b] \to \boldsymbol{R}^3$, где $\boldsymbol{R}^3$ — трехмерное векторное пространство. Как уже отмечалось, на векторные функции обобщаются понятия предела, непрерывности, производной, дифференциала и интеграла (см. § 15), на которые переносятся многие свойства этих понятий, справедливые для числовых функций. Однако далеко не для всех свойств это имеет место. Так, в п. 15.2 было показано, что утверждение, аналогичное формуле конечных приращений Лагранжа, уже не справедливо для векторных функций. Поэтому не справедливо, конечно, и ее обобщение в виде формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Покажем, что для векторных функций справедлива формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть функция* $\boldsymbol{f}$: $(t_0 + h, t_0 - h) \to \boldsymbol{R}^3$ *непрерывна вместе со всеми своими производными до порядка* $n + 1$ *включительно на интервале* $(t_0 - h, t_0 + h)$, $h > 0$. *Тогда для любого* $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$ *справедлива формула*

$$\boldsymbol{f}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \boldsymbol{f}^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} (t - \tau)^n \boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)\, d\tau. \quad (33.77)$$

СЛЕДСТВИЕ.

$$\left| \boldsymbol{f}(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \boldsymbol{f}^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k \right| \leqslant \frac{1}{n!}(t - t_0)^{n+1} \sup_{(t_0 - h,\, t_0 + h)} \left| \boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau) \right|,$$

где $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$.

Доказательство теоремы. Прежде всего напомним, что если

$$\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), \quad (33.78)$$

то

$$\boldsymbol{f}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)), \quad t \in (t_0 - h, t_0 + h), \quad (33.79)$$

$$\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\tau)\, d\tau = \left(\int_{t_0}^{t} f_1(\tau)\, d\tau, \int_{t_0}^{t} f_2(\tau)\, d\tau, \int_{t_0}^{t} f_3(\tau)\, d\tau \right). \quad (33.80)$$

Из предположений теоремы следует, что каждая координатная функция f_i, $i = 1, 2, 3$, непрерывна на интервале $(t_0 - h, t_0 + h)$ вместе со всеми своими производными до порядка $n + 1$ включительно, поэтому для нее справедлива формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f_i(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f_i^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t} (t - \tau)^n f_i^{(n+1)}(\tau)\, d\tau, \quad i = 1, 2, 3.$$

Отсюда, в силу формул (33.79) и (33.80), и следует сразу справедливость формулы (33.77). □

Следствие вытекает из неравенства

$$\left|\int_{t_0}^{t} (t - \tau)^n \boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)\, d\tau\right| \leqslant |t - t_0|^n \left|\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant |t - t_0|^n \sup_{(t_0 - h,\, t_0 + h)} |\boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)| \left|\int_{t_0}^{t} d\tau\right| =$$

$$= |t - t_0|^{n+1} \sup_{(t_0 - h,\, t_0 + h)} |\boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)|. \ \square$$

Для векторных функций, как и для скалярных, справедлива формула Тейлора и с остаточным членом в форме Пеано: если функция $\boldsymbol{f}\colon (t_0 - h,\ t_0 + h) \to \boldsymbol{R}^3$ имеет в точке t_0 производную порядка n, то

$$\boldsymbol{f}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \boldsymbol{f}^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k + o((t \sim t_0)^n). \qquad (33.81)$$

Это также сразу следует из того, что для каждой координатной функции f_i, $i = 1, 2, 3$, в предположениях теоремы имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки t_0 (см. п. 13.1).

Если векторная функция $\boldsymbol{f}\colon (t_0 - h, t_0 + h) \to \boldsymbol{R}^3$ имеет в точке t_0 производные всех порядков и для любого $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$ выполняется условие

$$\lim_{n \to \infty} \left[\boldsymbol{f}(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \boldsymbol{f}^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k\right] = 0,$$

то на интервале $(t_0 - h, t_0 + h)$ функция $\boldsymbol{f}$ раскладывается в степенной ряд с векторными коэффициентами

$$\boldsymbol{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \boldsymbol{f}^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n,$$

называемый ее *рядом Тейлора*.

33.10*. Асимптотические степенные ряды

Известно (см. п. 13.1), что если функция f определена в окрестности точки x_0 и n раз в ней дифференцируема, то существует такой многочлен $P_n(x)$ степени, не большей n, а именно многочлен Тейлора, что

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0, \quad x = 1, 2, \ldots . \qquad (33.82)$$

При этом

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \qquad (33.83)$$

Из (33.82) и (33.83) следует, что разность $f(x) - P_{n-1}(x)$ представима в виде

$$f(x) - P_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

и тем самым имеет место асимптотическое равенство

$$f(x) - P_{n-1}(x) \sim \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \to x_0.$$

Таким образом, члены многочлена Тейлора $P_n(x)$ (ряда Тейлора, если функция f бесконечно дифференцируема в точке x_0) можно последовательно определить как слагаемые вида $a_n(x - x_0)^n$, асимптотически равные разности $f(x) - P_{n-1}(x)$ при $x \to x_0$.

Аналогично можно поступать и при изучении функции при стремлении ее аргумента к бесконечности. Пусть, для определенности, функция f определена при $x \geqslant a$ и существует конечный предел

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a_0, \qquad (33.84)$$

следовательно, $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - a_0] = 0$.

Иногда возникает вопрос: как именно разность $f(x) - a_0$ стремится к нулю, каков порядок убывания этой разности? Может случиться, что указанная разность имеет по крайней мере порядок $\frac{1}{x}$ и, более того, что существует такое число a_1, что

$$f(x) - a_0 \sim \frac{a_1}{x}, \quad x \to +\infty, \qquad (33.85)$$

т. е. (см. теорему 1 в п. 8.3)

$$f(x) - a_0 = \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty, \qquad (33.86)$$

откуда

$$x[f(x) - a_0] = a_1 + xo\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty,$$

а так как, в силу определения символа o, $xo\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$ при $x \to +\infty$, то

$$a_1 = \lim_{x \to +\infty} x[f(x) - a_0]. \qquad (33.87)$$

Наоборот, из (33.87) следует, что

$$x[f(x) - a_0] = a_1 + \varepsilon(x), \quad \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0,$$

и, следовательно,

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty,$$

т. е. выполняется асимптотическое равенство (33.86). Если указанное a_1 найдено, то часто бывает нужно найти, как говорят, «следующий член асимптотического разложения» функции f, т. е. асимптотическое поведение разности $f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x}\right)$ при $x \to +\infty$. Эта разность, согласно (33.86), представляет собой не что иное, как $o\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \to +\infty$. Может случиться, что указанная разность имеет по крайней мере порядок $\frac{1}{x^2}$ и, более того, что существует такое число a_2, что

$$f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x}\right) \sim \frac{a_2}{x^2},$$

или, что то же,

$$f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x}\right) = \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to +\infty.$$

Это условие равносильно существованию предела

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left[f(x) - (a_0 + \frac{a_1}{x})\right] = a_2.$$

Вообще, если

$$S_{n-1}(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (33.88)$$

— такой многочлен степени, не большей $n - 1$, относительно переменной $\frac{1}{x}$, что

$$f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{x^{n-2}}\right) \sim \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}, \quad x \to +\infty, n = 2, 3, \ldots,$$

то может случиться, что существует такая постоянная a_n, для которой имеет место асимптотическое равенство

$$f(x) - S_{n-1}(x) \sim \frac{a_n}{x^n}, \quad x \to +\infty. \tag{33.89}$$

Это условие равносильно следующему условию:

$$f(x) - S_{n-1}(x) = \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty, \tag{33.90}$$

которое, полагая

$$S_n(x) = S_{n-1}(x) + \frac{a_n}{x^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x_k}, \tag{33.91}$$

можно переписать в виде

$$f(x) - S_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty, \tag{33.92}$$

или, что то же, в виде

$$\lim_{x \to +\infty} x^n[f(x) - S_n(x)] = 0. \tag{33.93}$$

Как и выше при $n = 1$, легко показать, что условие (33.90) равносильно существованию конечного предела

$$\lim_{x \to +\infty} x^n[f(x) - S_{n-1}(x)] = a_n. \tag{33.94}$$

Если указанные пределы a_n существуют для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$, то можно образовать ряд

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \ldots . \tag{33.95}$$

Ряды такого вида можно также назвать *степенными рядами*, точнее, степенными рядами по целым отрицательным степеням переменной x.

Определение 5. *Пусть функция f определена при $x \geqslant a$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a_0$. Если существует ряд вида* (33.95), *частичные суммы* (33.98) *которого удовлетворяют условию* (33.89), *либо, что равносильно, одному из условий* (33.92) *или* (33.93), *то этот ряд называется асимптотическим рядом* (*асимптотическим разложением*) *в смысле Пуанкаре** *функции f при $x \to +\infty$.*

В этом случае пишут

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \to +\infty. \tag{33.96}$$

* А. Пуанкаре (1854—1912) — французский математик.

Подчеркнем, что здесь знак ~ означает не асимптотическое равенство в том смысле, как оно, например, понимается в формуле (33.89), т. е. в смысле определения 3 п. 8.2, а соответствие: ряд (33.95) соответствует функции f.

Как было отмечено выше, условие (33.90) равносильно условию (33.94), поэтому если у функции f существует при $x \to +\infty$ асимптотический ряд (33.95), то его коэффициенты a_n, $n = 1, 2, \ldots$, могут быть последовательно найдены по формулам (33.94). При $n = 0$ следует воспользоваться формулой (33.84). Отсюда следует, что если у функции имеется при $x \to +\infty$ асимптотический ряд, то он единствен и его коэффициенты выражаются по формулам (33.84) и (33.94).

При разложении функции в степенной ряд была доказана также единственность степенно́го ряда, в который раскладывается функция, а именно было доказано совпадение этого ряда с ее рядом Тейлора. Однако там было отмечено, что один и тот же степенной ряд может являться рядом Тейлора разных функций. Подобная ситуация имеет место и для асимптотических рядов: один и тот же ряд вида (33.95) может оказаться асимптотическим рядом при $x \to +\infty$ разных функций. Например, нулевой ряд, т. е. ряд, все коэффициенты которого равны нулю: $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, является при $x \to +\infty$ как асимптотическим рядом функции, равной нулю во всех точках числовой оси: $f_1(x) = 0$, $-\infty < x < +\infty$, так и функции $f_2(x) = e^{-x}$, в чем легко убедиться, вычислив в этих случаях последовательно пределы (33.94).

В отличие от разложения функции в степенной ряд по неотрицательным целым степеням аргумента, при котором суммой степенного ряда является заданная функция и, следовательно, рассматриваемый степенной ряд сходится, при построении асимптотического ряда функции может случиться, что полученный ряд не только не сходится к данной функции, а вообще расходится во всех точках. Тем не менее асимптотический ряд (33.96) функции является полезным инструментом для ее изучения, в частности для вычисления ее значений. Это, очевидно, связано с тем, что частные суммы асимптотического ряда (33.96) функции, в силу условия (33.92), достаточно хорошо приближают саму функцию, причем тем лучше, чем больше x.

Принципиальное отличие разложения функции в асимптотический ряд от разложения в обычный функциональный ряд состоит в том, что при обычном разложении функции в ряд его остаток в каждой точке стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. стремится к нулю абсолютная погрешность приближения функ-

ции частичными суммами ряда, тогда как при разложении в асимптотический ряд этого может не быть, но заведомо стремится к нулю при $x \to +\infty$ относительная погрешность приближения функции частичными суммами асимптотического ряда, т. е.:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - S_n(x)}{x^{-n}} \underset{(33.93)}{=} 0.$$

Разность $f(x) - S_n(x)$ бесконечно мала при $n \to \infty$ по сравнению с каждым (в том числе и последним) членом частичной суммы $S_n(x)$ асимптотического ряда, причем увеличение числа членов приводит к более точным асимптотическим формулам.

Поясним сказанное на примере функции

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t}\, dt, \quad x > 0. \tag{33.97}$$

Интегрируя n раз по частям, получаем

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} + (-1)^n n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\, dt. \tag{33.98}$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \tag{33.99}$$

является асимптотическим разложением функции (33.97). Действительно, если $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$, $n = 1, 2, \ldots$, т. е. $S_n(x)$ — частичные суммы ряда (33.99), то, в силу (33.98), имеем $|f(x) - S_n(x)| = n! \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\, dt$. Проинтегрировав еще раз по частям, получим

$$|f(x) - S_n(x)| = n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\, dt =$$

$$= \frac{n!}{x^{n+1}} - (n+1)! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}\, dt \leqslant \frac{n!}{x^{n+1}} = o\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

т. е. выполняется (33.92).

Вместе с тем по признаку Даламбера легко убедиться, что ряд (33.99) расходится при всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Действительно, полагая $u_n = \frac{(-1)^n(n-1)!}{x^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, получим при $x \neq 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{|x|} = +\infty.$$

Поэтому ряд (33.99) абсолютно расходится при всех $x \neq 0$. Отсюда после замены $x = 1/y$ следует, что степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, (n-1)!\, y^n$ также абсолютно, следовательно, и просто

расходится при $y \neq 0$. Сделав обратную замену $y = 1/x$, получим расходимость ряда (33.99) для всех $x \neq 0$.

Итак, асимптотический ряд (33.99) функции (33.97) расходится во всех точках. Однако, несмотря на это, значения функции (33.97), в силу условия (33.92), могут быть вычислены с большой степенью точности с помощью частичных сумм этого ряда.

Покажем, что если ряд (33.95) сходится к некоторой функции

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \geqslant a > 0, \tag{33.100}$$

то он является и асимптотическим рядом этой функции при $x \to +\infty$. В самом деле, пусть $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}$ и, следовательно, $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$. Покажем, что

$$R_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \to +\infty, \tag{33.101}$$

а потому, тем более, что

$$R_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty,$$

т. е. что выполняется условие (33.92). Для этого рассмотрим функцию $F(t) \overset{\text{def}}{=} f\left(\frac{1}{t}\right)$, $0 < t \leqslant \frac{1}{a}$. В силу (33.100), получим равенство $F(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, в котором ряд в правой части сходится при $0 < t < \frac{1}{a}$, откуда, по теореме Абеля, следует, что он сходится и при всех таких t, что $|t| < \frac{1}{a}$. Если

$$r_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k t^k, \quad |t| < \frac{1}{a},$$

то (см. лемму 1 в п. 33.3) $r_n(t) = O(t^{n+1})$, $t \to 0$. Выполнив здесь замену переменного $t = \frac{1}{x}$, получим (33.101).

В заключение отметим, что условие (33.92) разложения функции в степенной асимптотический ряд можно заменить другим, внешне более сильным, но по существу эквивалентным условием. Сформулируем его в виде леммы.

ЛЕММА 3. *Для того чтобы ряд* (33.95) *являлся асимптотическим при $x \to +\infty$, для функции f необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(x) - S_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \to +\infty, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{33.102}$$

Достаточность этого условия очевидна, так как $O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ (напомним, что подобные равенства читаются только слева направо), следовательно, при выполнении условия (33.102) выполняется (33.92).

Наоборот, если выполнено условие (33.92):

$$f(x) - S_{n+1}(x) = o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \to +\infty,$$

то, поскольку $S_{n+1}(x) = S_n(x) + \frac{a_{n+1}}{x^{n+1}}$, получим

$$f(x) - S_n(x) = \frac{a_{n+1}}{x^{n+1}} + o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \to +\infty. \ \square$$

33.11*. Свойства асимптотических степенных рядов

В этом пункте будут сформулированы и доказаны некоторые основные свойства разложений функций в асимптотические степенные ряды. В дальнейшем (см. п. 54.6) будут рассмотрены более общие, не обязательно степенные, асимптотические ряды. В настоящем пункте будут изучаться только асимптотические разложения функций при $x \to +\infty$ в степенные ряды вида (33.95), поэтому будем их называть просто *асимптотическими разложениями*.

I. *Если*

$$\frac{1}{f(x)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \qquad (33.103)$$

то для любых чисел λ *и* μ

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda a_n + \mu b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty,$$

т. е. асимптотическое разложение линейной комбинации функций, имеющих асимптотическое разложение, равно такой же линейной комбинации асимптотических разложений этих функций.

Действительно, если

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty, \qquad (33.104)$$

то для любых чисел λ и μ

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda a_k + \mu b_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty. \ \square$$

II. *Если имеют место асимптотические разложения* **(33.103)**, *то*

$$f(x)g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}, \quad x \to +\infty,$$

где $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, *т. е. асимптотическое разложение произведения функций, имеющих асимптотические разложения, равно произведению этих разложений, расположенных по возрастающим степеням* $\frac{1}{x}$.

В самом деле, если имеет место (33.104), то

$$f(x)g(x) = \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right)\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right) =$$

$$= a_0 b_0 + \frac{a_0 b_1 + a_1 b_0}{x} + \ldots + \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty. \ \square$$

III. *Если*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \qquad (33.105)$$

и $a_0 \neq 0$, *то функция* $1/f(x)$ *также имеет асимптотическое разложение*

$$\frac{1}{f(x)} \sim \frac{1}{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{x^n}, \quad x \to +\infty,$$

и коэффициент d_n *этого разложения выражается через коэффициенты* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *разложения* (33.105), $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Действительно, из (33.105) следует (см. (33.84)), что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a_0$. Поэтому существует предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0}.$$

Далее, можно последовательно показать существование пределов (33.94) для функции $1/f(x)$, непосредственно вычисляя их. Например,

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a_0}\right) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{a_0}\right) =$$

$$= -\lim_{x \to +\infty} \frac{a_1 + x o\left(\frac{1}{x}\right)}{a_0\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = -\frac{a_1}{a_0^2},$$

т. е. $d_1 = -a_1/a_0^2$.

Аналогично вычисляются $d_2, d_3, \ldots$. $\square$

IV. *Если функция f непрерывна при $x \geqslant a > 0$ и имеет асимптотическое разложение, начинающееся с члена порядка $\frac{1}{x^2}$,*

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \tag{33.106}$$

то

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)x^{n-1}}, \quad x \to +\infty, \tag{33.107}$$

т. е. в указанном случае асимптотические ряды можно почленно интегрировать.

Докажем это. Пусть

$$S_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{x^k}, \quad R_n(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - S_n(x), \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Функции f и S_n непрерывны при $x \geqslant a$, поэтому и функция R_n непрерывна при $x \geqslant a$. В силу (33.106),

$$R_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $x_\varepsilon \geqslant a$, что для всех $x > x_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{x^n}.$$

Отсюда вытекает, во-первых, что интеграл $\int_{x_\varepsilon}^{+\infty} R_n(t)\,dt$, поэтому и интеграл $\int_x^{+\infty} R_n(t)\,dt$, $x > x_\varepsilon$, существуют, а во-вторых, что при $x > x_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$\left| x^{n-1} \int_x^{+\infty} R_n(t)\,dt \right| \leqslant x^{n-1} \int_x^{+\infty} |R_n(t)|\,dt \leqslant \varepsilon x^{n-1} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^n} = \frac{\varepsilon}{n-1},$$

и так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$\lim_{x \to +\infty} x^{n-1} \int_x^{+\infty} R_n(t)\,dt = 0. \tag{33.108}$$

Теперь, интегрируя равенство $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$, получим

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{(k-1)x^{k-1}} + \int_x^{+\infty} R_n(t)\,dt. \tag{33.109}$$

В силу выполнения условия (33.108) для всех $n = 2, 3, \ldots$, равенство (33.109) и означает справедливость асимптотического разложения (33.107) (см. (33.93)). □

V. *Если функция f раскладывается в асимптотический ряд*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \qquad \textbf{(33.110)}$$

и если она имеет при $x \geqslant a$ непрерывную производную, которая также при $x \to +\infty$ раскладывается в асимптотический ряд, то этот ряд получается формальным почленным дифференцированием ряда (33.110):

$$f'(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n}{x^{n+1}}, \quad x \to +\infty. \qquad \textbf{(33.111)}$$

В самом деле, пусть

$$f'(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty. \qquad \textbf{(33.112)}$$

По формуле Ньютона—Лейбница для любых $x \geqslant a$ и $y \geqslant a$

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,dt = \int_x^y \left[b_0 + \frac{b_1}{t} + \left(f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t}\right)\right] dt =$$

$$= b_0(y - x) + b_1 \ln\frac{y}{x} + \int_x^y \left[f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t}\right] dt. \qquad \textbf{(33.113)}$$

Согласно (33.112), $f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $t \to +\infty$. Следовательно, интеграл

$$\int_x^{+\infty} \left[f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t}\right] dt$$

сходится. В силу (33.110), существует конечный предел

$$\lim_{y \to +\infty} f(y) = a_0.$$

Поэтому, переходя к пределу при $y \to +\infty$ в (33.113), убеждаемся в том, что для каждого $x \geqslant a$ существует конечный предел

$$\lim_{y \to +\infty} \left[b_0(y - x) + b_1 \ln\frac{y}{x}\right].$$

Это возможно только в случае, когда $b_0 = b_1 = 0$. Таким образом, равенство (33.113) в пределе перейдет в равенство

$$a_0 - f(x) = \int_x^{+\infty} f'(x)\,dt;$$

при этом, в силу условия $b_0 = b_1 = 0$, из (33.112) имеем

$$f'(x) \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty;$$

отсюда, интегрируя почленно в пределах от x до $+\infty$, согласно свойству IV, получим

$$a_0 - f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{nx^n}, \quad x \to +\infty.$$

Но из (33.110) следует, что

$$a_0 - f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}.$$

Принимая во внимание, что разложение функции при $x \to +\infty$ в асимптотический степенной ряд единственно, и сравнивая получившиеся для функции $a_0 - f(x)$ ряды, найдем, что

$$b_{n+1} = -na_n,\ n = 1, 2, \dots . \square$$

Замечание. Если непрерывно дифференцируемая при $x \geqslant a$ функция f раскладывается при $x \to +\infty$ в асимптотический ряд, то ее производная может не иметь при $x \to +\infty$ асимптотического разложения. Тем самым требование существования асимптотического разложения у производной в предложении V является существенным. В качестве примера рассмотрим функцию $f(x) = e^{-x}\sin e^x$, $-\infty < x < +\infty$. Нетрудно с помощью формул (33.94) убедиться, что функция f при $x \to +\infty$ раскладывается в нулевой асимптотический ряд, т. е. ряд (33.95), у которого $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Ее производная $f'(x) = -e^{-x}\sin e^x + \cos e^x$ заведомо не имеет асимптотического разложения при $x \to +\infty$, так как она даже не имеет предела при $x \to +\infty$.

УПРАЖНЕНИЕ 19. Доказать, что:

а) $\int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \sim \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} -, \dots ,\quad x \to +\infty;$

б) $\int\limits_x^{+\infty} e^{x^2 - t^2}\,dt \sim \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4x^7}, \dots ,\quad x \to +\infty.$

§ 34*
Кратные ряды

34.1. Кратные числовые ряды

В настоящем параграфе рассматриваются так называемые кратные ряды вида

$$\sum_{n_1, \dots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1 \dots n_k}, \tag{34.1}$$

где $u_{n_1 \dots n_k}$ — заданные числа (вообще говоря, комплексные), занумерованные k индексами n_i, $i = 1, 2, \dots , k$, каждый из которых независимо от другого пробегает натуральный ряд чисел: $n_i = 1, 2, \dots$. Ряд (34.1) называется k-кратным рядом, а числа $u_{n_1 \dots n_k}$ — его членами.

Определим четко эти понятия. Предварительно введем понятие кратной последовательности.

Определение 1. *Пусть X — некоторое множество; k-кратной последовательностью элементов множества X называется отображение f: $\underbrace{N \times N \times \dots \times N}_{k \text{ раз}} \to X$ (N, как всегда, обозначает множество натуральных чисел).*

Элемент $x = f(n_1, \dots, n_k)$, $n_1 \in N, \dots, n_k \in N$, обозначается через $x_{n_1, \dots, n_k}$, а сама последовательность — через $\{x_{n_1, \dots, n_k}\}$.

Однократная последовательность называется просто последовательностью.

Итак, элементы k-кратной последовательности «занумерованы» n натуральными индексами. Мы будем рассматривать числовые кратные последовательности, т. е. последовательности, элементами которых являются комплексные, в частности действительные, числа. Для простоты обозначений ограничимся случаем $k = 2$. В этом случае k-кратная последовательность называется двойной.

Обобщение на случай произвольного натурального $k \in N$ не представляет трудности.

Определение 2. *Число $a \in C$ называют пределом двойной последовательности $\{x_{mn}\}$ и пишут $a = \lim\limits_{m,n \to \infty} x_{mn}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_\varepsilon \in N$, что для всех $m > n_\varepsilon$, $n > n_\varepsilon$, $m \in N$, $n \in N$, выполняется неравенство $|x_{nm} - a| < \varepsilon$.*

Если двойная последовательность имеет предел, то она называется *сходящейся*.

Отметим, что не все свойства пределов обычных последовательностей переносятся на двойные. Так, например, последовательность $u_{1n} = n$, $u_{mn} = 0$, $m \neq 1$, $n = 1, 2, \dots$, $m = 2, 3, \dots$, сходится: $\lim\limits_{m,n \to \infty} u_{mn} = 0$, однако эта последовательность, очевидно, не ограничена.

Замечание 1. Предел кратной последовательности можно определить и другим не эквивалентным данному выше способом: например, назвать пределом двойной последовательности $\{u_{mn}\}$ такое число a, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное n_ε, что для всех n и m, для которых $n + m > n_\varepsilon$, выполняется неравенство $|u_{nm} - a| < \varepsilon$.

При таком определении предела двойной последовательности члены последовательности, имеющей предел, будут уже ограничены (докажите это). Мы будем в дальнейшем придерживаться определения 2 предела кратной последовательности.

Определение 3. *Двойную последовательность называют последовательностью, стремящейся к* $+\infty$, *и пишут* $\lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = +\infty$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $n_\varepsilon \in \boldsymbol{N}$, *что для всех* $m > n_\varepsilon$, $n > n_\varepsilon$, $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$, *выполняется неравенство* $x_{mn} > \varepsilon$.

Аналогично определяются бесконечные пределы

$$\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \infty.$$

Как обычно, под пределом (в данном случае двойной последовательности) понимается конечный предел, если не оговорено что-либо другое.

Определим теперь двойной ряд.

Определение 4. *Пусть задана двойная последовательность* $\{u_{mn}\}$. *Составим двойную числовую последовательность*:

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} u_{kl}. \tag{34.2}$$

Пара последовательностей $\{u_{mn}\}$, $\{S_{mn}\}$ *называется двойным рядом и обозначается через*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}. \tag{34.3}$$

Элементы двойной последовательности $\{u_{mn}\}$ называются *членами ряда* (34.3), а элементы двойной последовательности $\{S_{mn}\}$ — *частичными суммами* этого ряда.

Определение 5. *Двойной ряд* (34.3) *называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм сходится. Ее предел называется суммой ряда*; *причем если*

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = S, \tag{34.4}$$

то пишут

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} = S.$$

Если конечного предела (34.4) *не существует, то ряд* (34.3) *называется расходящимся. Если существует один из бесконечных пределов*

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = +\infty, \quad \lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = -\infty, \tag{34.5}$$

то соответственно пишут

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} = +\infty, \quad \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} = -\infty.$$

З а м е ч а н и е 2. Содержательность определения ряда как пары последовательностей хорошо видна на примере кратных рядов. Например, если задана последовательность $\{u_{mn}\}$, то соответствующую ей последовательность «частичных сумм» можно задавать не только указанным выше способом (34.2), но и по-другому. Наряду с суммами (34.2), которые определены выше и называются п р я м о у г о л ь н ы м и (в них суммируются элементы u_{kl}, которым соответствуют точки (k, l) плоскости xy, содержащиеся в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant m$, $0 \leqslant y \leqslant n$), рассматриваются т р е у г о л ь н ы е суммы $T_r = \sum\limits_{k+l \leqslant r} u_{kl}$, $r = 1, 2, \ldots$ (точка (k, l) лежит в треугольнике $x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant r$), с ф е р и ч е с к и е суммы $S_r = \sum\limits_{k^2+l^2 \leqslant r^2} u_{kl}$, $r = 1, 2, \ldots$ (точка (k, l) лежит в круге $x^2 + y^2 \leqslant r^2$) и др. Таким образом, для одной и той же последовательности $\{u_{mn}\}$ имеются разные последовательности частичных сумм. Кроме того, для этих последовательностей частичных сумм понятие предела естественно определять по-разному. Например, для треугольных частичных сумм таким определением является определение предела, сформулированное в замечании 1. Поэтому естественно рассматривать каждую пару, состоящую из последовательности $\{u_{mn}\}$ членов ряда и каких-то его «частичных сумм» как самостоятельный ряд. При этом может случиться, что частичные суммы одного вида, составленные из членов ряда, имеют предел, а другие его не имеют.

Последовательности частичных сумм кратных рядов (например, частичных сумм T_r или S_r) в отличие от последовательностей частичных сумм однократных рядов не всегда однозначно определяют последовательность общих членов ряда.

Общее определение ряда имеет следующий вид.

Рядом называется пара, состоящая из (кратной) последовательности, называемой последовательностью его членов, с соответствующим понятием предела последовательностей такого вида и некоторого множества $\{S_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, сумм S_α его членов. Здесь $\mathfrak{A}$ — некоторое множество, элементами α которого являются наборы мультииндексов $(n_1, \ldots, n_k)$ (в частности, обычных индексов), и

$$S_\alpha = \sum_{(n_1, \ldots, n_k) \in \alpha} u_{n_1 \ldots n_k}.$$

Следует отметить, что иногда два разных в смысле данного определения ряда, имеющих одну и ту же последовательность членов ряда, называют одним и тем же рядом, но с разными способами его «суммирования».

В дальнейшем при изучении кратных рядов будут рассматриваться только прямоугольные частичные суммы, в частности для двойных рядов суммы S_{mn}.

Пример. Пусть $|p| < 1$, $|q| < 1$, $p \in \boldsymbol{C}$, $q \in \boldsymbol{C}$; тогда ряд $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} p^m q^n$ сходится. Действительно, в этом случае

$$S_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} p^\mu q^\nu = \sum_{\mu=0}^{m} p^\mu \sum_{\nu=0}^{n} q^\nu = \frac{1-p^{m+1}}{1-p} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Поэтому существует предел $\lim\limits_{m,n \to \infty} S_{mn} = \dfrac{1}{(1-p)(1-q)}$. Таким образом,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} p^m q^n = \frac{1}{(1-p)(1-q)}, \quad |p| < 1, \quad |q| < 1.$$

Ряд свойств обычных (однократных) рядов переносится на кратные ряды.

1^0. *Если ряд* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$ *сходится и* S *— его сумма, то* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \lambda u_{mn} = \lambda S$ *для любого числа* λ.

2^0. *Если ряды* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u'_{mn} = S'$ *и* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u''_{mn} = S''$ *сходятся, то*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} (u'_{mn} + u''_{mn}) = S' + S''.$$

Эти утверждения легко доказываются аналогично случаю однократных рядов. Их доказательства могут быть проведены читателем самостоятельно.

Докажем теперь несколько теорем о кратных рядах.

ТЕОРЕМА 1. *Если ряд* (34.3) *сходится, то*

$$\lim_{m,n \to \infty} u_{mn} = 0.$$

Это сразу следует из равенства

$$u_{mn} = S_{mn} - S_{m-1\,n} - S_{mn-1} + S_{m-1\,n-1}$$

и условия (34.4). □

ТЕОРЕМА 2. *Если все члены ряда* (34.3) *неотрицательны,*

$$u_{mn} \geqslant 0, \quad m,\, n = 1, 2, \ldots, \tag{34.6}$$

то всегда существует конечный или бесконечный предел его частичных сумм S_{mn}, *причем*

$$\lim_{m,n \to \infty} S_{mn} = \sup_{m,n=1,2,\ldots} S_{mn}. \tag{34.7}$$

Доказательство. Если выполняется условие (34.6) и $m' \geqslant m$, $n' \geqslant n$, то $S_{m'n'} \geqslant S_{mn}$.

Далее, если $S = \sup\limits_{m,n = 1, 2, \dots} S_{mn}$ и $S' < S$, то, в силу определения верхней грани, существуют такие номера m_0 и n_0, что $S_{m_0 n_0} > S'$.

Положим $N = \max\{m_0, n_0\}$, тогда при $m > N$ и $n > N$

$$S_{mn} \geqslant S_{NN} \geqslant S_{m_0 n_0} > S',$$

и так как $S_{mn} \leqslant S$, то $\lim\limits_{m,n \to \infty} S_{mn} = S$, т. е. выполняется условие (34.7). □

СЛЕДСТВИЕ. *В предположениях теоремы ряд* (34.3) *сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены.*

Доказательство следствия очевидно.

Для двойных рядов с неотрицательными членами справедлив признак сравнения.

ТЕОРЕМА 3. *Если ряд* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ *сходится и существует такое* $c > 0$, *что для всех* $m, n = 1, 2, \dots$, *выполняется неравенство* $0 \leqslant u_{mn} \leqslant c a_{mn}$, *то ряд* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$ *также сходится.*

Это сразу следует из следствия теоремы 2, так как для любых натуральных m и n выполняются неравенства

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{m,n} \leqslant c \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n}.$$

Из двукратного ряда (34.3) можно формально образовать два повторных ряда. Для этого следует сначала просуммировать по одному индексу, зафиксировав другой, а затем выполнить суммирование по оставшемуся индексу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}, \quad \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}. \tag{34.8}$$

Ответ на вопрос, как связана сходимость кратного ряда с получающимися из него повторными рядами, дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Если сходится двойной ряд* (34.3) *и для всех* $n = 1, 2, \dots$ *сходятся ряды* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{mn}$, *то повторный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{mn}$ *также сходится и его сумма равна сумме данного двойного ряда.*

Доказательство. Если $s = \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$, то, согласно определению суммы двойного ряда, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $m > n_\varepsilon$ и $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\left| s - \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} u_{\mu\nu} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Перейдя здесь к пределу при $m \to \infty$, получим, что при всех $n > n_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$\left| s - \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{\infty} u_{\mu\nu} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом, положив $u_\nu = \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} u_{\mu\nu}$, $u_\nu = 1, 2, \ldots$, при $n > n_\varepsilon$ будем иметь

$$\left| s - \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu \right| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu = s$, т. е. сумма ряда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} u_{\mu\nu}$ равна s:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} u_{\mu\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu = s. \ \square$$

Определение 6. *Ряд* (34.3) *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т. е. ряд*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |u_{mn}|. \tag{34.9}$$

Отметим, что если ряд (34.3) абсолютно сходится, то его общий член стремится к нулю при неограниченном возрастании хотя бы одного из индексов: $\lim\limits_{\max\{m,n\} \to \infty} u_{mn} = 0$.

В самом деле, пусть $\tilde{S} = \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} |u_{mn}|$; тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное n_ε такое, что при $m > n_\varepsilon$ и $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$0 < \tilde{S} - \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} |u_{kl}| < \varepsilon.$$

Поэтому если номера m и n таковы, что $\max\{m; n\} > n_\varepsilon + 1$, то

$$|u_{mn}| \leqslant \sum_{\{\mu \geqslant m\} \cup \{\nu \geqslant n\}} |u_{\mu\nu}| \leqslant \tilde{S} - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon + 1} \sum_{l=1}^{n_\varepsilon + 1} |u_{kl}| < \varepsilon.$$

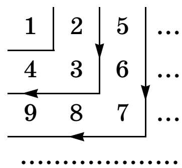
Из стремления общего члена абсолютно сходящегося ряда к нулю при неограниченном возрастании хотя бы одного из его индексов, очевидно, следует, что члены этого ряда ограничены. Отметим, что у сходящегося, но не абсолютно, ряда это может не иметь места. Примером такого ряда является, например, рассмотренный ниже ряд (34.17) в точке (1, 1).

ТЕОРЕМА 5. *Если ряд* (34.3) *абсолютно сходится, то сходится и любой ряд* (*однократный, двукратный или повторный*), *полученный перестановкой членов данного ряда* (*в частности, сходится и сам заданный ряд*). *При этом сумма любого такого ряда совпадает с суммой исходного ряда* (34.3).

Доказательство. Расположим члены ряда (34.3) в бесконечную прямоугольную матрицу, поместив в m-ю ее строку члены ряда с данным фиксированным первым номером m, расположенные по возрастанию второго индекса n:

$$\begin{matrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} & \dots \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{m1} & u_{m2} & u_{m3} & \dots & u_{mn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

Занумеруем теперь элементы этой таблицы согласно следующей схеме:



Член ряда (34.3), получивший при такой нумерации номер k, обозначим v_k. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \qquad (34.10)$$

и покажем, что он абсолютно сходится, т. е. что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|. \qquad (34.11)$$

Обозначим частичные суммы ряда (34.9) через $\tilde{S}_{mn}$, его сумму — через $\tilde{S}$, а частичные суммы ряда (34.11) — через $\tilde{S}_k$. Прежде всего заметим, что для любой суммы $\tilde{S}_k$ найдутся такие номера m и n, что все члены ряда (34.11), входящие в сумму $\tilde{S}_k$, войдут и в сумму $\tilde{S}_{mn}$, тогда $\tilde{S}_k \leqslant \tilde{S}_{mn} \leqslant \tilde{S}$. Отсюда и следует (см. п.31.4) сходимость ряда (34.11).

Из абсолютной сходимости ряда (34.10) следует, что и любой другой однократный ряд, составленный из членов ряда (34.3), также сходится и его сумма равна сумме ряда (34.10) (см. п. 30.10). Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k = S$. Покажем теперь, что любой двойной ряд

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}^*, \qquad (34.12)$$

полученный некоторой перенумерацией двойными индексами членов данного ряда (34.3), абсолютно сходится и что его сумма также равна S.

Абсолютная сходимость ряда (34.12) легко следует из абсолютной сходимости ряда (34.3), т. е. из сходимости ряда (34.9), и доказывается тем же приемом, с помощью которого была доказана абсолютная сходимость ряда (34.10). Докажем теперь, что сумма ряда (34.12) равна S. Обозначим его частичные суммы через S^*_{mn}, а частичные суммы ряда (34.10) — через S_k. Пусть фиксировано число $\varepsilon > 0$. В силу сходимости ряда (34.11), существует такой номер k_ε, что

$$\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{34.13}$$

тогда и подавно

$$|S - S_{k_\varepsilon}| = \left|\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} v_k\right| < \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{34.14}$$

Выберем номер N_ε так, чтобы частичная сумма $S^*_{N_\varepsilon N_\varepsilon}$ ряда (34.12) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (34.10), входящие в сумму S_{k_ε}. Пусть $m \geqslant N_\varepsilon$ и $n \geqslant N_\varepsilon$. Положим

$$S^{**}_{mn} = S^*_{mn} - S_{k_\varepsilon},$$

тогда, использовав (34.13) и (34.14), получим

$$|S - S^*_{mn}| = |S - S_{k_\varepsilon}| + |S^{**}_{mn}| < \varepsilon.$$

Итак, S является суммой любого ряда (34.12), в частности суммой самого ряда (34.3).

Покажем, наконец, что S является и суммой повторных рядов (34.8). В самом деле, при любом фиксированном n

$$\sum_{m=1}^{\infty} |u_{mn}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |v_k| = \tilde{S}.$$

Следовательно, все ряды $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{mn}$, $n = 1, 2, \ldots$, сходятся, и притом абсолютно.

Положим

$$u_n = \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}. \tag{34.15}$$

Зафиксируем снова произвольное число $\varepsilon > 0$. Выберем номер k_ε так, чтобы выполнялось условие (34.13), а следовательно, и условие (34.14). Далее, подобно тому, как это было сделано выше, выберем номер N_ε так, чтобы частичная сумма $S_{N\varepsilon N\varepsilon}$ ряда (34.3) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (34.10), входящие в сумму S_{k_ε}. Тогда при всех $m > N_\varepsilon$ и $n > N_\varepsilon$

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} u_{ij} - S_{k_\varepsilon}\right| \leqslant \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получим (см. (34.15))

$$\left|\sum_{j=1}^{n} u_j - S_{k_\varepsilon}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, в силу (34.14), следует, что при $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{j=1}^{n} u_j - S\right| \leqslant \left|\sum_{j=1}^{n} u_j - S_{k_\varepsilon}\right| + \left|S_{k_\varepsilon} - S\right| < \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S. \square$$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Обобщить критерий Коши сходимости однократных рядов на случай кратных рядов.

34.2. Кратные функциональные ряды

Определение 7. *Ряд вида*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1 \ldots n_k}(x), \tag{34.16}$$

где функции $u_{n_1, \ldots, n_k}(x)$ *определены на некотором множестве* X, *называется* k*-кратным функциональным рядом, а суммы вида*

$$S_{m_1, \ldots, m_k}(x) = \sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{m_1, \ldots, m_k} u_{n_1 \ldots n_k}(x)$$

— его частичными суммами.

Определение 8. *Ряд* (34.16) *называется сходящимся на множестве* X, *если при каждом фиксированном* $x_0 \in X$ *сходится кратный числовой ряд*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1 \ldots n_k}(x_0).$$

Если ряд (34.16) *сходится на* X, *то функция*

$$S(x) = \sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1 \ldots n_k}(x), \quad x \in X,$$

называется его суммой.

На кратные функциональные ряды легко переносятся понятия равномерной сходимости ряда, критерий Коши для равномерной сходимости ряда, признак Вейерштрасса равномерной сходимости и т. п. Мы не будем на этом останавливаться.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Определив понятие равномерной сходимости двойного ряда, доказать, что если ряд (34.16) сходится равномерно и если его члены являются непрерывными функциями на множестве $X \subset \boldsymbol{R}$, то и сумма ряда (34.16) является непрерывной на множестве X функцией.

Определение 9. *Ряды вида*

$$\sum_{n_1, \dots, n_k = 0}^{\infty} c_{n_1 \dots n_k}(x_1 - x_1^{(0)})^{n_1} \dots (x_n - x_n^{(0)})^{n_k},$$

где $c_{n_1 \dots n_k}$ *— комплексные числа, называются кратными степенными рядами.*

Хотя, как это видно из предыдущего, многие утверждения, справедливые для однократных рядов, обобщаются и на кратные ряды, последние имеют и много своих специфических особенностей, существенно отличающих их от однократных рядов.

В качестве примера приведем двойной степенной ряд с действительными коэффициентами, который, если он рассматривается в действительной области, сходится лишь в двух точках плоскости, а именно в точках (0, 0) и (1, 1). Таким образом, аналога теоремы Абеля для степенных рядов (см. п. 33.1), во всяком случае в прямом смысле, для двойных рядов нет. Этот пример показывает опасность использования аналогий, не подкрепленных математическими доказательствами.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn}\, x^m y^n, \tag{34.17}$$

где $c_{00} = 0$, $c_{0n} = c_{n0} = n!$, $n = 1, 2, \dots$; $c_{1m} = c_{m1} = -m!$, $m = 1, 2, \dots$; $c_{mn} = 0$, $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$. Его частичные суммы имеют вид

$$S_{mn}(x, y) = (1 - y)\sum_{k=1}^{m} k!\, x^k + y + (1 - x)\sum_{l=2}^{n} l!\, y^l. \tag{34.18}$$

Очевидно, что $S_{mn}(0, 0) = 0$ и $S_{mn}(1, 1) = 1$, $m, n = 1, 2, \dots$, и поэтому ряд (34.17) сходится в точках (0, 0) и (1,1).

Заметим теперь, что радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\, z^n$ равен нулю (см. пример 1 в п. 33.1), при этом его частичные суммы $S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} k!\, z^k$, $n = 1, 2, \dots$, при действительных $z > 0$, очевидно, стремятся к $+\infty$.

Покажем, что при $z < 0$ его четные частичные суммы $S_{2n}(z)$ также стремятся к $+\infty$. В самом деле, объединив при $z < 0$ попарно соседние члены, получим

$$S_{2n}(z) = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1)!\, |z|^{2k-1} (2k\,|z| - 1).$$

Далее заметим, что при любом фиксированном $z \neq 0$ для номеров $k > \frac{1}{|z|}$ выполняется неравенство $(2k - 1)!\, |z|^{2k-1} (2k\,|z| - 1) > (2k - 1)!\, |z|^{2k-1}$ и что при $z \neq 0$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (2k - 1)!\, z^{2k-1}$ расходится (это, например, легко доказывается тем же способом, каким до-

казывалась при $z \neq 0$ расходимость ряда в примере 1 п. 33.1) и, следовательно, при $z > 0$ его сумма равна $+\infty$, поэтому и $\lim\limits_{n \to \infty} S_{2n}(z) = +\infty$, $z \neq 0$. Из сказанного и из равенства (34.18) следует, что если $(x, y) \neq (0, 0)$ или $(x, y) \neq (1, 1)$, то, каковы бы ни были числа $\varepsilon > 0$ и натуральное N, всегда можно подобрать такие номера $m > N$ и $n > N$, что $|S_{mn}(x, y)| > \varepsilon$. А это и означает, что ряд (34.17) для указанных (x, y) расходится.

Заметим, что хотя в точке (1, 1) рассматриваемый ряд сходится, его члены (т. е. в данном случае коэффициенты) не ограничены. Если у степенного ряда (34.17) в некоторой точке (x_0, y_0) его члены образуют ограниченное множество (это имеет место, например, если ряд сходится абсолютно (см. п. 34.1)), то для такого ряда справедлив двумерный аналог первой теоремы Абеля (см. п. 33.1).

ТЕОРЕМА 6. *Если в точке* (x_0, y_0) *члены ряда* (34.17) *ограничены, то в любой точке* (x, y) *такой, что* $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$, *ряд* (34.17) *сходится абсолютно.*

Доказательство. Если существует такое $M > 0$, что для всех натуральных m и n выполняется неравенство $|c_{mn}\, x_0^m\, y_0^n| \leqslant M$, то при $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$ получим

$$|c_{mn} x^m y^n| = |c_{mn}\, x_0^m\, y_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^m \left|\frac{y}{y_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{x}{x_0}\right|^m \left|\frac{y}{y_0}\right|^n.$$

Отсюда, в силу признака сравнения (см. теорему 3) и сходимости ряда вида $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} p^m q^n$, $|p| < 1$, $|q| < 1$ (см. пример в п. 34.1), и следует утверждение теоремы. □

УПРАЖНЕНИЯ. 3. Назовем число S суммой ряда $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u_{m,\,n}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех номеров m и n, удовлетворяющих условию $m + n > N$, выполняется неравенство $|S_{mn} - S| < \varepsilon$. Выяснить, эквивалентно или нет это определение определению 5 п. 34.1.

4. Назовем число S суммой ряда $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное множество $\mathfrak{N}_\varepsilon = \{(m, n)\}$ пар индексов m, n членов данного ряда, что, каково бы ни было другое конечное множество $\mathfrak{N}$ пар индексов членов этого ряда, содержащее множество $\mathfrak{N}_\varepsilon : \mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}_\varepsilon$, выполняется неравенство

$$\left|\sum_{(m,n) \in \mathfrak{N}}^{\infty} u_{mn} - S\right| < \varepsilon.$$

Выяснить, эквивалентно или нет это определение определению 5 п. 34.1 и определению, сформулированному в предыдущем упражнении.

Глава 4

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

§ 35

Многомерные пространства

35.1. Окрестности точек. Пределы последовательностей точек

Прежде чем перейти к изучению функций многих переменных, ознакомимся с некоторыми свойствами множеств, на которых эти функции задаются. Будем предполагать, что на рассматриваемой плоскости или в пространстве всегда задана некоторая прямоугольная система декартовых координат. Точки будем, как правило, обозначать следующими буквами: a, b, ... , x, y, z, ...*, а их координаты — теми же буквами с индексами, т. е. в случае плоскости будем писать $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, а в случае пространства — писать $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. Расстояние между точками x и y будем обозначать $\rho(x, y)$. Как известно, формула для расстояния между точками x и y в случае плоскости имеет вид

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

а в случае пространства —

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}\,.$$

В дальнейшем придется иметь дело не только с функциями двух и трех переменных, но и с функциями большего числа переменных, поэтому полезно ввести понятие n-мерного пространства для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$.

* Иногда точки обозначаются и большими буквами, например M, N, P, а их координаты — буквами x, y, z.

Определение 1. *Точкой x n-мерного пространства называется упорядоченная совокупность n действительных чисел*

$$(x_1, \dots , x_n) = x.$$

Число x_i называется i-координатой точки x, $i = 1, 2, \dots , n$.

Расстояние между двумя точками $(x_1, \dots , x_n)$ и $(y_1, \dots , y_n)$ определяется по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}. \qquad (35.1)$$

Совокупность всех точек n-мерного пространства, в котором определено расстояние согласно формуле (35.1), *называется n-мерным евклидовым пространством* (*или, более полно, n-мерным точечным арифметическим евклидовым пространством*) *и обозначается через $\boldsymbol{R}^n$ или $\boldsymbol{R}^n_x$.*

Иногда для краткости вместо $x = (x_1, \dots , x_n)$ будем писать $x = (x_i)$.

В случае $n = 1$ пространство $\boldsymbol{R}^n$ совпадает с прямой, в случае $n = 2$ — с плоскостью, а в случае $n = 3$ — с пространством, изучаемым в элементарной и аналитической геометрии. В случае произвольного $n > 3$ не следует искать в приведенном определении скрытый физический или геометрический смысл. Нашей целью является лишь построение некоторого математического аппарата, удобного для изучения функций многих переменных; определения и терминологию мы заимствуем из обычной геометрии, так как это позволяет включить прямую, плоскость и трехмерное пространство в одну более общую схему.

Расстояние между точками в n-мерном евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^n$ обладает следующими свойствами.

1^0. $\rho(x, y) \geqslant 0$, *причем* $\rho(x, y) = 0$ *в том и только том случае, когда $x = y$.*

2^0. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ *для любых двух точек x и y из $\boldsymbol{R}^n$.*

3^0. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ *для любых точек x, y и z из $\boldsymbol{R}^n$.*

Свойства 1^0 и 2^0 непосредственно следуют из формулы (35.1), третье же, обычно называемое «неравенством треугольника» и хорошо известное для обычного трехмерного пространства, в общем случае (при произвольном n) требует доказательства.

Докажем предварительно лемму.

ЛЕММА 1 (лемма Коши—Шварца*). *Для любых действительных чисел a_k и b_k, $k = 1, \dots, n$, выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \qquad (35.2)$$

СЛЕДСТВИЕ.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \qquad (35.3)$$

Неравенство (35.2) является частным случаем неравенства Гёльдера, а неравенство (35.3) — частным случаем неравенства Минковского (см. п. 30.8*) при $p = 2$. Однако в этом случае их доказательство значительно проще, и поэтому мы его здесь приведем.

Доказательство. Если все $a_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, то неравенство (35.2) очевидно — обе его части превращаются в нуль. Если же $a_1^2 + \dots + a_n^2 > 0$, то рассмотрим квадратичную функцию

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2 = t^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2t \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2. \qquad (35.4)$$

Очевидно, что $F(t) \geqslant 0$. Из этого условия следует, что квадратный трехчлен (35.4) имеет либо совпадающие действительные корни, либо существенно комплексные корни, поэтому его дискриминант не положителен:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 0.$$

Перенося второе слагаемое в правую часть и извлекая квадратный корень, получим (35.2). □

Для доказательства неравенства (35.3) оценим сумму $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2$, применяя неравенство (35.2):

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2.$$

Извлекая из обеих частей квадратный корень, получим (35.3). □

* Г. Шварц (1843—1921) — немецкий математик.

Вернемся теперь к свойству 3^0 расстояния между точками в пространстве $\boldsymbol{R}^n$.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ и $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Положим $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$ и, значит, $a_i + b_i = x_i - z_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда неравенство (35.3) можно переписать следующим образом:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2},$$

или, согласно (35.1), $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$. □

В дальнейшем в этом параграфе пространство $\boldsymbol{R}^n$ будем считать фиксированным (т. е. считать фиксированным число n).

Определение 2. *Множество точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$ таких, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_n = 0$, называется i-й координатной осью ($i = 1, 2, \ldots, n$) этого пространства. Точка $O = (0, 0, \ldots, 0)$ называется началом координат.*

Очевидно, в случае $n = 2$ и $n = 3$ приведенное определение дает обычные координатные оси.

Пусть $0 < k < n$. Пространства $\boldsymbol{R}^k$ и $\boldsymbol{R}^n$ состоят соответственно из точек $(x_1, \ldots, x_k)$ и $(x_1, \ldots, x_n)$. Между множеством всех точек пространства $\boldsymbol{R}^n$ вида $(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ и множеством всех точек $(x_1, \ldots, x_k)$ пространства $\boldsymbol{R}^k$ существует взаимно-однозначное соответствие $(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \to (x_1, \ldots, x_k)$, при котором сохраняется расстояние между точками. Поэтому естественно множество всех точек $(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$ обозначать также $\boldsymbol{R}^k$, и, следовательно, при этом соглашении $R^k \subset \boldsymbol{R}^n$, $k \leqslant n$.

З а м е ч а н и е. Пусть на плоскости заданы две прямоугольные системы координат, точка M в одной системе имеет координаты (x, y), а в другой (ξ, η), т. е. $M = (x, y) = (\xi, \eta)$. Ставя в соответствие упорядоченной паре чисел (x, y) упорядоченную пару (ξ, η), получаем взаимно-однозначное соответствие между множеством всех упорядоченных пар (x, y) и множеством всех упорядоченных пар (ξ, η). При этом если

$$M' = (x', y') = (\xi', \eta'),\ \ M'' = (x'', y'') = (\xi'', \eta''),$$

то

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} = \sqrt{(\xi'' - \xi')^2 + (\eta'' - \eta')^2}.$$

Этот пример делает естественным следующее определение.

Пусть каждой точке $x = (x_1, \dots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$ поставлен в соответствие упорядоченный комплекс из n действительных чисел $\xi(x) = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ таким образом, что для любых двух точек $x' = (x_1, \dots, x_n)$ и $x'' = (x''_1, \dots, x''_n)$ и соответствующих им комплексов $\xi(x') = (\xi'_1, \dots, \xi'_1)$ и $\xi(x'') = (\xi''_1, \dots, \xi''_1)$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n} (x''_i - x'_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\xi''_i - \xi'_i)^2;$$

тогда числа, входящие в совокупность $(\xi_1, \dots, \xi_n)$, также называются *координатами точки* x («в другой системе координат»). При таком определении координат расстояние между двумя данными точками не меняется при изменении систем координат, т. е. при замене одной системы координат другой. В дальнейшем, если не оговорено что-либо другое, система координат считается фиксированной.

Если точка x задается координатами $(x_1, \dots, x_n)$, то иногда для ясности пространство $\boldsymbol{R}^n_x$ будем обозначать $\boldsymbol{R}^n_{x_1, \dots, x_n}$.

Определение 3. *Пусть* $x \in \boldsymbol{R}^n$ *и* $\varepsilon > 0$. *Совокупность всех точек* $y \in \boldsymbol{R}^n$ *таких, что* $\rho(x, y) < \varepsilon$, *называется* n*-мерным шаром с центром в точке* x *и радиусом* ε *или* ε*-окрестностью (а иногда сферической или, правильнее, шаровой окрестностью) точки* x *в пространстве* $\boldsymbol{R}^n$ *и обозначается* $U(x; \varepsilon)$.

Таким образом,

$$U(x; \varepsilon) = \left\{ y = (y_1, \dots, y_n) : \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 < \varepsilon^2 \right\}, \qquad (35.6)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad \varepsilon > 0.$$

В случае прямой, т. е. при $n = 1$ (рис. 11), $x = x_1$, $y = y_1$, поэтому

$$U(x; \varepsilon) = \{y : |y - x| < \varepsilon\}.$$

Таким образом, $U(x; \varepsilon)$ является интервалом длины 2ε с центром в точке x, т. е. окрестностью точки x в рассмотренном выше смысле (см. п. 3.2).

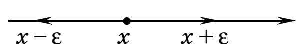


Рис. 11

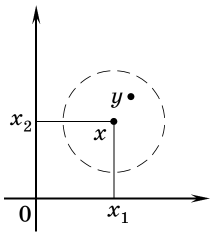


Рис. 12

В случае плоскости, т. е. при $n = 2$ (рис. 12), $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ и

$$U(x; \varepsilon) = \{y = (y_1, y_2) : (y_1 - x_1)^2 +$$
$$+ (y_2 - x_2)^2 < \varepsilon < \varepsilon^2\}, \quad \varepsilon > 0,$$

т. е. $U(x; \varepsilon)$ — круг радиуса ε с центром в точке $x = (x_1, x_2)$ (круговая окрестность), а в случае пространства, т. е. при $n = 3$, окрестность точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ задается формулой

$$U(x; \varepsilon) = \{y = (y_1, y_2, y_3) : (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 < \varepsilon^2\},$$
$$\varepsilon > 0$$

и является шаром радиуса ε с центром в точке (x_1, x_2, x_3).

Таким образом, понятие окрестности обобщено на случай n-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$. Однако наряду с указанным обобщением бывает полезно и другое обобщение этого понятия, а именно понятие так называемой прямоугольной окрестности.

Определение 4. *Пусть* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$, $\delta_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. *Множество*

$$P(x; \delta_1, \dots, \delta_n) =$$
$$= \{y = (y_1, \dots, y_n) : |y_i - x_i| < \delta_i, i = 1, 2, \dots, n\} \qquad (35.7)$$

называется n-мерным параллелепипедом (точнее, n-мерным параллелепипедом с ребрами, параллельными координатным осям), а точка x — его центром.

Определение 5. *Если* $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = \delta$, *то* $P(x; \delta, \delta, \dots, \delta)$ *называется n-мерным кубом с ребрами длины 2δ (точнее, n-мерным кубом с ребрами указанной длины и параллельными осям координат) с центром в точке x и обозначается $P(x; \delta)$.*

Очевидно, что если для чисел $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ положить

$$\delta_0 = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}, \quad \delta = \max\{\delta_1, \dots, \delta_n\},$$

то

$$P(x; \delta_0) \subset P(x; \delta_1, \dots, \delta_1) \subset P(x; \delta). \qquad (35.8)$$

Если $n = 1$, то множество $P(x; \delta)$ является интервалом с центром в точке x длины 2δ; если $n = 2$, то множество $P(x; \delta_1, \delta_2)$ яв-

ляется прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат (их длины равны соответственно $2\delta_1$ и $2\delta_2$); при $n = 3$ множество $P(x; \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ представляет собой прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат (их длины соответственно равны $2\delta_1$, $2\delta_2$, $2\delta_3$).

Под n-мерным параллелепипедом, соответственно n-мерным кубом, понимается также множество, определенное указанными выше условиями хотя бы в одной системе координат (а не обязательно в данной, как это было сделано выше). В дальнейшем n-мерный параллелепипед и n-мерный куб понимаются лишь в узком смысле, т. е. в смысле данного выше определения при фиксированной системе координат, если, конечно, специально не оговорено что-либо другое.

Определение 6. *Всякий n-мерный параллелепипед $P(x; \delta_1, \dots, \delta_n)$ называется прямоугольной окрестностью точки x.*

Если прямоугольная окрестность точки является n-мерным кубом, то она называется также и *кубической окрестностью* этой точки.

ЛЕММА 2. *Любая сферическая окрестность точки пространства содержит прямоугольную окрестность и содержится в прямоугольной окрестности этой точки.*

Любая прямоугольная окрестность точки содержит сферическую окрестность и содержится в сферической окрестности этой точки.

Эти утверждения геометрически очевидны при $n = 1, 2, 3$. Действительно, при $n = 1$ понятия сферической и прямоугольной окрестностей совпадают. При $n = 2$ лемма означает, что во всякий круг можно вписать прямоугольник и около всякого круга описать прямоугольник так, что центры прямоугольников будут совпадать с центром круга. Соответственно во всякий прямоугольник можно вписать круг с центром в центре прямоугольника и около всякого прямоугольника можно описать круг с центром в центре прямоугольника (рис. 13). Аналогичный смысл имеет лемма и при $n = 3$, следует только круги заменить шарами, а прямоугольники — параллелепипедами. Нетрудно записать и доказать эти утверждения в аналитической форме, использовав координатную запись.

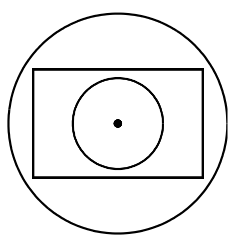


Рис. 13

Этот способ, как это сейчас будет показано, легко обобщается и на случай пространства любой размерности.

Доказательство. Прежде всего отметим, что для любых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$|a_i| \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2} \leqslant$$
$$\leqslant |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n|, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (35.9)$$

Справедливость этого неравенства доказывается возведением обеих его частей в квадрат.

В силу данного неравенства, для координат двух любых точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$ справедливо неравенство

$$|y_i - x_i| \leqslant \rho(y, x) \equiv \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2} \leqslant$$
$$\leqslant |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + \ldots + |y_n - x_n|, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (35.10)$$

Из этого неравенства следует, что для любого $\varepsilon > 0$ имеет место вложение

$$P\left(x; \frac{\varepsilon}{n}\right) \subset U(x; \varepsilon) \subset P(x; \varepsilon) \subset U(x; n\varepsilon). \qquad (35.11)$$

Действительно, если $y \in P\left(x; \frac{\varepsilon}{n}\right)$, то $|y_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, поэтому (рис. 14)

$$\rho(y, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} \underset{(35.10)}{\leqslant} \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon,$$

т. е. $y \in U(x, \varepsilon)$.

Если $y \in U(x, \varepsilon)$, то $|y_i - x_i| \underset{(35.10)}{\leqslant} \rho(y, x) < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а это означает, что $y \in P(x; \varepsilon)$ (рис. 15).

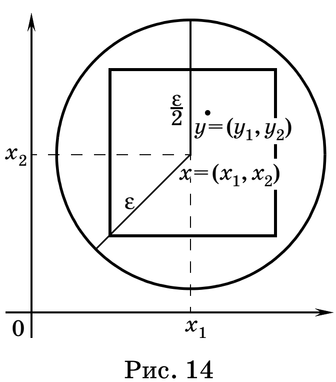


Рис. 14

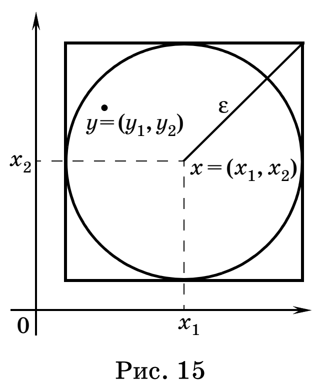


Рис. 15

Наконец, если $y \in P(x; \varepsilon)$, то из первого включения (35.11), заменив ε на $n\varepsilon$, получим, что $y \in U(x; n\varepsilon)$. Из включений (35.11) утверждение леммы следует очевидным образом. □

УПРАЖНЕНИЕ 1. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки $x \in \boldsymbol{R}$ справедливы включения

$$P\left(x; \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \subset U(x, \varepsilon) \subset P(x, \varepsilon) \subset U(x, \varepsilon\sqrt{n}).$$

Лемма 2 показывает, что определения в n-мерном пространстве выбираются таким образом, чтобы в нем имели место утверждения, аналогичные некоторым простейшим утверждениям в трехмерном пространстве. От поспешного использования аналогий, не подкрепленных математическими доказательствами, предостерегает пример, содержащийся в следующем ниже упражнении.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Выяснить, при всех ли $n = 1, 2, \ldots$ в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ выполняется включение

$$P(a; 1) \subset U(a; 1),$$

т. е. всегда ли n-мерный куб с ребром единичной длины вкладывается в шар единичного радиуса.

Определение 7. *Пусть каждому натуральному числу m поставлена в соответствие некоторая точка $x^{(m)} \in \boldsymbol{R}^n$ (не обязательно разные точки для разных m). Отображение $m \to x^{(m)}$, $m \in N$, $x^{(m)} \in \boldsymbol{R}^n$, множества натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ в пространство $\boldsymbol{R}^n$ называется последовательностью $\{x^{(m)}\}$ точек пространства $\boldsymbol{R}^n$.*

Множество значений этого отображения, т. е. множество $\{x^{(m)} : m = 1, 2, \ldots\} \subset \boldsymbol{R}^n$ называется *множеством значений последовательности* $\{x^{(m)}\}$. Последовательность $\{x^{(m)}\}$ обозначается также $x^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$.

Последовательность $\{x^{(m_k)}\}$, образованная из членов данной последовательности $\{x^{(m)}\}$ с сохранением порядка их следования, называется подпоследовательностью последовательности $\{x^{(m)}\}$.

Таким образом, если $\{x^{(m_k)}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x^{(m)}\}$, то условие $k_1 < k_2$ равносильно условию $m_{k_1} < m_{k_2}$.

Определение 8. *Точку $x \in \boldsymbol{R}^n$ называют пределом последовательности $\{x^{(m)}\}$ и пишут*

$$x = \lim_{m \to \infty} x^{(m)},$$

если $\lim\limits_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, x) = 0$.

Если $x = \lim_{m \to \infty} x^{(m)}$, *то говорят, что последовательность* $\{x^{(m)}\}$ *сходится к точке* x. *Последовательность, которая сходится к некоторой точке, называется сходящейся.*

Используя понятие окрестности, легко установить, что $x = \lim_{m \to \infty} x^{(m)}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое m_ε, что для всех $m > m_\varepsilon$ выполняется включение $x^{(m)} \in U(x; \varepsilon)$. Согласно лемме 2, получаем также: $x = \lim_{m \to \infty} x^{(m)}$ в том и только том случае, когда для любой прямоугольной окрестности $P(x; \delta_1, \dots, \delta_n)$ существует номер m_0 (зависящий от этой окрестности) такой, что для всех $m > m_0$ выполняется включение

$$x^{(m)} \in P(x; \delta_1, \dots, \delta_n). \qquad (35.12)$$

В силу включений (35.8), при определении предела можно ограничиться и только одними кубическими окрестностями.

В случае $n = 1$ определение 8 превращается в обычное определение предела числовой последовательности.

При $n = 2$ сходимость последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек плоскости $\boldsymbol{R}^2$ к точке $x \in \boldsymbol{R}^2$ означает, что, каков бы ни был круг с центром в точке x, начиная с некоторого номера, зависящего от радиуса этого круга, все члены данной последовательности лежат в этом круге (рис. 16). В случае $n = 3$ сходимость последовательности точек $\{x^{(m)}\}$ пространства к точке $x \in \boldsymbol{R}^3$ означает, что, каков бы ни был обычный трехмерный шар с центром в точке x, начиная с некоторого номера, зависящего от радиуса шара, все члены данной последовательности лежат в этом шаре.

Как и в случае числовых последовательностей, можно сказать, что $\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x$, $x^{(m)} \in \boldsymbol{R}^n$, $m = 1, 2, \dots$, если всякая ε-окрестность точки x содержит почти все точки данной последовательности, т. е. все, за исключением конечного их множества.

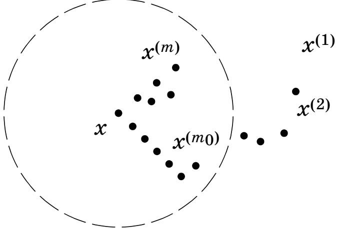


Рис. 16

Понятие предела последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек пространства $\boldsymbol{R}^n$ может быть сведено к понятию предела числовых последовательностей координат точек $x^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots$.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы последовательность* $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) \in \boldsymbol{R}^n$, $m = 1, 2, \dots$, *сходилась к точке* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{m \to \infty} x_i^{(m)} = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \qquad (35.13)$$

Доказательство. Докажем необходимость условия (35.13). Пусть $\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$; тогда, согласно (35.12), существует такое m_ε, что при всех $m > m_\varepsilon$ выполняется включение $x^{(m)} \in P(x; \varepsilon)$, т. е. для любого $i = 1, 2, \dots, n$ и при $m > m_\varepsilon$ справедливо неравенство $|x_i^{(m)} - x_i| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Докажем достаточность условия (35.13). Пусть $\lim_{m \to \infty} x_i^{(m)} = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $P(x; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ — заданная прямоугольная окрестность точки x. Тогда для каждого $\varepsilon_i > 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ существует такой номер $m_i = m_i(\varepsilon_i)$, что для всех $m > m_i$ выполняется неравенство

$$|x_i^{(m)} - x_i| < \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \qquad (35.14)$$

Обозначим через m_0 наибольший из номеров $m_1, \dots, m_n$, т. е. $m_0 = \max\{m_1, \dots, m_n\}$; тогда при $m > m_0$ и всех $i = 1, 2, \dots, n$ будут одновременно выполнены условия (35.14) и, следовательно (см. (35.7)), при $m > m_0$ имеем включение $x^{(m)} \in P(x; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, что и означает, согласно (35.12), что $\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x$. □

Из теоремы 1 и свойств пределов числовых последовательностей следует, что если последовательность точек имеет предел, то он единствен, и что всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, что и вся последовательность.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие сходимости последовательности точек пространства $\boldsymbol{R}^n$, аналогичное критерию Коши для числовых последовательностей.

Определение 9. *Множество* $X \subset \boldsymbol{R}^n$ *называется ограниченным, если существует n-мерный куб $P(O; a)$ с центром в начале координат O такой, что* $X \subset P(O; a)$.

Согласно лемме 2, можно дать еще одно эквивалентное предыдущему определение ограниченного множества.

Определение 9′. *Множество* $X \subset \boldsymbol{R}^n$ *называется ограниченным, если существует n-мерный шар* $U(O; \varepsilon)$ *такой, что* $X \subset U(O; \varepsilon)$.

Определение 10. *Последовательность точек* $x^{(m)} \in \boldsymbol{R}^n$, $m = 1, 2, \ldots$, *называется ограниченной, если множество ее значений, т. е. множество* $\{x_i^{(m)} : m = 1, 2, \ldots\}$, *ограничено в пространстве* $\boldsymbol{R}^n$.

Если последовательность $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$, $m = 1, 2, \ldots$, сходится, то она ограничена, ибо каждая из координатных последовательностей $x_i^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$ (i фиксировано, $i = 1, 2, \ldots, n$) в этом случае также сходится и, значит, ограничена.

ТЕОРЕМА 2. *Из любой ограниченной последовательности точек пространства* $\boldsymbol{R}^n$ *можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Эта теорема, как и в одномерном случае, обычно называется *теоремой Больцано—Вейерштрасса*.

Доказательство. Пусть задана ограниченная последовательность точек $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$, $m = 1, 2, \ldots$, пространства $\boldsymbol{R}^n$. Тогда, согласно определению 9, существует такой куб $P(O; a)$, что при всех $m = 1, 2, \ldots$, выполняется включение $x^{(m)} \in P(O; a)$, а следовательно, и включения $x_i^{(m)} \in (-a, a)$, т. е. каждая из n координатных числовых последовательностей $\{x_i^{(m)}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ также ограничена. Поэтому, по теореме Больцано—Вейерштрасса (см. п. 4.6) последовательность $\{x_1^{(m)}\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность; пусть это последовательность $x_1^{(m_{k_1})}$, $k_1 = 1, 2, \ldots$. Последовательность $\{x_2^{(m_{k_1})}\}$, как подпоследовательность последовательности $\{x_2^{(m)}\}$, также ограничена и поэтому содержит сходящуюся подпоследовательность. Пусть это последовательность $x_2^{(m_{k_1, k_2})}$, $k_2 = 1, 2, \ldots$. Последовательность $\{x_1^{(m_{k_1, k_2})}\}$, как подпоследовательность сходящейся последовательности $\{x_1^{(m_{k_1})}\}$, очевидно, также является сходящейся. Продолжая этот процесс, через n шагов получим n сходящихся числовых последовательностей $x_i^{(m_{k_1, k_2, \ldots, k_n})}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, каждая из которых является подпоследовательностью соответ-

ственно последовательности $\{x_i^{(m)}\}$. Тогда (теорема 1) последовательность точек $x^{(m_{k_1,k_2,\dots,k_n})} = (x_1^{(m_{k_1,k_2,\dots,k_n})}, \dots, x_n^{(m_{k_1,k_2,\dots,k_n})})$ пространства $\boldsymbol{R}^n$ будет также сходящейся. □

Аналогично одномерному случаю, предел подпоследовательности последовательности точек n-мерного пространства называется частичным пределом. Теорема 2 показывает, что множество частичных пределов ограниченной последовательности точек из $\boldsymbol{R}^n$ всегда не пусто.

Иногда бывает удобно рассматривать последовательности точек, стремящиеся к бесконечности.

Определение 11. *Последовательность точек* $x^{(m)} \in \boldsymbol{R}^n$, $m = 1, 2, \dots$, *называется стремящейся к бесконечности, если расстояние ее членов от начала координат* $O = (0, 0, \dots, 0)$ *стремится к бесконечности, т. е. если*

$$\lim_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, O) = +\infty. \tag{35.15}$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$. Для любого $a \in \boldsymbol{R}^n$, в силу неравенства треугольника $\rho(x^{(m)}, O) \leqslant \rho(x^{(m)}, a) + \rho(a, O)$, справедливо неравенство

$$\rho(x^{(m)}, a) \geqslant \rho(x^{(m)}, O) - \rho(a, O), \tag{35.16}$$

и при выполнении (14.15) $\lim\limits_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, a) = +\infty$, т. е. если $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$, то расстояния от точек последовательности $\{x^{(m)}\}$ до любой фиксированной точки $a \in \boldsymbol{R}^n$ стремятся к бесконечности.

УПРАЖНЕНИЯ. 4. Последовательность $x^{(m)} \in \boldsymbol{R}^n$, $m = 1, 2, \dots$, называется *неограниченной*, если множество ее значений не ограничено. Доказать, что всякая неограниченная последовательность точек n-мерного пространства содержит подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности.

5. Для того чтобы последовательность $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$, $m = 1, 2, \dots$, стремилась к бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы существовал номер i, для которого

$$\lim_{m \to \infty} x_i^{(m)} = \infty$$

По аналогии со случаем прямой, бесконечность ∞ называется также и *бесконечно удаленной точкой* n-мерного пространства. В отличие от случаев прямой, на которой имеется два направления и поэтому можно ввести понятия бесконечностей со знаком, для пространства $\boldsymbol{R}^n$, $n > 1$, вводится только бесконечность без знака.

35.2. Различные типы множеств

В настоящем пункте рассматриваются вспомогательные для дальнейшего изложения математического анализа вопросы, связанные с геометрией n-мерного пространства.

Определение 12. *Пусть X — некоторое множество точек евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$. Точка $x \in X$ называется внутренней точкой этого множества (относительно пространства $\boldsymbol{R}^n$), если существует ε-окрестность этой точки, содержащаяся в множестве X, т. е. существует такое $\varepsilon > 0$, что $U(x; \varepsilon) \subset X$.*

Совокупность внутренних точек множества называется его *внутренностью*. Внутренность множества X обозначается X_{int}*.

УПРАЖНЕНИЕ 6. Если пересечение $X \cap Y$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, $Y \subset \boldsymbol{R}^n$, содержит хотя бы одну точку, являющуюся внутренней как для множества X, так и для множества Y, то множество внутренних точек пересечения $X \cap Y$ не пусто.

Определение 13. *Множество, каждая точка которого является его внутренней точкой (относительно рассматриваемого пространства $\boldsymbol{R}^n$), называется открытым множеством.*

Таким образом, открытыми являются множества, которые совпадают со своими внутренностями.

Мы уже встречались с понятиями внутренней точки и открытого множества в случае плоских множеств (см. п. 27.1).

Следует иметь в виду, что одна и та же точка одного и того же множества может быть его внутренней точкой относительно одного пространства, содержащего это множество, и не быть внутренней точкой рассматриваемого множества относительно другого пространства, также содержащего это множество. Рассмотрим, например, пространство $\boldsymbol{R}^2_{xy}$, т. е. плоскость с некоторой фиксированной системой декартовых координат, которые будем обозначать x и y. Ось Ox этой плоскости, как всякая числовая ось, является евклидовым пространством $\boldsymbol{R}^1_x$. Каждая точка какого-либо интервала (a, b) этой оси, т. е. множество точек $\{(x, y): a < x < b, y = 0\}$ плоскости $\boldsymbol{R}^2_{xy}$, является внутренней точкой этого интервала относительно указанного простран-

* int — начало латинского слова interior — внутренний.

ства $\boldsymbol{R}_x^1$ (оси Ox) и не является внутренней точкой этого интервала относительно всей плоскости $\boldsymbol{R}_{xy}^2$. Таким образом, интервал (a, b) является открытым множеством пространства $\boldsymbol{R}_x^1$ и не является открытым множеством пространства $\boldsymbol{R}_{xy}^2$.

Важный класс открытых множеств устанавливается следующей леммой.

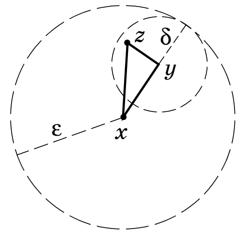


Рис. 17

ЛЕММА 3. *Всякая ε-окрестность $U(x; \varepsilon)$ любой точки $x \in \boldsymbol{R}^n$ является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть задана некоторая окрестность $U(x; \varepsilon)$ и пусть $y \in U(x; \varepsilon)$. Положим

$$\delta = \varepsilon - \rho(y, x) \qquad (35.17)$$

и покажем, что $U(y; \delta) \subset U(x; \varepsilon)$ (рис. 17).

Если $z \in U(y; \delta)$ и, значит, $\rho(z; y) < \delta$, то, применив неравенство треугольника и (35.17), получим

$$\rho(z, x) \leqslant \rho(z, y) + \rho(y, x) < \delta + \rho(y, x) = \varepsilon,$$

т. е. $z \in U(x; \varepsilon)$. Так как z — произвольная точка множества $U(y; \delta)$, то это означает, что $U(y; \delta) \subset U(x; \varepsilon)$. □

На примере доказательства этой леммы хорошо видно, как, используя для наглядности плоский чертеж, можно проводить доказательства в n-мерном пространстве.

Открытые множества пространства $\boldsymbol{R}^n$ будем обозначать, как правило, буквой G. Пустое множество будем по определению считать открытым.

УПРАЖНЕНИЯ. 7. Доказать, что внутренность всякого множества является открытым множеством.

8. Доказать, что прямоугольная окрестность точки является открытым множеством.

ЛЕММА 4. *Пересечение конечного числа, так же как и объединение любой совокупности открытых множеств, является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_k$ — открытые множества пространства $\boldsymbol{R}^n$. Если их пересечение $\bigcap\limits_{j=1}^{k} G_j$ — пустое множество, то оно, согласно договоренности, является откры-

тым. Если же указанное пересечение не пусто и $x \in \bigcap_{j=1}^{k} G_j$, то, в силу открытости множеств G_j, для каждого $j = 1, 2, \dots, k$ существует такое $\varepsilon_j > 0$, что $U(x, \varepsilon_j) \subset G_j$. Полагая $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$, получим, что для каждого j справедливо включение $U(x, \varepsilon) \subset G_j$ $(j = 1, 2, \dots, k)$. Следовательно, $U(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^{k} G_j$, т. е. точка x является внутренней для пересечения $\bigcap_{j=1}^{k} G_j$. Поскольку x — произвольная точка этого пересечения, оно является открытым множеством.

Пусть теперь дана произвольная система открытых множеств $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов и $G = \bigcup_{\alpha \subset \mathfrak{A}} G_\alpha$. Покажем, что G — открытое множество. Действительно, какова бы ни была точка $x \in G$, существует такой индекс $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, что $x \in G_{\alpha_0}$. Поскольку G_{α_0} — открытое множество, найдется такое $\varepsilon > 0$, что $U(x; \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}$. Но тогда $U(x; \varepsilon) \subset \bigcup_{\alpha \subset \mathfrak{A}} G_\alpha = G$, т. е. x — внутренняя точка множества G и, значит, это множество открыто. □

Очень удобным оказывается следующее определение.

Определение 14. *Всякое открытое множество, содержащее точку, называется ее окрестностью.*

Окрестность точки x будем, как правило, обозначать через $U = U(x)$, быть может, с теми или иными индексами, а иногда, как и в одномерном случае, другими буквами, например V, W.

Пересечение двух открытых множеств снова является открытым множеством (лемма 4). Поэтому пересечение двух окрестностей точки также является ее окрестностью.

З а м е ч а н и е. Во всякой окрестности $U(x)$ точки x, очевидно, содержится как сферическая, так и прямоугольная окрестность этой точки. Далее, если окрестность точки понимать в смысле определения 14, то точка x является пределом последовательности $\{x^{(m)}\}$ тогда и только тогда, когда для каждой ее окрестности $U(x)$ существует такой номер m_0, что для всех $m > m_0$ выполняется включение $x^{(m)} \in U(x)$.

Определение 15. *Точка $x \in \boldsymbol{R}^n$ называется точкой прикосновения множества $X \subset \boldsymbol{R}^n$, если любая окрестность этой точки содержит по крайней мере одну точку множества X.*

Очевидно, что каждая точка множества X является его точкой прикосновения, ибо всякая окрестность точки $x \in X$ содержит саму точку x. Вместе с тем могут, конечно, существовать и точки прикосновения данного множества, не принадлежащие ему (например, концы интервала на прямой являются его точками прикосновения).

УПРАЖНЕНИЕ 9. Доказать, что, для того чтобы точка $x \in \boldsymbol{R}^n$ была точкой прикосновения множества $X \subset \boldsymbol{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность точек $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x.$$

Определение 16. *Если у точки $x \in X$ существует окрестность, не содержащая никаких других точек множества X, кроме самой точки x, то эта точка называется изолированной точкой множества X.*

Определение 17. *Точка $x \in \boldsymbol{R}^n$ называется предельной точкой множества X, если любая окрестность точки x содержит по крайней мере одну точку множества X, отличную от x.*

Очевидно, что предельная точка множества является и его точкой прикосновения.

Определение предельной точки удобно сформулировать с помощью понятия проколотой окрестности точки n-мерного пространства, которое вводится по аналогии со случаем числовой прямой.

Определение 18. *Проколотой окрестностью $\mathring{U}(x^{(0)})$ точки $x^{(0)} \in \boldsymbol{R}^n$ называется всякое множество, получающееся удалением точки $x^{(0)}$ из некоторой окрестности $U(x^{(0)})$ этой точки:*

$$\mathring{U}(x^{(0)}) \stackrel{\text{def}}{\equiv} U(x^{(0)}) \setminus \{x^{(0)}\}.$$

Используя термин проколотой окрестности, предельную точку множества можно определить как точку, любая проколотая окрестность которой пересекается с данным множеством (в то время как у точки прикосновения любая ее (целая) окрестность обязана пересекаться с рассматриваемым множеством).

Мы уже встречались с понятиями точек прикосновения, предельных и изолированных в одномерном случае (см. п. 5.4 и 5.5). Напомним некоторые их свойства.

У всякой точки прикосновения x_0 множества X либо существует окрестность, содержащая лишь одну точку из X (в этом случае этой точкой является сама точка x_0), либо такой окрестности нет, т. е. в каждой окрестности точки x_0 имеется по крайней мере две точки множества X (следовательно, по крайней мере одна из них отлична от x_0). Поэтому всякая точка прикосновения множества X является либо его изолированной точкой, либо его предельной точкой (в последнем случае она может как принадлежать, так и не принадлежать самому множеству).

Если $x^{(0)}$ — предельная точка множества $X \subset \boldsymbol{R}^n$, то существует последовательность точек $x^{(m)} \in X$ таких, что $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x^{(0)}$, $x^{(m')} \neq x^{(m)} \neq x^{(0)}$, $m \neq m'$, $m \in \boldsymbol{N}$, $m' \in \boldsymbol{N}$, т. е. последовательность $\{x^{(m)}\}$ состоит из различных точек множества X, отличных от точки $x^{(0)}$, и сходится к этой точке. В самом деле, поскольку $x^{(0)}$ — предельная точка множества X, для окрестности $U(x^{(0)}, 1)$ существует точка (обозначим ее через $x^{(1)}$) такая, что $x^{(1)} \in$ $\in U(x^{(0)}, 1) \cap X$ и $x^{(1)} \neq x^{(0)}$. Пусть $\delta_1 = \min \left\{\frac{1}{2}, \rho(x^{(0)}, x^{(1)})\right\}$. Для окрестности $U(x^{(0)}, \delta_1)$ найдется такая точка (обозначим ее через $x^{(2)}$), что $x^{(2)} \in U(x^{(0)}, \delta) \cap X$, $x^2 \neq x^{(0)}$, ясно, что $x^{(2)} \neq x^{(1)}$. Продолжая этот процесс, мы получим искомую последовательность.

Из доказанного следует, что любая окрестность предельной точки множества содержит бесконечно много точек этого множества (ими, например, являются точки построенной выше последовательности).

Пример. Пусть $n = 1$, $X = (0, 1)$ — интервал. Каждая точка отрезка $[0, 1]$ является точкой прикосновения и предельной точкой множества X, при этом точки 0 и 1 не принадлежат самому множеству X. Если $X = [0, 1]$ — отрезок, то множество точек прикосновения множества X совпадает с самим множеством. Наконец, если множество X состоит из интервала $(0, 1)$ и точки 2, т. е. $X = (0, 1) \cup \{2\}$, то точка 2 является его изолированной точкой, а множеством его точек прикосновения является множество $[0, 1] \cup \{2\}$.

Определение 19. *Совокупность всех точек прикосновения множества $X \subset \boldsymbol{R}^n$ называется замыканием множества X и обозначается $\overline{X}$.*

Как уже отмечалось, каждая точка множества X является его точкой прикосновения, поэтому

$$X \subset \overline{X}. \tag{35.18}$$

Определение 20. *Множество X называется замкнутым, если $\overline{X} = X$, т. е. если оно содержит все свои точки прикосновения.*

Например, при $n = 1$ интервал $(0, 1)$ не является замкнутым множеством, а отрезок $[0, 1]$ — замкнутое множество. Пустое множество будем считать по определению замкнутым.

Все пространство и пустое множество являются одновременно замкнутыми и открытыми в $\boldsymbol{R}^n$ множествами (проверьте это). Можно показать, что в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ не существует других одновременно замкнутых и открытых множеств.

Всякая точка прикосновения множества является либо его предельной, либо его изолированной точкой, а изолированная точка, в силу своего определения, принадлежит множеству, поэтому требование принадлежности каждой точки прикосновения к множеству эквивалентно требованию принадлежности к этому множеству каждой его предельной точки. Иначе говоря, *множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

УПРАЖНЕНИЯ. 10. Доказать, что из включения $X \subset Y$ следует включение $\overline{X} \subset \overline{Y}$.

11. Пусть $X \subset \boldsymbol{R}^k \subset \boldsymbol{R}^n$. Доказать, что $x \in \boldsymbol{R}^n$ является точкой прикосновения множества X в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ тогда и только тогда, когда она принадлежит пространству $\boldsymbol{R}^k$ и является в нем точкой прикосновения множества X. Отсюда следует, что множество X является замкнутым множеством пространства $\boldsymbol{R}^k$ тогда и только тогда, когда оно является замкнутым множеством пространства $\boldsymbol{R}^n$. Таким образом, свойство множества быть замкнутым в некотором пространстве $\boldsymbol{R}^n$ является «внутренним» свойством этого множества, т. е. свойством, которое не зависит от выбора пространства $\boldsymbol{R}^n$, в котором лежит рассматриваемое множество. Как было отмечено выше, свойство множества быть открытым не является «внутренним» свойством в указанном смысле, одно и то же множество может быть открытым в одном пространстве $\boldsymbol{R}^n$ и не быть открытым в другом.

Отметим очевидное свойство замкнутых множеств:

Если F — замкнутое множество, а $\{x^{(m)}\}$ — сходящаяся последовательность, все члены которой принадлежат множеству F: $x^{(m)} \in F$, $m = 1, 2, \ldots$, то ее предел также принадлежит множеству F.

Действительно, если $x^{(0)} = \lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)}$, то из определения предела последовательности точек следует, что в любой окрестности точки $x^{(0)}$ имеются точки данной последовательности (и, более того, там лежат почти все точки последователь-

ности, т. е. все, за исключением конечного их множества), являющиеся, по предположению, и точками множества F. Таким образом, точка $x^{(0)}$ является точкой прикосновения множества F, и так как F — замкнутое множество, то $x^{(0)} \in F$.

Лемма 5. *Точка прикосновения замыкания множества является и точкой прикосновения самого множества.*

Следствие. *Замыкание всякого множества является замкнутым множеством.*

Доказательство леммы. Пусть $X \subset \boldsymbol{R}^n$, $\overline{X}$ — замыкание множества X и x — точка прикосновения множества $\overline{X}$, т. е. $x \in \overline{\overline{X}}$. Покажем, что $x \in \overline{X}$.

Из условия $x \in \overline{\overline{X}}$ следует, что любой окрестности $U = U(x)$ точки x принадлежит хотя бы одна точка y множества $\overline{X}$: $y \in U \cap \overline{X}$. Поскольку U, как всякая окрестность, является открытым множеством, она является и окрестностью содержащейся в ней точки y. Но $y \in \overline{X}$, следовательно, в любой окрестности точки y, в частности в U, имеется точка z из множества X: $z \in U \cap X$.

Итак, в любой окрестности U точки $x \in \overline{\overline{X}}$ имеется точка из X. Это означает, что x является точкой прикосновения множества X: $x \in \overline{X}$. □

Доказательство следствия. В лемме 5 доказано, что

$$\overline{\overline{X}} \subset \overline{X},$$

и так как, согласно (35.18), $\overline{X} \subset \overline{\overline{X}}$, то

$$\overline{\overline{X}} = \overline{X}. \tag{35.19}$$

Примеры. 1. Всякий n-мерный шар

$$Q^n = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \colon \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 < r^2 \right\} \tag{35.20}$$

является открытым множеством (см. лемму 1), поэтому его часто называют также *n-мерным открытым шаром*. Множество же

$$\overline{Q}^n = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \colon \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \leqslant r^2 \right\}, \tag{35.21}$$

замкнуто, так как нестрогие неравенства сохраняются при предельном переходе. Оно является замыканием открытого шара Q^n

и называется *n-мерным замкнутым шаром*. В случае $n = 2$: Q^2 — открытый круг, $\overline{Q}^2$ — замкнутый круг; в случае $n = 1$: Q^1 — интервал, $\overline{Q}^1$ — отрезок.

2. Замкнутый шар Q^n получается из открытого шара Q^n присоединением к нему множества

$$\left\{x = (x_1, \dots, x_n):\ \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = r^2\right\},$$

называемого $(n - 1)$-*мерной сферой радиуса r с центром в точке* $a = (a_1, \dots, a_n)$ и обозначаемого S^{n-1}. В случае $n = 2$ множество S^1 — окружность, в случае $n = 1$ множество S^0 — пара точек.

Сфера

$$S^{n-1} = \left\{x = (x_1, \dots, x_n):\ \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = r^2\right\} \qquad (35.22)$$

также служит примером замкнутого множества (почему?).

Заметим еще, что n-мерный шар радиуса 1 с центром в начале координат обычно называется *n-мерным единичным шаром* (замкнутым или открытым), а $(n - 1)$-мерная сфера радиуса 1 с центром в начале координат — $(n - 1)$-мерной единичной сферой.

3. Всякий n-мерный параллелепипед

$$P^n = P^n(a, \delta_1, \dots, \delta_n) = \{x: |x_i - a_i| < \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad a = (a_1, \dots, a_n)$$

является, как это уже отмечалось (см. упражнение 7), открытым множеством, поэтому его называют также n-мерным открытым параллелепипедом. Его замыкание

$$\overline{P}_n = \{x: |x_i - a_i| \leqslant \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

является замкнутым множеством и называется n-мерным замкнутым параллелепипедом. В частности, замыкание $\overline{Q}^n$ открытого куба $Q^n = \{x: |x_i - a_i| < \delta,\ i = 1, 2, \dots, n\}$ называется замкнутым кубом.

Определение 21. *Для всякого множества* $X \subset \boldsymbol{R}^n$ *множество* $\boldsymbol{R}^n \setminus X$ *называется его дополнением в пространстве* $\boldsymbol{R}^n$ (см. п. 1.1).

ЛЕММА 6. *Для того чтобы множество было открытым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение было замкнутым.*

Доказательство необходимости. Пусть G — открытое множество. Тогда никакая точка $x \in G$ не является точкой прикосновения его дополнения $F = \boldsymbol{R}^n \setminus G$, так как множество G, будучи открытым, является окрестностью точки x и не содержит точек множества F. Следовательно, все точки прикосновения множества F содержатся в F, что и означает замкнутость множества F.

Доказательство достаточности. Пусть F — замкнутое множество, $G = \boldsymbol{R}^n \setminus F$ и $x \in G$. В силу замкнутости F, точка x не является его точкой прикосновения, поэтому существует ее окрестность $U(x)$, не пересекающаяся с множеством F и, следовательно, такая, что $U(x) \subset G$. Таким образом, любая точка множества G является внутренней, т. е. G открыто. □

СЛЕДСТВИЕ 1. *Множество замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.*

Это сразу следует из леммы 6, так как если множество B является дополнением множества A в $\boldsymbol{R}^n$, т. е. $B = \boldsymbol{R}^n \setminus A$, то и, наоборот, множество A является дополнением B в $\boldsymbol{R}^n$: $A = \boldsymbol{R}^n \setminus B$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пересечение любой совокупности и объединение конечного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.*

В самом деле, пусть F_α — замкнутые множества, тогда, по лемме 6, множества $G_\alpha = \boldsymbol{R}^n \setminus F_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, являются открытыми. Согласно формуле (1.1) (см. том 1), имеем

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = \bigcap_\alpha (\boldsymbol{R}^n \setminus G_\alpha) = \boldsymbol{R}^n \setminus \bigcup_\alpha G_\alpha.$$

Множество $\bigcup_\alpha G_\alpha$, по лемме 4, открыто как объединение открытых множеств. Следовательно, его дополнение $\bigcap_\alpha F_\alpha = \boldsymbol{R}^n \setminus \bigcup_\alpha G_\alpha$, согласно лемме 6, замкнуто.

Аналогично с помощью формулы (1.2) доказывается замкнутость объединения конечного числа замкнутых множеств. □

УПРАЖНЕНИЕ 12. Доказать, что если G — открытое множество, а F — замкнутое, $G \subset \boldsymbol{R}^n$, $F \subset \boldsymbol{R}^n$, то $G \setminus F$ — открытое множество.

ЛЕММА 7. *Пусть X и Y — замкнутые непустые непересекающиеся множества из $\boldsymbol{R}^n$ и множество X ограничено; тогда существует такое число $d > 0$, что для любых двух точек $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется неравенство $\rho(x, y) \geqslant d$.*

Доказательство. Допустим, что такое число d не существует. Тогда для любого $m = 1, 2, \ldots$ существует пара точек $x^{(m)} \in X$ и $y^{(m)} \in Y$ таких, что $\rho(x^{(m)}, y^{(m)}) < \frac{1}{m}$. Поскольку X — ограниченное множество, из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$. Пусть $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x^{(0)}$. В силу замкнутости множества X, имеем $x^{(0)} \in X$. Из неравенства

$$\rho(x^{(0)}, y^{(m_k)}) \leqslant \rho(x^{(0)}, x^{(m_k)}) + \rho(x^{(m_k)}, y^{(m_k)}) < \rho(x^{(0)}, x^{(m_k)}) + \frac{1}{m_k}$$

следует, что $\lim\limits_{k \to \infty} \rho(x^{(0)}, y^{(m_k)}) = 0$. Поэтому точка $x^{(0)}$ является точкой прикосновения множества Y и, в силу его замкнутости, $x^{(0)} \in Y$. Таким образом, $x^{(0)} \in X$ и $x^{(0)} \in Y$, а это противоречит тому, что X и Y не пересекаются. □

Определение 22. *Для двух множеств X и Y величина*

$$\rho(X, Y) = \inf_{x \in X,\, y \in Y} \rho(x, y)$$

называется расстоянием между X и Y. В частности, если X состоит из одной точки x, то $\rho(X, Y) = \rho(x, Y)$ называется расстоянием от точки x до множества Y.

Применяя этот термин, лемму 7 можно сформулировать следующим образом.

Если два замкнутых непустых множества не пересекаются и по крайней мере одно из них ограничено, то расстояние между ними положительно.

Удобным является не только понятие окрестности точки, но и понятие окрестности множества.

Определение 23. *Всякое открытое в $\boldsymbol{R}^n$ множество G, содержащее множество $X \subset \boldsymbol{R}^n$, называется окрестностью множества X и обозначается $U(X)$.*

Объединение ε-окрестностей всех точек множества X называется ε-окрестностью этого множества и обозначается $U(X; \varepsilon)$.

Таким образом,

$$U(X, \varepsilon) = \bigcup_{x \in X} U(x; \varepsilon).$$

Очевидно, ε-окрестность множества, являясь суммой ε-окрестностей точек данного множества, являющихся открытыми множествами, также является открытым множеством и, следовательно, его окрестностью.

В терминах окрестностей множеств лемму 7 можно перефразировать следующим образом.

Если два непустых замкнутых множества не пересекаются и по крайней мере одно из них ограничено, то они имеют непересекающиеся ε-окрестности.

В самом деле, если X и Y — непустые замкнутые множества и X ограничено, то, согласно лемме 7, расстояние между ними больше нуля: $d \overset{\text{def}}{=} \rho(X, Y) > 0$ — и достаточно взять, например, $\varepsilon = \frac{d}{2}$.

УПРАЖНЕНИЯ. 13. Привести пример двух непересекающихся непустых замкнутых множеств, расстояние между которыми равно нулю.

14. Доказать, что два любых непересекающихся непустых замкнутых множества имеют непересекающиеся окрестности. Привести пример двух непустых непересекающихся множеств, у которых нет непересекающихся окрестностей.

ЛЕММА 8. *Если F — замкнутое множество, $F \subset \boldsymbol{R}^n$, $x \subset \boldsymbol{R}^n$ и $\rho(x, F) = d$, то существует такая точка $y \in F$, что $\rho(x, y) = d$.*

Доказательство. Если $\rho(x, F) = \inf\limits_{y \in F} \rho(x, y) = d$, то для любого $m = 1, 2, \ldots$ найдется такая точка $y^{(m)} \in F$, что $\rho(x, y^{(m)}) < d + \frac{1}{m}$. Очевидно, для каждого m справедливо включение $y^{(m)} \in U(x, d + 1)$, поэтому последовательность $\{y^{(m)}\}$ ограничена и, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{y^{(m_k)}\}$. Пусть $\lim\limits_{k \to \infty} y^{(m_k)} = y^{(0)}$. В силу замкнутости множества F, имеем $y^{(0)} \in F$, далее,

$$\rho(x, y^{(0)}) \leqslant \rho(x, y^{(m_k)}) + \rho(y^{(m_k)}, y_0) < d + \frac{1}{m_k} + \rho(y^{(m_k)}, y^{(0)}).$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, получим $\rho(x, y_0) \leqslant d$. С другой стороны, $\rho(x, y_0) \geqslant \rho(x, F) = d$, следовательно, $\rho(x, y^{(0)}) = d$. □

Определение 24. *Точка* $x \in \boldsymbol{R}^n$ *называется граничной точкой множества* $X \subset \boldsymbol{R}^n$*, если в любой ее окрестности существуют точки, как принадлежащие множеству* X*, так и не принадлежащие ему.*

Совокупность всех граничных точек множества X *называется его границей и обозначается* ∂X.

Очевидно, что граничная точка множества является и его точкой прикосновения: $\partial X \subset \overline{X}$, но не является его внутренней точкой: $\partial X \cap X_{\text{int}} = \varnothing$.

Каждая точка множества является либо его внутренней точкой, либо граничной, при этом множество может не содержать все или некоторые граничные точки:

$$X \subset X_{\text{int}} \cup \partial X.$$

Каждая точка замыкания $\overline{X}$ множества X также является либо внутренней, либо граничной точкой самого множества X, но его замыкание $\overline{X}$ содержит в себе уже все граничные точки множества: $\partial X \subset \overline{X}$. Поэтому $\overline{X} = X_{\text{int}} \cup \partial X$.

Справедливо, конечно, и равенство $\overline{X} = X \cup \partial X$, но в нем слагаемые правой части равенства, вообще говоря, пересекаются. Они не пересекаются тогда и только тогда, когда множество X является открытым. В самом деле, если множество открыто, то каждая его точка является внутренней и, тем самым, не принадлежит его границе.

Отметим еще, что граница всякого множества является замкнутым множеством. Действительно, в окрестности точки прикосновения границы имеется точка самой границы, поэтому в этой окрестности есть как точки, принадлежащие множеству, так и не принадлежащие ему.

Примеры. Пусть $n = 2$, $X = \boldsymbol{Q}^2 = \{(x_1, x_2)\colon x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ — открытый круг. Любая точка окружности

$$S^1 = \{(x_1, x_2)\colon x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

является граничной точкой множества X, и других граничных точек нет, т. е. $S^1 = \partial X$. В этом случае граница множества X не принадлежит ему.

Пусть $X = \overline{\boldsymbol{Q}}^2$ — замкнутый круг, и в этом случае окружность S^1 также является границей для X, причем теперь $\partial X \subset X$.

Наконец, если $X = S^1$ — окружность, то каждая точка множества X является его граничной точкой и других граничных точек нет, т. е. $X = \partial X$.

Вообще, $(n - 1)$-мерная сфера (35.22) является границей как n-мерного открытого шара (35.20), так и замкнутого (35.21), а также совпадает со своей собственной границей (почему?).

УПРАЖНЕНИЕ 15. Доказать, что, для того чтобы множество $X \subset \boldsymbol{R}^n$ было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы $\partial X \subset X$.

В дальнейшем понадобится еще понятие кривой в n-мерном пространстве. Обобщим данное выше определение кривой в трехмерном пространстве как класса эквивалентных путей. Предварительно заметим, что отображение $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ отрезка $[a, b]$ в пространство $\boldsymbol{R}^n$ называется *непрерывным*, если все числовые функции $x_1(t), \dots, x_n(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Определение 25. *Непрерывное отображение отрезка в пространство $\boldsymbol{R}^n$ называется путем в этом пространстве.*

Два пути $x(t) \in \boldsymbol{R}^n$, $a \leqslant t \leqslant b$, и $y(\tau) \in \boldsymbol{R}^n$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, называются эквивалентными, если существует такая непрерывная строго монотонная числовая функция $t = \varphi(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, отображающая отрезок $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$, что для всех $\tau \in [\alpha, \beta]$ выполняется равенство

$$x(\varphi(\tau)) = y(\tau).$$

Класс эквивалентных путей в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ называется кривой в этом пространстве.

Все изложенное в п. 16.1 и 16.2 о кривой в трехмерном пространстве естественным образом переносится на случай произвольного n-мерного пространства.

Для дальнейшего является важным также понятие прямой в n-мерном пространстве.

Определение 26. *Пусть $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \boldsymbol{R}$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — некоторые фиксированные числа $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$. Множество точек $x = (x_1, \dots, x_n)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$, координаты которых представимы в виде*

$$x_i = x_i^{(0)} + \alpha_i t, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad -\infty < t < +\infty,$$

называется прямой в пространстве $\boldsymbol{R}^n$, проходящей через точку $x^{(0)}$.

Очевидно, что в случае $n = 3$ получается прямая в обычном трехмерном пространстве, а $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ является направляющим вектором этой прямой.

Часть прямой, соответствующая изменению параметра t в некотором отрезке $[t', t'']$, называется отрезком в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Точки x' и x'' этого отрезка, соответствующие значениям параметра t' и t'', называются его концами, и рассматриваемый отрезок обозначается $[x', x'']$. Расстояние $\rho(x', x'')$ между концами отрезка называется его длиной.

Часть прямой, соответствующая изменению параметра t в бесконечном промежутке числовой оси, называется лучом в пространстве $\boldsymbol{R}^n$.

Если даны две различные точки $(x_1', \ldots, x_n')$ и $(x_1'', \ldots, x_n'')$, то уравнение прямой, проходящей через эти точки, имеет вид

$$x_i = x_i' + ((x_i'' - x_i')t, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Пример. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \boldsymbol{R}^n$, $d > 0$ и

$$Q^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \colon a_i < x_i < a_i + d, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$$

— n-мерный открытый куб. Каждая точка вида $(a_1 + \varepsilon_1 d, \ldots$ $\ldots, a_n + \varepsilon_n d)$, где ε_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, могут принимать только значения 0 и 1, называется вершиной как открытого куба Q^n, так и его замыкания, т. е. замкнутого куба $\overline{Q}^n$. Две вершины куба, которые отличаются только значением одного ε_i, называются соседними. Отрезок, соединяющий соседние вершины куба, называется его ребром. Длина ребра куба Q^n, следовательно, и куба $\overline{Q}^n$ равна d. Две вершины куба, у которых все значения ε_i различны, называются противоположными. Отрезок, соединяющий противоположные вершины куба, называется его диагональю; ее длина равна $d\sqrt{n}$. Нетрудно убедиться, что

$$d\sqrt{n} = \sup_{x,\, y \in Q^n} \rho(x, y) = \sup_{x,\, y \in \overline{Q}^n} \rho(x, y).$$

Определение 27. *Множество $X \subset \boldsymbol{R}^n$, любые две точки которого можно соединить целиком лежащей в нем непрерывной кривой, называется линейно связным*.*

* Кроме понятия линейной связности существует понятие связности множества, которое будет рассмотрено в § 57.

Иначе говоря, множество X называется линейно связным, если, каковы бы ни были точки $x \in X$ и $x'' \in X$, существует непрерывная кривая $x(t) = \{x_i(t): a \leqslant t \leqslant b\}$ такая, что ее началом является точка x', т. е. $x(a) = x'$, концом — точка x'', $x(b) = x''$, и все точки этой кривой принадлежат множеству X: $x(t) \in X$ для всех $t \in [a, b]$.

Примерами линейно связных множеств являются точка, отрезок, а примером линейно несвязного множества — пара различных точек.

ЛЕММА 9. *Если линейно связное множество пересекается с некоторым множеством и с его дополнением в $\boldsymbol{R}^n$, то оно пересекается и с границей этого множества.*

Доказательство. Пусть X — линейно связное множество $X \subset \boldsymbol{R}^n$, Y — некоторое множество, $Y \subset \boldsymbol{R}^n$, и пусть пересечения $X \cap Y$ и $X \cap (\boldsymbol{R}^n \backslash Y)$ не пусты. Пусть $x^{(1)} \in X \cap Y$ и $x^{(2)} \in X \cap (\boldsymbol{R}^n \backslash Y)$. Поскольку X — линейно связное множество, существует такая непрерывная кривая $x(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, что $x(a) = x^{(1)}$, $x(b) = x^{(2)}$ и $x(t) \in X$ для всех $t \in [a; b]$. Обозначим через τ верхнюю грань тех $t \in [a, b]$, для которых $x(t) \in Y$. Очевидно, $a \leqslant \tau \leqslant b$. В любой окрестности точки $x(\tau)$ содержатся как точки, принадлежащие Y, так и не принадлежащие Y (почему?). Следовательно, $x(\tau) \in \partial Y$. Поскольку $x(\tau) \in X$, пересечение $\partial Y \cap X$ не пусто. □

Определение 28. *Открытое линейно связное множество называется областью*.*

Примеры. В случае $n = 1$ всякий интервал является областью, а множество, состоящее из двух (или более) попарно непересекающихся интервалов (рис. 18), хотя и представляет собой открытое множество, не является областью.



Рис.18

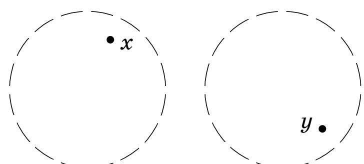


Рис. 19

* Не следует смешивать понятие области в смысле этого определения с понятием области определения функции.

В случае $n = 2$ всякий открытый круг есть область, а множество, состоящее из двух (или более) попарно непересекающихся открытых кругов (рис. 19), хотя и открыто, но не является областью, так как две точки x и y, принадлежащие разным кругам, нельзя соединить непрерывной кривой, лежащей целиком внутри рассматриваемого множества.

Всякий n-мерный открытый шар является областью.

Определение 29. *Множество, любые две точки которого можно соединить отрезком, целиком в нем лежащим, называется выпуклым.*

Всякий n-мерный открытый или замкнутый шар является выпуклым множеством.

Определение 30. *Множество, лежащее в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ и являющееся замыканием некоторой области, называется замкнутой областью.*

Замкнутый n-мерный шар является замкнутой областью.

УПРАЖНЕНИЯ. 16. Доказать, что n-мерный шар и n-мерный параллелепипед являются выпуклыми множествами.

17. Построить пример невыпуклой области.

Задача 5 (теорема Жордана*). Доказать, что всякий простой контур (см. п. 16.1) на плоскости разбивает плоскость на две области (ограниченную и неограниченную); это означает, во-первых, что он является границей каждой из этих областей, во-вторых, что никакие две точки, принадлежащие различным указанным областям, нельзя соединить кривой, не пересекающей данный контур.

35.3. Компакты

В этом пункте будут рассмотрены некоторые свойства множеств, называемых компактами и играющих важную роль в математическом анализе.

Определение 31. *Множество $A \subset \boldsymbol{R}^n$ называется компактом, если из любой последовательности его точек можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит множеству A.*

Пример. Из теоремы Больцано—Вейерштрасса (п. 4.6) и возможности перехода к пределу в неравенствах (п. 4.3) следует, что отрезок числовой прямой является компактом.

---

* К. Жордан (1838—1922) — французский математик.

Важное свойство, характеризующее компакты в $\boldsymbol{R}^n$, устанавливает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы множество $X \subset \boldsymbol{R}^n$ было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и замкнутым.*

Доказательство необходимости. Пусть $A \subset \boldsymbol{R}^n$ и A — компакт. Если множество A было бы неограниченным, то для любого натурального числа m нашлась бы такая точка $x^{(m)} \in A$, что $\rho(O, x^{(m)}) > m$, $m = 1, 2, \ldots$. Здесь, как всегда, $O = (0, 0, \ldots, 0)$. Очевидно, $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$. Поэтому любая подпоследовательность последовательности $\{x^{(m)}\}$ также имеет пределом ∞, и, следовательно, из $\{x^{(m)}\}$ нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность, что противоречит тому, что A — компакт. Итак, A — ограниченное множество.

Если множество A не было бы замкнутым, то у него существовала бы точка прикосновения x, которая в нем бы не содержалась: $x \notin A$. Для этой точки нашлась бы такая последовательность $x^{(m)} \subset A$, $m = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x$. Ясно, что любая ее подпоследовательность также имеет своим пределом ту же точку $x \notin A$. Поэтому из последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек множества A нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке этого множества, т. е. множество A снова не было бы компактом. Следовательно, A — замкнутое множество.

Доказательство достаточности. Пусть X — ограниченное замкнутое множество, $\{x^{(m)}\}$ — какая-либо последовательность его точек: $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \ldots$. В силу ограниченности множества X, эта последовательность также ограничена. Следовательно, по теореме 2 п. 35.1, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{m_k}\}$. Обозначим ее предел через x: $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x$. Очевидно, что x — точка прикосновения множества X, ибо $x^{(m_k)} \in X$, а так как X — замкнутое множество, то $x \in X$, т. е. X действительно компакт. □

Доказанная теорема позволяет легко устанавливать компактность многих часто встречающихся множеств, например отрезков, замкнутых шаров и параллелепипедов, сфер в пространствах $\boldsymbol{R}^n$ любой размерности, — все перечисленные множества, будучи ограниченными и замкнутыми, являются компактами. Так же легко с помощью теоремы 3 устанавливается и некомпактность многих множеств. Например, конечные интервалы, не будучи замкнутыми, а бесконечные, не будучи ограниченными множествами, не являются компактами.

Отметим, что, в силу той же теоремы 3, лемму 7 из п. 35.2 можно сформулировать следующим образом: *если два замкнутых непустых множества не пересекаются и по крайней мере одно из них является компактом, то расстояние между ними больше нуля.*

Прежде чем перейти к другим характеристическим свойствам компактов, введем ряд определений и докажем одно вспомогательное утверждение.

Последовательность n-мерных кубов $\{Q_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, называется последовательностью *вложенных кубов*, если

$$Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \subset Q_k \subset Q_{k+1} \subset \dots .$$

ЛЕММА 10. *Для последовательности замкнутых вложенных кубов $\{Q_k\}$, длины ребер которых стремятся к нулю при $k \to \infty$, существует одна и только одна точка, принадлежащая всем кубам рассматриваемой последовательности.*

Доказательство. Пусть кубы

$$Q_k = \{x = (x_i): a_i^{(k)} \leqslant x_i \leqslant a_i^{(k)} + d^{(k)};\ i = 1, 2, \dots, n\} \qquad (35.23)$$

с ребрами длин $d^{(k)}$ образуют последовательность вложенных кубов* и пусть $\lim\limits_{k\to\infty} d^{(k)} = 0$. Тогда отрезки $[a_i^{(k)}, a_i^{(k)} + d^{(k)}]$, $k = 1, 2, \dots$, образуют систему вложенных отрезков, длины $d^{(k)}$ которых стремятся к нулю при $k \to \infty$. Поэтому существуют, и притом единственные, числа ξ_i такие, что при фиксированном i ($i = 1, 2, \dots, n$) и любом $k = 1, 2, \dots$ имеет место включение $\xi_i \in [a_i^{(k)}, a_i^{(k)} + d^{(k)}]$. Отсюда следует, что точка $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ принадлежит всем кубам рассматриваемой последовательности: $\xi \in Q_k$, $k = 1, 2, \dots$, и эта точка единственна. □

Определение 32. *Пусть $X \subset \boldsymbol{R}^n$. Система*

$$\Omega = \{X_\alpha\},\ \alpha \in \mathfrak{A}, \qquad (35.24)$$

множеств $X_\alpha \subset \boldsymbol{R}^n$ ($\mathfrak{A} = \{\alpha\}$ — *некоторая совокупность индексов* α) *называется покрытием множества X, если*

$$X \subset \bigcup_{\alpha \subset \mathfrak{A}} X_\alpha .$$

* Напомним, что мы договорились (см. п. 35.1) под кубом, если не оговорено что-либо другое, всегда понимать лишь кубы, задаваемые неравенствами вида (35.23) при данной фиксированной системе координат.

Таким образом, система (14.24) называется покрытием множества X, если каждая точка этого множества принадлежит хотя бы одному множеству X_α системы Ω.

Покрытие (35.24) множества X, состоящее из конечного числа множеств X_α, называется *конечным покрытием этого множества*.

В том случае, когда все множества системы Ω открытые, покрытие Ω называется *открытым покрытием множества* X.

Ранее была доказана лемма Гейне—Бореля для покрытий отрезка интервалами. Докажем теперь ее обобщение для покрытий компактов открытыми множествами.

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы множество $X \subset \boldsymbol{R}^n$ было компактом, необходимо и достаточно, чтобы из любого его открытого покрытия можно было выделить конечное покрытие.*

Доказательство необходимости. Пусть A — компакт и пусть система

$$\Omega = \{G_\alpha\}, \quad \alpha \in \mathfrak{A}, \tag{35.25}$$

— его открытое покрытие. Допустим, что из этого покрытия нельзя выделить конечного покрытия компакта A. Согласно теореме 3, из того что множество A является компактом, следует его ограниченность. Поэтому существует замкнутый куб Q, содержащий множество A.

Пусть

$$Q = \{x = (x_i) \colon a_i \leqslant x_i \leqslant a_i + d, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Разобьем куб Q на 2^n равных замкнутых кубов Q_j, определеляемых набором n неравенств вида

$$a_i + \frac{d}{2} \leqslant x_i \leqslant a_i + d,\ a_j \leqslant x_j \leqslant a_j + \frac{d}{2}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

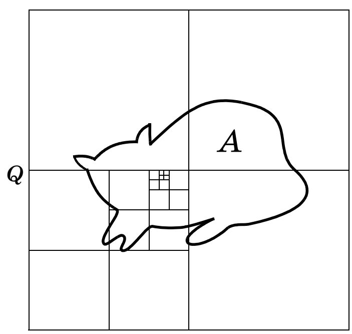


Рис. 20

(на рис. 20 изображен случай, когда $n = 2$), тогда

$$Q = \bigcup_{j=1}^{2^n} Q_j. \tag{35.26}$$

Система (35.25) образует открытое покрытие каждого из множеств $A \cap Q_j$ $(j = 1, 2, \ldots, 2^n)$. Среди этих множеств существует такое непустое множество (обозначим его

через $A \cap Q_{j_1}$), что из покрытия (35.25) нельзя выделить конечное покрытие этого множества — в противном случае из системы (35.25) можно было бы, в силу равенства (35.26), выделить конечное покрытие и всего множества A, что противоречило бы сделанному предположению.

Разобьем куб Q_{j_1} снова на 2^n равных замкнутых кубов $Q_{j_1 j}$ ($j = 1, 2, \dots, 2^n$). Обозначим через $Q_{j_1 j_2}$ тот из кубов $Q_{j_1 j}$, пересечение которого с компактом A нельзя покрыть конечным числом множеств системы Ω и т. д. В результате получим последовательность вложенных замкнутых кубов

$$Q_{j_1} \supset Q_{j_1 j_2} \supset \dots \supset Q_{j_1 j_2 \dots j_k} \supset \dots, \qquad (35.27)$$

длины ребер которых равны соответственно $\frac{d}{2}, \frac{d}{4}, \dots, \frac{d}{2^k}, \dots$ и, следовательно, стремятся к нулю при $k \to \infty$.

Каждый из кубов $Q_{j_1 j_2 \dots j_k}$ последовательности (35.27) обладает тем свойством, что из системы (35.25) нельзя выделить конечное покрытие непустого множества $A \cap Q_{j_1 j_2 \dots j_k}$, j_ν принимает одно из значений $1, 2, 3, \dots, 2^n$; $\nu = 1, 2, \dots, k$; $k = 1, 2, \dots$. Согласно лемме 10, существует, и притом единственная, точка ξ, принадлежащая всем кубам системы (35.27). Ребра кубов этой системы стремятся к нулю, и каждый куб имеет непустое пересечение с множеством A, поэтому в любой окрестности точки ξ имеются точки множества A. Действительно, заметим, что длина диагонали куба $Q_{j_1 j_2 \dots j_k}$ равна $(d\sqrt{n})/2^k$.

Далее, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, выберем k_0 так, что

$$\frac{d\sqrt{n}}{2^{k_0}} < \varepsilon. \qquad (35.28)$$

Это возможно, так как $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{d\sqrt{n}}{2^k} = 0$. Теперь, замечая, что любая точка $x \in Q_{j_1 j_2 \dots j_{k_0}}$ находится от точки $\xi \in Q_{j_1 j_2 \dots j_{k_0}}$ на расстоянии, не превышающем длины диагонали куба $Q_{j_1 j_2 \dots j_{k_0}}$, будем иметь $\rho(x, \xi) \leqslant \frac{d\sqrt{n}}{2^{k_0}} < \varepsilon$. Это означает, что x лежит в ε-окрестности точки ξ. Следовательно, весь куб $Q_{j_1 j_2 \dots j_{k_0}}$, в том числе его точки, принадлежащие множеству A, содержится в рассматриваемой ε-окрестности точки ξ. Таким образом, ξ является точкой прикосновения множества A. Согласно же теореме 3, множество A, будучи компактом, замкнуто, и поэтому $\xi \in A$.

Построенная вспомогательная последовательность кубов (35.27) позволяет легко показать невозможность выполнения сделанного предположения о том, что из покрытия (35.25) компакта A нельзя выделить конечного покрытия этого компакта. В самом деле, система (35.25) является покрытием множества A, поэтому существует такой индекс $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, что $\xi \in G_{\alpha_0}$. Множество G_{α_0} открыто, следовательно, найдется такое число $\varepsilon > 0$, что ε-окрестность $U(\xi; \varepsilon)$ точки ξ будет целиком содержаться в G_{α_0}:

$$U(\xi; \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}. \tag{35.29}$$

Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$, в частности для ε, удовлетворяющего условию (35.29), найдется, как показано выше, такой номер k_0, что будет выполнено включение

$$Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}} \subset U(\xi; \varepsilon). \tag{35.30}$$

Из (35.29) и (35.30) имеем

$$A \cap Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}} \subset Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}} \underset{(35.30)}{\subset} U(\xi; \varepsilon) \underset{(35.29)}{\subset} G_{\alpha_0},$$

и, следовательно, из системы (35.25) можно выделить конечное покрытие множества $A \cap Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$, а именно покрытие, состоящее только из одного множества G_{α_0}. Это противоречит допущению, в соответствии с которым выбраны кубы $Q_{j_1 j_2 \ldots j_k}$. Таким образом, предположив, что из системы (35.25) нельзя выделить конечного покрытия компакта, мы пришли к противоречию. Тем самым необходимость условия доказана.

Доказательство достаточности. Пусть $X \cap \boldsymbol{R}^n$ и пусть из любого открытого покрытия множества X можно выделить конечное покрытие. Допустим, что X не является компактом. Это, согласно определению 29, означает, что существует последовательность $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \ldots$, из которой нельзя выделить сходящуюся к некоторой точке из X подпоследовательность. Следовательно, какова бы ни была точка $x \in X$, она не является частичным пределом последовательности $\{x^{(m)}\}$. Поэтому у каждой точки $x \in X$ найдется окрестность (обозначим ее через G_x), содержащая лишь конечное число элементов последовательности $\{x^{(m)}\}$; в противном случае из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно было бы выделить сходящуюся к x подпоследовательность.

В силу выбора окрестностей G_x, каждая точка x множества X принадлежит соответствующей окрестности: $x \in G_x$. Поэтому со-

вокупность $\Omega = \{G_x\}$, $x \in X$, всех таких окрестностей образует открытое покрытие множества X. Согласно условию теоремы, из него можно выделить конечное покрытие. Пусть это покрытие

$$\Omega_0 = \{G_{x_1}, G_{x_2}, \ldots, G_{x_k}\}.$$

Каждый элемент этого покрытия содержит конечное число членов последовательности $\{x^{(m)}\}$. Следовательно, все элементы покрытия Ω_0 также содержат конечное число членов последовательности $\{x^{(m)}\}$. Это, однако, невозможно, так как, покрывая все множество X, элементы конечного покрытия Ω_0 должны содержать все члены последовательности $\{x^{(m)}\}$, которых бесконечно много. Полученное противоречие доказывает достаточность условий теоремы. □

З а м е ч а н и е. Необходимость условий теоремы, т. е. утверждение, что из всякого открытого покрытия компакта можно выделить конечное покрытие, как и в случае покрытия отрезка интервалами, обычно называют леммой Гейне—Бореля.

Подчеркнем, что в теореме 4 существенным является то, что рассматриваются покрытия, состоящие именно из открытых множеств. Так, например, из покрытия отрезка $[0, 1]$ (который, как уже отмечалось, будучи ограниченным замкнутым множеством, является компактом) отрезками $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, $n = 1, 2, \ldots$, и отрезком $[-1, 0]$ нельзя выделить конечного покрытия. Это объясняется тем, что здесь покрытие состоит не из открытых, а из замкнутых множеств.

Докажем еще одно полезное для дальнейшего свойство открытых покрытий компактов. Нам понадобится для этого понятие диаметра множества.

Определение 33. *Число конечное или бесконечное*

$$\sup_{x,\, y \in X} \rho(x, y)$$

называется диаметром множества $X \subset \boldsymbol{R}^n$ *и обозначается* diam X, *т. е.*

$$\operatorname{diam} X = \sup_{x,\, y \in X} \rho(x, y). \tag{35.31}$$

Ясно, что $0 \leqslant \operatorname{diam} X \leqslant +\infty$, $\operatorname{diam} X = \operatorname{diam} \overline{X}$.

Из определения диаметра множества, очевидно, следует, что для любых двух его точек $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется неравенство $\rho(x, y) \leqslant \operatorname{diam} X$.

По определению будем считать, что диаметр пустого множества равен нулю:

$$\operatorname{diam} \varnothing = 0.$$

Примеры. 1. Диаметр открытого n-мерного шара $U\ (x^{(0)}; r)$ радиуса r равен $2\ r$.

Действительно, если $x, y \in U\ (x^{(0)}; r)$ и, следовательно,

$$\rho\ (x, x^{(0)}) < r, \quad \rho\ (y, x^{(0)}) < r,$$

то

$$\rho\ (x, y) \leqslant \rho\ (x, x^{(0)} + \rho\ (x^{(0)}, y) \leqslant 2\ r. \tag{35.32}$$

С другой стороны, если $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, $x^{(k)} = (x_1^{(0)} - r + {}$ ${}+ \frac{1}{k}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, $y^{(k)} = (x_1^{(0)} + r - \frac{1}{k}, x_2, \dots, x_n^{(0)})$, то

$$\rho\ (x^{(k)}, x^{(0)}) = \rho\ (y^{(k)}, x^{(0)}) = r - \frac{1}{k} < r, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и поэтому $x^{(k)}, y^{(k)} \in U\ (x^{(0)}; r)$. Поскольку

$$\rho\ (x^{(k)}, \quad y^{(k)}) = 2r - \frac{2}{k},$$

то

$$\lim_{k \to \infty} \rho\ (x^{(k)}, y^{(k)}) = 2\ r. \tag{35.33}$$

Из (35.32) и (35.33) следует, что

$$\operatorname{diam} U\ (x^{(0)}; r) = 2\ r.$$

2. Пусть

$$Q^n = Q^n\left(x^{(0)}; \frac{a}{2}\right) = \left\{x = (x_i) : |x_i - x_i^{(0)}| \leqslant \frac{a}{2},\ i = 1, 2, \dots, n\right\} \tag{35.34}$$

— замкнутый n-мерный куб с центром в точке $x^{(0)} = (x_i^{(0)})$ и ребром длины a, тогда

$$\operatorname{diam} Q^n = a\sqrt{n}. \tag{35.35}$$

Действительно, для любых точек $x = (x_i) \in Q^n$ и $y = (y_i) \in Q^n$ имеем

$$|x_i - y_i| \leqslant |x_i - x_i^{(0)}| + |x_i^{(0)} - y_i| \underset{(35.32)}{\leqslant} \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a,\ i = 1, 2, \dots, n. \tag{35.36}$$

Поэтому

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \underset{(35.36)}{\leqslant} a\sqrt{n}. \tag{35.37}$$

С другой стороны, при $x_i' = x_i^{(0)} - \frac{a}{2}$, $y_i' = x_i^{(0)} + \frac{a}{2}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $x' = (x_i')$, $y' = (y_i')$, получим

$$\rho(x', y') = a\sqrt{n}. \tag{35.38}$$

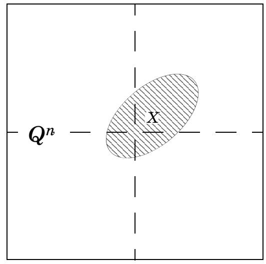
Из соотношений (35.37) и (35.38) и следует равенство (35.35).

УПРАЖНЕНИЕ 18. Доказать, что диаметр любого множества совпадает с диаметром его замыкания.

С помощью понятия диаметра множества можно, например, описать свойство множества быть ограниченным: множество ограничено тогда и только тогда, когда его диаметр конечен.

Действительно, если множество X ограничено, то оно содержится в некотором n-мерном кубе Q^n (см. определение 9 в п. 35.1). Если длина ребра куба Q^n равна a, то

$$\operatorname{diam} X \leqslant \operatorname{diam} Q^n = a\sqrt{n}.$$



$a = 2 \operatorname{diam} X$

Рис. 21

Обратно, если диаметр множества X конечен, то оно содержится в замкнутом кубе Q^n, центром которого является произвольно выбранная точка множества X, а длина a ребра этого куба равна 2 diam X, так как все точки множества X находятся от центра куба x на расстоянии, не большем diam X, т. е. половины длины ребра куба (на рис. 21 изображен случай $n = 2$).

ТЕОРЕМА 5. *Для любого открытого покрытия компакта существует такое положительное число (называемое числом Лебега данного покрытия), что любое подмножество компакта с диаметром, меньшим этого числа, содержится по крайней мере в одном элементе покрытия.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть существует такое открытое покрытие $\Omega = \{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, некоторого компакта X, что для любого $\delta > 0$ найдется множество $E \subset X$, diam $E < \delta$, которое не содержится ни в одном элементе покрытия Ω. Возьмем $\delta = \frac{1}{m}$, $m \in N$, и пусть E_m — подмножество компакта X,

$$\operatorname{diam} E_m < \frac{1}{m}, \tag{35.39}$$

не содержащееся ни в одном элементе покрытия Ω.

Выберем произвольно точку

$$x^{(m)} \in E_m, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{35.40}$$

Поскольку множество X является компактом, то из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$, причем

$$\lim_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x^{(0)} \in X. \tag{35.41}$$

Система Ω является покрытием компакта X. Поэтому существует по крайней мере один элемент G_α этого покрытия, содержащий точку $x^{(0)}$. В силу открытости множества G_α найдется сферическая окрестность $U(x^{(0)}; \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, точки $x^{(0)}$, содержащаяся в G_α:

$$U(x^{(0)}; \varepsilon) \subset G_\alpha. \tag{35.42}$$

Выберем номер k_0 так, чтобы

$$\frac{1}{m_{k_0}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{35.43}$$

В силу условия (35.39) существует такое

$$k > k_0, \tag{35.44}$$

что

$$|x^{(m_k)} - x^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{35.45}$$

Тогда для любой точки $x \in E_{m_k}$ будем иметь

$$|x - x^{(0)}| \leqslant |x - x^{(m_k)}| + |x^{(m_k)} - x^{(0)}| \underset{\substack{(35.39),\ (35.40),\\ (35.45)}}{<}$$

$$\underset{\substack{(35.39),\ (35.40),\\ (35.45)}}{<} \frac{1}{m_k} + \frac{\varepsilon}{2} \underset{(35.43),\ (35.44)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{35.46}$$

Таким образом,

$$E_{m_k} \underset{(35.46)}{\subset} U(x^{(0)}; \varepsilon) \underset{(35.42)}{\subset} G_\alpha,$$

т. е. нашлось множество $G_\alpha \in \Omega$, содержащее множество E_{m_k} — противоречие. □

В заключение этого пункта докажем одно вспомогательное утверждение. Предварительно введем следующее обозначение: для всякого множества $X \subset \boldsymbol{R}^n$ обозначим через X_η, где $\eta > 0$, совокупность всех точек, расстояния которых от X не превосходят числа η, т. е. положим, что

$$X_\eta \overset{\text{def}}{=} \{x : \rho(x, X) \leqslant \eta\}.$$

ЛЕММА 11. *Если A — компакт, $A \subset \boldsymbol{R}^n$, то при любом $\eta > 0$ множество A_η также является компактом.*

Доказательство. Согласно теореме 3, множество A, будучи компактом, ограничено и замкнуто. Ограниченность множества A означает, что существует такое $a > 0$, что A содержится в шаре $U(O, a)$.

Покажем, что $A_\eta \subset U(O,\ a+\eta)$. Если $x \in A_\eta$, то, согласно лемме 8, найдется такая точка $y \in A$, что $\rho(x,\ y) = \rho(x,\ A) \leqslant \eta$. Из условия $A \subset U(O,\ a)$ следует, что $\rho(O,\ y) < a$, поэтому

$$\rho(O,\ x) \leqslant \rho(O,\ y) + \rho(y,\ x) < a + \eta.$$

Таким образом, $x \in U(O,\ a+\eta)$. Точка x является произвольной точкой множества A_η. Следовательно, $A_\eta \subset U(O,\ a+\eta)$, и поэтому множество A_η ограничено.

Покажем теперь, что A_η — замкнутое множество. Если x — точка прикосновения множества A_η: $x \in \overline{A}_\eta$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая точка $y \in A_\eta$, что $\rho(x,\ y) < \varepsilon$. Из определения множества A_η и леммы 8 следует, что существует такая точка $z_0 \subset A$, что $\rho(y,\ z_0) = \rho(y,\ A) \leqslant \eta$; поэтому

$$\rho(x,\ A) = \inf_{z \in A} \rho(x,\ z) \leqslant \rho(x,\ z_0) \leqslant \rho(x,\ y) + \rho(y,\ z_0) < \varepsilon + \eta.$$

Это неравенство верно для любого $\varepsilon > 0$. Устремляя ε к нулю, получаем $\rho(x,\ A) \leqslant \eta$, т. е. $x \in A_\eta$, что и доказывает замкнутость множества A_η.

Итак, множество A_η ограничено и замкнуто, следовательно, в силу той же теоремы 3, является компактом. □

35.4. Многомерные векторные пространства

В п. 15.1 т. 1 отмечалось, что при фиксированной системе координат в трехмерном пространстве задание вектора равносильно заданию трех его координат. При сложении векторов и их умножении на числа те же действия выполняются и с их координатами. В n-мерном случае вектор можно определить с помощью его координат.

Определение 34. *Упорядоченная система n действительных чисел*

$$(x_1,\ \dots,\ x_n); \quad x_i \in R, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

называется n-мерным действительным вектором x, а числа $x_1, \dots, x_n$ — его координатами. Число n называется размерностью вектора.

Суммой $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ называется вектор $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, т. е.

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \overset{\text{def}}{=} (x_1 + y_1,\ \dots,\ x_n + y_n),$$

а произведением вектора $\boldsymbol{x}$ на число $\lambda \in \boldsymbol{R}$ называется вектор

$$\lambda\boldsymbol{x} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{x}\lambda \overset{\text{def}}{=} (\lambda x_1,\ \dots,\ \lambda x_n).$$

Множество всех n-мерных векторов, в котором введены операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число, называется *n-мерным действительным векторным пространством или, более полно, n-мерным арифметическим векторным пространством над полем действительных чисел*. Как в случае векторного, так и в случае точечного n-мерного пространства число n называется размерностью этого пространства. Вектор $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ называется *нулевым вектором* или *нулем n-мерного векторного пространства*.

По определению, вектор $-\boldsymbol{x} \overset{\text{def}}{=} (-1)\boldsymbol{x}$ называют противоположным вектору $\boldsymbol{x}$.

УПРАЖНЕНИЕ 19. Доказать, что если $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ — любые векторы, а числа $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ произвольны, то: 1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$; 2) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$; 3) $\boldsymbol{x} + 0 = \boldsymbol{x}$; 4) $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$; 5) $\lambda(\mu\boldsymbol{x}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{x}$; 6) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x}$; 7) $\lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}$.

Таким образом, n-мерное арифметическое точечное пространство (см. определение 1 в п. 18.1) превращается в n-мерное арифметическое векторное пространство, если в нем ввести операции сложения его элементов и умножения их на число, согласно определению 34.

В трехмерном случае связь между точками пространства и векторами в нем можно установить (считая, как всегда, систему координат фиксированной), сопоставляя каждой точке $M = (x_1, x_2, x_3)$ этого пространства ее радиус-вектор, т. е. вектор $OM = (x_1, x_2, x_3)$. Это сопоставление является взаимно-однозначным соответствием между точками трехмерного пространства и векторами в нем.

Итак, как n-мерное точечное, так и n-мерное векторное пространства состоят из одних и тех же элементов — из упорядоченных совокупностей n действительных чисел. Поэтому как то, так и другое пространство будет обозначаться одним и тем же символом $\boldsymbol{R}^n$. Они отличаются друг от друга тем, что в точечном арифметическом n-мерном пространстве вводится понятие расстояния между его элементами (см. определение 1 в п. 35.1), а в n-мерном векторном определяются операции сложения векторов и умножения их на действительные числа (см. определение 34 этого пункта).

Если обозначить через $\boldsymbol{e}_k$ n-мерный вектор, все координаты которого равны нулю, кроме k-й, равной единице, k — фиксированное натуральное число ($k \in \{1, 2, \ldots, n\}$), то для любого n-мерного вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ справедливо равенство

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n, \qquad (35.47)$$

правая часть которого называется разложением вектора $\boldsymbol{x}$ по векторам $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. При этом коэффициенты $x_1, \ldots, x_n$ этого разложения единственны, т. е. однозначно определяются самим вектором $\boldsymbol{x}$, и, следовательно, в силу равенства (35.47), совпадают с его координатами $x_1, \ldots, x_n$.

Векторы $\boldsymbol{e}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *называются координатными или базисными векторами, а их упорядоченная совокупность* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — *стандартным* (или *каноническим*) *базисом пространства* $\boldsymbol{R}^n$ (общее определение базиса будет дано ниже).

Подмножество L векторного пространства $\boldsymbol{R}^n$ называется *подпространством* пространства $\boldsymbol{R}^n$, если для любых векторов $\boldsymbol{x} \in L$, $\boldsymbol{y} \in L$ и любых чисел $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\mu \in \boldsymbol{R}$ имеет место включение $\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y} \in L$.

Определение 35. *Скалярным произведением двух векторов* $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *и* $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $n > 3$, *называется число, обозначаемое через* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *и определяемое по формуле*

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n. \tag{35.48}$$

Иногда при обозначении скалярного произведения скобки опускают, т. е. вместо $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ пишут $\boldsymbol{xy}$.

Из элементарной математики известно, что формула (35.48) справедлива и при обычном определении скалярного произведения векторов, т. е. и для $n \leqslant 3$.

Всякое n-мерное векторное пространство, в котором введено скалярное произведение, называется *евклидовым*.

Число $\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ называется *длиной вектора* $\boldsymbol{x}$ и обозначается через $|\boldsymbol{x}|$:

$$|\boldsymbol{x}| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{35.49}$$

Очевидно, что для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$ и любого числа $\lambda \in \boldsymbol{R}$ имеет место равенство

$$|\lambda \boldsymbol{x}| = |\lambda|\,|\boldsymbol{x}|, \tag{35.50}$$

а из неравенства (35.3) (см. п. 35.1) следует, что для любых $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ выполняется неравенство

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|, \tag{35.51}$$

называемое *неравенством треугольника*.

Из (35.51) следует, что

$$\big||\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{y}|\big| \leqslant |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|. \tag{35.52}$$

Действительно, $|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y}|$, поэтому

$$|\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|.$$

В силу равноправия $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, имеем также

$$|\boldsymbol{y}| - |\boldsymbol{x}| \leqslant |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|.$$

Из двух последних неравенств и следует (35.52). □

Если $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, то имеем $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$ и поэтому

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \rho(x, y), \qquad (35.53)$$

где x и y — точки точечного n-мерного пространства с теми же координатами, что и векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Таким образом, в n-мерном векторном пространстве со скалярным произведением определено расстояние $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ между его элементами, совпадающее с расстоянием $\rho(x, y)$, определенным в п. 35.1. Поэтому все понятия, введенные в п. 35.1—35.3 для точечных пространств, имеют смысл и для векторных пространств со скалярным произведением.

В качестве примера использования векторной символики отметим, что замкнутый шар $Q^n(x_0, r)$ радиуса r с центром в точке x_0 в векторных обозначениях определяется равенством

$$Q^n(x_0, r) = \{\boldsymbol{x}: |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \leqslant r\},$$

а ограничивающая его $(n - 1)$-мерная сфера $S^{n-1}(x_0, r)$ — равенством

$$S^{n-1}(x_0, r) = \{\boldsymbol{x}: |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| = r\}.$$

Скалярное произведение обладает следующими непосредственно проверяемыми свойствами:

1^0. К о м м у т а т и в н о с т ь. *Для любых* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).$$

2^0. Д и с т р и б у т и в н о с т ь. *Для любых* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

3^0. О д н о р о д н о с т ь. *Для любого* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ *и любого числа* $\lambda \in \boldsymbol{R}^n$

$$(\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

4^0. Н е в ы р о ж д е н н о с т ь. *Для любого* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ *выполняется неравенство* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0$, *причем*

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0.$$

Дистрибутивность и однородность скалярного произведения образуют вместе свойство, называемое *линейностью скалярного произведения*.

Если $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — координатные векторы в $\boldsymbol{R}^n$, то, согласно (35.48),

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Поэтому для любого вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, в силу свойств скалярного произведения, получим

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i) = (x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_i) =$$
$$= x_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_i) + \ldots + x_n(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_i) = x_i(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i) = x_i, \qquad (35.54)$$

т. е. i-я координата вектора $\boldsymbol{x}$ равна скалярному произведению $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)$.

Используя обозначения скалярного произведения векторов (35.48) и длины вектора (35.49), можно упростить запись и доказательство ряда формул. Например, неравенство Коши—Шварца (см. (35.2) в п. 35.1) для векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ записывается в виде

$$(x, y) \leqslant |x|\,|y|. \qquad (35.55)$$

Запись формулы (35.3) с использованием обозначения длины вектора была приведена выше (см. (35.51)).

УПРАЖНЕНИЕ 20. Провести доказательство леммы 1 и ее следствия (см. п. 35.1), используя обозначения скалярного произведения векторов и их длин.

Углом φ между векторами $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ и $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$, $n > 3$, называется угол φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, определяемый равенством

$$\cos \varphi = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}. \qquad (35.56)$$

В силу неравенства Коши—Шварца (35.55), это определение корректно, поскольку, согласно (35.55), для φ, определяемого формулой (35.56), имеет место неравенство $|\cos \varphi| \leqslant 1$.

Здесь снова, как и в случае определения скалярного произведения, за исходное определение принимается высказывание, аналогичное которому в пространстве $\boldsymbol{R}^n$, $n \leqslant 3$, является доказываемым утверждением. Благодаря этому формулы (35.48) и (35.56) оказываются справедливыми во всех пространствах $\boldsymbol{R}^n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Векторы, скалярное произведение которых равно нулю, называются *ортогональными*.

Ненулевые ортогональные векторы называются *перпендикулярными*.

Вектор единичной длины кратко называют *единичным вектором*.

Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — единичные векторы, то для косинуса угла между ними из формулы (35.56) получаем

$$\cos\varphi = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \quad |\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = 1. \qquad (35.57)$$

Если $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$ — единичный вектор, то, обозначая через α_i угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e}_i$, согласно (35.54) и (35.57), имеем $a_i = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_i) = \cos\alpha_i$, т. е.

$$\boldsymbol{a} = (\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n).$$

Косинусы $\cos\alpha_i$, $i = 1, \dots, n$, называются *направляющими косинусами вектора* $\boldsymbol{a}$.

Поскольку $|a| = 1$, в силу (35.49), имеем

$$\cos^2\alpha_1 + \dots + \cos^2\alpha_n = 1. \qquad (35.58)$$

Если $\boldsymbol{a}$ не единичный вектор и $\boldsymbol{a} \neq 0$, то, очевидно, вектор $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ уже единичный и его направляющие косинусы называются также и направляющими косинусами вектора $\boldsymbol{a}$.

Векторы стандартного базиса ортогональны друг другу, и длины их равны единице.

Всякое упорядоченное множество n единичных векторов $\{e_1', e_2', \dots, e_n'\}$, попарно ортогональных друг другу:

$$|\boldsymbol{e}_i| = 1, (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0, \quad i \neq j, i, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

называется *базисом векторного пространства* $\boldsymbol{R}^n$ или, более подробно, *ортонормированным базисом этого пространства*.

Из линейной алгебры известно, что каждый вектор раскладывается и при этом единственным образом в линейную комбинацию векторов базиса. Коэффициенты этого разложения называются координатами вектора относительно данного базиса. Поэтому переход от одного базиса к другому называется переходом от одной системы координат к другой.

Из линейной алгебры известно также, что векторы любого ортонормированного базиса $\{e_1', e_2', \dots, e_n'\}$ выражаются через векторы другого такого базиса $\{e_1'', e_2'', \dots, e_n''\}$ (в частности, через векторы стандартного базиса) с помощью матрицы $C = \{c_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, у которой обратная матрица C^{-1} совпа-

дает с транспонированной C^* (такие матрицы называются ортогональными):

$$e_1' = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} e_j'', \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad C^{-1} = C^*.$$

Верно и обратное утверждение: если упорядоченная система векторов выражается через некоторый ортонормированный базис с помощью ортогональной матрицы, то эта система также является ортонормированным базисом.

Уравнение прямой в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ (см. определение 26 в п. 35.2) в векторной записи имеет вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(0)} + t\boldsymbol{a}, \quad -\infty < t < +\infty, \qquad (35.59)$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}), \quad \boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$$

(при сложении координат векторов сами векторы также складываются, а при умножении их координат на число они умножаются на то же число). Прямая (35.59) называется *прямой, проходящей через точку* $x^{(0)} = (x^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ точечного пространства в направлении вектора $\boldsymbol{a}$.

Вектор $\boldsymbol{a}$ называется *направляющим вектором прямой* $x = x^{(0)} + \boldsymbol{a}t$. Две несовпадающие прямые, уравнение которых можно записать с одним и тем же направляющим вектором, называются *параллельными*.

Если $\boldsymbol{a}$ — единичный вектор, $|\boldsymbol{a}| = 1$ и, следовательно, $\boldsymbol{a} = (\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n)$ ($\cos\alpha_i$ — направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a}$; $i = 1, 2, \dots, n$), то прямая (35.59) в координатной записи имеет вид

$$x_i = x_i^{(0)} + t\cos\alpha_i; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad -\infty < t < +\infty. \qquad (35.60)$$

Пусть заданы две точки $x' = (x_1', \dots, x_n')$ и $x'' = (x_1'', \dots, x_n'')$ точечного пространства; обозначим через $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$ векторы с теми же координатами. Тогда уравнение прямой, проходящей через точки x' и x'' (см. п. 35.2), в векторной записи имеет вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + (\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x}')t, \quad -\infty < t < +\infty. \qquad (35.61)$$

Если $\{e_1', e_2', \dots, e_n'\}$ — базис пространства $\boldsymbol{R}^n$, то множество векторов $\boldsymbol{x} = e_i't$, $-\infty < t < +\infty$, называется i-й координатной осью для рассматриваемого базиса, $i = 1, 2, \dots, n$.

По аналогии с § 15 можно рассмотреть n-мерную векторную функцию

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in X \subset \boldsymbol{R}$$

($\boldsymbol{R}$, как всегда, множество всех действительных чисел). Аналогично тому, как это было сделано в § 15 т. 1, при любом на-

туральном n определяются понятия предела, непрерывности и производной векторной функции $\boldsymbol{r}(t)\in\boldsymbol{R}^n$. Как и для $n \leqslant 3$, при дифференцировании векторной функции дифференцируются ее координаты: $\boldsymbol{r}'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$.

§ 36
Предел и непрерывность функций многих переменных и отображений

36.1. Функции многих переменных

Рассмотрим сначала функции, которые определены на множествах n-мерного арифметического евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$ и значениями которых являются действительные числа. Таким образом, эти функции являются функциями точек пространства. Это означает, что если имеется какая-либо функция $f(x_1, \dots, x_n)$ и в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ задана система координат $x_1, \dots, x_n$, то в другой системе координат $\xi_1, \dots, \xi_n$, связанной с исходной преобразованием

$$x_i = x_i(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

под той же функцией понимается не $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$, а функция

$$f\,(x_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, x_n(\xi_1, \dots, \xi_n)).$$

Рассматриваемые функции будем обозначать либо одной буквой, например f, либо более подробно, с указанием аргумента, через $f(x)$ или $f(x_1, \dots, x_n)$. При $n > 1$ они называются *функциями многих переменных*. В случае $n = 2$ вместо $f(x_1, x_2)$ будем писать также $f(x, y)$, в случае $n = 3$ вместо $f(x_1, x_2, x_3)$ также $f(x, y, z)$.

Для функции $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ее аргументом называют как точку x, так и каждую из ее координат $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Всякой функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ соответствует ее график в $(n + 1)$-мерном пространстве точек $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$. Определим это понятие.

Определение 1. *Пусть на множестве X евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$ определена функция $y = f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)\in X$, и пусть $\boldsymbol{R}_{xy}^{n+1}$ — $(n + 1)$-мерное евклидово пространство точек $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y)$. Множество точек вида $(x, f(x)) \equiv$ $\equiv (x_1, \dots, x_n, f(x))$ пространства $\boldsymbol{R}_{xy}^{n+1}$, где $x\in X$, называется графиком функции f.*

График функции многих переменных, так же как и график функции одной переменной, удобно использовать для геометрической интерпретации вводимых понятий и доказываемых утверждений. Конечно, изображение графика на рисунке в случае, когда число независимых переменных больше единицы, сложнее, чем в одномерном случае. На рис. 22 изображен вид графика функции двух переменных $y = f(x_1, x_2)$.

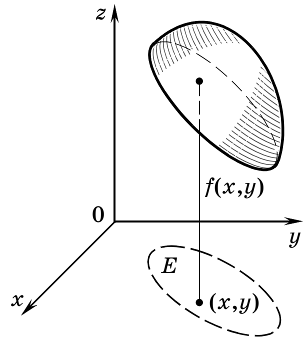


Рис. 22

Сформулированное здесь определение графика функции n переменных является частным случаем общего определения графика функции, сформулированного в п. 1.2*.

Пусть снова функция f определена на множестве $X \subset \boldsymbol{R}^n$. Множество точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$, удовлетворяющих уравнению

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c,$$

где c — некоторая постоянная, называется *множеством уровня* функции f, соответствующим данному значению c.

В случае $n = 2$ множество уровня называется также *линией уровня*, в случае $n = 3$ — *поверхностью уровня*, а при $n > 3$ — *гиперповерхностью уровня*.

Изучение функций многих переменных начнем с понятия их предела. Для того чтобы не рассматривать отдельно случаи, когда аргумент функции стремится к точке пространства или «неограниченно возрастает», удобно, как и в случае пределов последовательностей точек n-мерного пространства, использовать понятие его бесконечно удаленной точки (см. конец п. 35.1).

Определим понятие окрестности бесконечно удаленной точки ∞ пространства.

Окрестностью $U(\infty)$ бесконечно удаленной точки ∞ в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ называется дополнение в $\boldsymbol{R}^n$ до любого лежащего в нем компакта.

Нередко встречается частный вид окрестностей бесконечно удаленной точки — так называемые ее ε-окрестности.

Внешность n-мерного замкнутого шара с центром в начале координат O и радиусом, равным $\frac{1}{\varepsilon}$, т. е.

$$U(\infty; \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \left\{x\colon \rho(x, O) > \frac{1}{\varepsilon}\right\},$$

называется ε-*окрестностью бесконечно удаленной точки* ∞.

Бесконечность ∞ будем называть *бесконечно удаленной точкой прикосновения* всякого неограниченного множества. Это естественно, так как если X — неограниченное множество в $\boldsymbol{R}^n$, то пересечение любой окрестности $U(\infty)$ бесконечно удаленной точки ∞ с множеством X не пусто. Это равносильно тому, что существует такая последовательность $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \dots$, что

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty.$$

В отличие от бесконечно удаленной точки ∞ пространства $\boldsymbol{R}^n$ его обычные точки будем называть также *конечными точками*. Просто под точкой пространства всегда будем понимать его конечную точку.

Понятие числовой функции многих переменных является частным случаем понятия отображения множества из пространства $\boldsymbol{R}^n$ в пространство $\boldsymbol{R}^m$. Чтобы в дальнейшем не повторять аналогичные рассуждения для числовых функций и отображений, перейдем сразу к изучению последних.

36.2. Отображения. Предел отображений

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Тогда

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = |x - y|.$$

Здесь слева элементы x и y рассматриваются как точки, а справа — как векторы пространства $\boldsymbol{R}^n$. В силу этого равенства для обозначения расстояния между точками x и y правомерно наряду с обозначением $\rho(x, y)$ использовать и обозначение $|x - y|$. Так и будет делаться в дальнейшем для облегчения понимания аналогий в определениях ниже рассматриваемых понятий для отображений с соответствующими определениями для случая функций одной переменной.

Пусть $\boldsymbol{R}^n$ и $\boldsymbol{R}^m$ — соответственно n-мерное и m-мерное точечные пространства, $X \subset \boldsymbol{R}^n$ и отображение f отображает множество X в пространство $\boldsymbol{R}^m$: $f : X \to \boldsymbol{R}^m$, т. е. $y = f(x) \in \boldsymbol{R}^m$, $x \in X \subset \boldsymbol{R}^n$.

Если $m = 1$, а $n > 1$, то отображение f называется *действительной функцией многих переменных* $x_1, x_2, \dots, x_n$: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Если $m > 1$, то каждая координата y_i точки $y = f(x) \in \boldsymbol{R}^m$ является действительной функцией точки x. Обозначим эти функции f_j, $j = 1, 2, \dots, m$: $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$.

Функции $f_j : X \to \boldsymbol{R}$ называются *координатными функциями отображения* f. Они являются, вообще говоря (а точнее при $n > 1$), функциями многих переменных.

Определим понятие предела отображений, которое является обобщением понятия предела функции одной переменной.

Пусть $x^{(0)}$ и a — конечные или бесконечно удаленные точки соответственно пространств $\boldsymbol{R}^n$ и $\boldsymbol{R}^m$. Для $n = 1$ или $m = 1$ в случае бесконечно удаленных точек $x^{(0)}$ и a они могут быть и бесконечностями со знаком $+\infty$ или $-\infty$. Пусть еще точка $x^{(0)}$ является точкой прикосновения множества X.

Определение 2. *Точка a называется пределом отображения f: $X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, при $x \to x^{(0)}$ (или в точке $x = x^{(0)}$), если для любой последовательности $x^{(k)} \in X$, $k = 1, 2, \ldots$, такой, что $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = x^{(0)}$, имеет место равенство*

$$\lim_{k \to \infty} f(x^{(k)}) = a.$$

Для предела отображения f в точке $x^{(0)}$ используется обозначение $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$.

В символической записи определение 2 выглядит следующим образом:

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x^{(k)} \in X,\ k = 1, 2, \ldots,\ \lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^{(0)}: \quad \lim_{k \to \infty} f(x^{(k)}) = a.$$

По аналогии с пределом функции одной переменной определение предела отображения можно сформулировать в терминах окрестностей.

Определение 2′. *Точка a называется пределом отображения f: $X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, при $x \to x^{(0)}$ (или в точке $x = x^{(0)}$), если для любой окрестности $U(a)$ точки a существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что*

$$f(X \cap U(x^{(0)})) \subset U(a).$$

В символической записи:

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall U(a)\ \exists U(x^{(0)}): f(X \cap U(x^{(0)})) \subset U(a). \quad (36.2)$$

Иначе говоря,

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall U(a)\ \exists U(x^{(0)})\ \forall x \in X \cap U(x^{(0)}):\ f(x) \in U(a).$$

Определения 2 и 2′ предела отображения равносильны. Действительно, из сравнения записей определений предела функций одной переменной (5.4)—(5.5) в п. 5.4 и (5.23) в п. 5.7 с определениями (36.1) и (36.2) предела отображений видно, что они полностью совпадают по форме записи (только точка, в которой берется предел, обозначается теперь $x^{(0)}$, а не x_0, так как нижний индекс обозначает в пространственном случае номер координаты точки). Поэтому доказательство равносильности двух определений предела функций одной переменной (см. теорему 1 в п. 5.7) дословно переносится на случай пределов отображений, если только под точками и окрестностями понимать точки и окрестности в пространстве.

Наряду с записью $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$ для предела отображения f в точке $x^{(0)}$ употребляются как равноправные записи $\lim\limits_{x - x^{(0)} \to 0} f(x)$ и $\lim\limits_{|x - x^{(0)}| \to 0} f(x)$.

Если $x^{(0)}$ и a — конечные точки пространств $\boldsymbol{R}^n$ и $\boldsymbol{R}^m$, то определение (36.3) можно записать в виде

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X, \ |x - x^{(0)}| < \delta: \ |f(x) - a| < \varepsilon. \quad (36.4)$$

На этом примере еще раз хорошо видно, как разумно выбраны обозначения в многомерных пространствах: формула (36.4) по записи ничем не отличается от случая числовых функций одной переменной. Но, конечно, в случае числовых функций одной переменной $|x - x^{(0)}|$ и $|f(x) - a|$ означают абсолютные величины чисел, а в формуле (36.4) — расстояния между точками в n-мерном и m-мерном пространствах.

Поскольку функции многих переменных являются частным случаем рассматриваемых отображений, то определение предела отображения содержит в себе, в частности, определение предела функций, принимающих действительные числовые значения.

С другой стороны, из определения (36.2) видно, что понятие предела отображения сводится к понятию предела числовой функции $|f(x) - a|$ при $a \in \boldsymbol{R}^m$ и функции $|f(x)|$ при $a = \infty$:

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \to x^{(0)}} |f(x) - a| = 0, \quad a \in \boldsymbol{R}^m,$$

и

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x^{(0)}} |f(x)| = \infty.$$

Укажем еще на одну связь понятий пределов числовых функций и отображений.

Если точка a является конечной точкой пространства $\boldsymbol{R}^m$: $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$; если $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$, $f\colon X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, то в силу эквивалентности сходимости точек пространства со сходимостью их координат (см. теорему 1 в п. 35.1) определение 2 предела $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x) = a$ отображения f равносильно тому, что для любой последовательности точек $x^{(k)} \in X$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = x^{(0)}$, все координатные функции f_j этого отображения имеют пределы

$$\lim_{k \to \infty} f_j(x^{(k)}) = a_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Таким образом, отображение f имеет предел $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x) = a$ тогда и только тогда, когда для всех $j = 1, 2, \ldots, m$ существуют пределы $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f_j(x) = a_j$.

В символической записи это выглядит следующим образом:

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = a \Leftrightarrow \forall j = 1, 2, \ldots, m\colon \lim_{x \to x^{(0)}} f_j(x) = a_j. \qquad (36.5)$$

В этом смысле понятие предела рассматриваемых отображений снова сводится к понятию предела числовых функций — предела его координатных функций.

Если отображение f задано на множестве $X \subset \boldsymbol{R}^n$, $E \subset X$ и $x^{(0)}$ — точка прикосновения (конечная или бесконечно удаленная) множества E, то предел в точке $x^{(0)}$ сужения f_E отображения f на множество E называется пределом $\lim\limits_{x \to x^{(0)},\, x \in E} f(x)$ отображения f по множеству E. Таким образом,

$$\lim_{x \to x^{(0)},\, x \in E} f(x) = \lim_{x \to x^{(0)}} f_E(x).$$

Очевидно, что если в точке $x^{(0)}$ существует предел $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$, то в этой точке существуют и пределы отображения f по любым множествам $E \subset X$, для которых точка $x^{(0)}$ является точкой прикосновения, и все эти пределы равны между собой.

В случае $n > 1$ в качестве множества E часто берутся пересечения кривых, прямых или лучей (направлений), проходящие через точку $x^{(0)}$, с отображаемым множеством X. Естественно, что при рассмотрении пределов отображения по разным подмножествам множества X в случае, когда предела по множеству не существует, могут получаться разные результаты.

Если множество X содержит некоторую окрестность или проколотую окрестность точки $x^{(0)}$, то предел отображения в этой точке по этим окрестностям называется также и *всесторонним пределом*.

Существование предела отображения в некоторой точке, а если он существует, то и его значение полностью определяются значениями отображения на пересечении произвольной окрестности точки, в которой рассматривается предел, с отображаемым множеством, т. е. не зависят от выбора указанной окрестности. Точная формулировка этого утверждения имеет следующий вид.

Если отображение f: $X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, имеет предел $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$, то для любой окрестности $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$ оно имеет тот же предел по множеству $U\ (x^{(0)}) \cap X$:

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in U(x^{(0)}) \cap X}} f(x). \tag{36.6}$$

Если же отображение f: $X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, имеет предел $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in U(x^{(0)}) \cap X}} f(x)$ хотя бы для одной окрестности $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, то оно имеет предел в этой точке и по множеству X при этом в силу уже первого утверждения выполняется равенство (36.6).

Все это легко проверить и потому может быть в случае внутренней потребности самостоятельно проделано читателем.

Свойство отображения, не зависящее от выбора достаточно малой окрестности, содержащей данную точку, называется *локальным свойством отображения* в данной точке. В силу сказанного выше существование предела отображения в точке, являющейся точкой прикосновения отображаемого множества, и значение предела (если он, конечно, существует) являются локальными свойствами отображения.

УПРАЖНЕНИЯ. 1. Доказать эквивалентность определений 2 и 2′ предела отображений.

2. По аналогии со случаем функций одной переменной сформулировать и доказать критерий Коши существования предела отображения.

Пример. Пусть $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Эта формула задает функцию во всех точках плоскости, кроме начала координат (0, 0).

Исследуем пределы этой функции по различным направлениям в точке (0, 0). Уравнение прямой, проходящей через начало координат (0, 0) в направлении вектора (α, β), имеет вид

$$x = \alpha t, \quad y = \beta t, \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0.$$

Имеем $f(\alpha t, \beta t) = \frac{\alpha^2 \beta t}{\alpha^4 t^2 + \beta^2} \to 0$ при $t \to 0$, т. е. предел по любому направлению существует и равен нулю. Если же $y = x^2$, то $f(x, x^2) \equiv 1/2$ и, следовательно, предел вдоль параболы $y = x^2$ также существует, но равен $1/2$.

Таким образом, для рассмотренной функции существует один и тот же предел по любому направлению, а предел по указанной параболе, хотя и существует, отличен от общего значения пределов по направлениям; тем самым просто предел в точке (0, 0) не существует.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Исследовать пределы по направлению в точке (0, 0) функции $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

З а м е ч а н и е. Если множество $X \subset \boldsymbol{R}^n$, на котором определена функция f, состоит только из точек x, координаты которых являются натуральными числами: $x = (m_1, \ldots, m_n)$, $m_i \in N$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то функция f называется, как мы знаем, n-кратной последовательностью (см. 34.1) и ее значения $y = f(m_1, \ldots, m_n)$ обозначаются $y_{m_1, \ldots, m_n}$.

Определение предела двойной последовательности, данное в п. 34.1 (см. там определение 2), отличается от ее предела, если его рассматривать как частный случай предела функции в смысле определения 2 этого пункта. Поясним это различие подробнее на примере двойных последовательностей.

Если $\lim\limits_{(m,n) \to \infty} y_{m,n} = a$ в смысле предела функции, то это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех номеров $m \in N$ и $n \in N$ таких, что $\sqrt{m^2 + n^2} > \delta$, имеет место неравенство $|y_{m,n} - a| < \varepsilon$. Условие $\sqrt{m^2 + n^2} > \delta$ может выполняться при выборе лишь одного достаточно большого номера m или n, другой же может оставаться даже постоянным. При определении же предела $\lim\limits_{m,n \to \infty} y_{m,n}$, данном в п. 34.1, оба номера m и n должны быть достаточно большими для того, чтобы выполнялось неравенство $|y_{m,n} - a| < \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

36.3. Непрерывность отображений в точке

При рассмотрении предела отображения в данной точке эта точка может как принадлежать отображаемому множеству, так и не принадлежать ему.

Если $f\colon X \to \mathbf{R}^m$, $X \subset \mathbf{R}^n$, $x^{(0)} \in X$ и существует предел $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$, то $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})$.

Действительно, выбрав стационарную последовательность

$$x^{(k)} = x^{(0)} \in X, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{36.7}$$

получим, согласно определению (36.1),

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) \underset{(36.1)}{=} \lim_{k \to \infty} f(x^{(k)}) \underset{(36.5)}{=} \lim_{k \to \infty} f(x^{(0)}) = f(x^{(0)}). \tag{36.8}$$

Определение 3. *Если предел отображения в точке равен его значению в этой точке, то отображение называется непрерывным в ней.*

Иначе говоря, равенство

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)}) \tag{36.9}$$

является определением непрерывности отображения в точке.

В символической записи определение непрерывности отображения f в точке $x^{(0)}$ выглядит в силу (36.4) следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in X, \ |x - x^{(0)}| < \delta\colon \ |f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon. \tag{36.10}$$

В терминах окрестностей определение указанной непрерывности выглядит следующим образом:

$$\forall U(f(x^{(0)})) \ \exists U(x^{(0)})\colon \ f(X \cap U(x^{(0)})) \subset U(f(x^{(0)})). \tag{36.11}$$

Таким образом, понятие непрерывности отображения является частным случаем понятия предела отображения при $x^{(0)} \in X$.

Если $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$, $\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)})$, то, перенеся в равенстве (36.9) значение $f(x^{(0)})$ в левую его часть под знак предела, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \tag{36.12}$$

что, таким образом, является другой записью определения непрерывности отображения f в точке $x^{(0)}$.

Можно, конечно, сформулировать понятие непрерывности отображения и в терминах пределов последовательностей.

Отображение $f\colon X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$ непрерывно в точке $x^{(0)} \in X$ в том и только том случае, когда для любой последовательности точек $x^{(k)} \in X$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящейся к точке $x^{(0)}$: $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = x^{(0)}$, выполняется условие

$$\lim_{k \to \infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)}). \tag{36.13}$$

Это сразу следует из равносильности определений 2 и 2′ предела отображения.

Если $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$, то из (36.5) при $a = f(x^{(0)})$ следует, что отображение непрерывно в некоторой точке в том и только том случае, когда все его координатные функции f_i непрерывны в этой точке.

Отсюда, в частности, следует, что определение непрерывных отображений отрезка, данных при рассмотрении понятия кривой в п. 16.1 (для случая отображений отрезка в трехмерное пространство) и в п. 35.2 (для случая отображения отрезка в произвольное n-мерное евклидово пространство) как отображений, координатные функции которых непрерывны, равносильны в случае отображения отрезка данному здесь определению непрерывных отображений.

Ясно, что если отображение непрерывно в какой-либо точке, то и его сужение по каждому множеству, содержащему эту точку, непрерывно в ней.

Отображение $f\colon X \to \boldsymbol{R}^m$ называется непрерывным в точке $x^{(0)}$ по некоторому множеству E, $x^{(0)} \in E \subset X$, если сужение f_E отображения f на множество E непрерывно в этой точке.

Если $\alpha(x)$ — числовая функция, определенная на множестве $X \subset \boldsymbol{R}^n$, $\beta(x)$ — отображение этого множества в пространство $\boldsymbol{R}^m$, а $x^{(0)}$ является конечной или бесконечно удаленной точкой прикосновения множества X, то отображение $\beta(x)$ называют бесконечно малым по сравнению с функцией $\alpha(x)$ при $x \to x^{(0)}$ и пишут

$$\beta = o(\alpha), \quad x \to x^{(0)}, \tag{36.14}$$

если существует такое отображение $\varepsilon(x)$ множества X в пространство $\boldsymbol{R}^m$, что

$$\beta(x) = \varepsilon(x)\alpha(x), \quad x \in X, \tag{36.15}$$

и

$$\lim_{x \to x^{(0)}} \varepsilon(x) = 0. \tag{36.16}$$

Если $x^{(0)} \in X$, то из условия (36.16) следует (см. (36.7)), что

$$\varepsilon(x^{(0)}) = 0.$$

Для отображений, в частности для функций многих переменных $f(x_1, \dots, x_n)$, $n > 1$, наряду с их непрерывностью в определенном выше смысле, которую называют также *непрерывностью по совокупности переменных* $x_1, \dots, x_n$, можно рассматривать и непрерывность по отдельным переменным x_i.

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$, определенная, например, в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, называется непрерывной в точке $x^{(0)}$ по переменной x_i, если функция

$$\varphi(x_i) \overset{\text{def}}{=} f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

одной переменной x_i непрерывна в точке $x_i^{(0)}$. Очевидно, что функция φ является сужением функции f на пересечение прямой $x_j = x_j^{(0)}$, $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$, с множеством определения функции f, тем самым непрерывность функции по некоторому переменному означает непрерывность ее сужения по соответствующему множеству.

Отметим, что из непрерывности функции по всем переменным в отдельности не следует ее непрерывность по их совокупности. Например, функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0, \end{cases}$$

непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности в каждой точке плоскости, но не непрерывна по их совокупности в точке $(0, 0)$, так как не имеет в этой точке даже предела (проверьте это).

36.4. Свойства пределов отображений

Поскольку определение предела и непрерывности отображений дословно совпадают с соответствующими определениями для функций одной переменной, то для случая отображений сохраняются многие свойства пределов функций и свойства непрерывных функций, доказанные в § 5. Если элементы пространства $\boldsymbol{R}^n$ рассматривать как векторы, то их можно складывать и умножать на числа. Аналогично случаю числовых функций одной переменной доказывается, что если $f\colon X \to \boldsymbol{R}^m$, $g\colon X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\mu \in \boldsymbol{R}$, и если существуют пределы $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} g(x)$, то существует и предел

$$\lim_{x \to x^{(0)}} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \lim_{x \to x^{(0)}} f(x) + \mu \lim_{x \to x^{(0)}} g(x).$$

Если f и g — числовые функции, т. е. если $m = 1$, то для их пределов имеют место свойства, аналогичные свойствам пределов функций одной переменной, связанные с неравенствами, с произведением и делением функций (см. п. 5.10). Формулировка этих свойств и их доказательства остаются прежними, следует только под множествами понимать множества, лежащие в n-мерном пространстве.

Конечно, при $n > 1$ на случай отображений непосредственно не обобщаются утверждения о пределах функций одной переменной, связанные с упорядоченностью их аргумента, т. е. утверждения об односторонних пределах и пределах монотонных функций.

36.5. Повторные пределы

Для отображений f: $X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, при $n > 1$ наряду с пределом в смысле определения 2 можно рассматривать пределы другого вида, а именно связанные с последовательным переходом к пределу по разным координатам точки $x = (x_1, x_2, \dots , x_n)$, т. е. пределы вида

$$\lim_{x_{i_1} \to x_{i_1}^{(0)}} \lim_{x_{i_2} \to x_{i_2}^{(0)}} \dots \lim_{x_{i_n} \to x_{i_n}^{(0)}} f(x_1, x_2, \dots , x_n),$$

где $i_1, i_2, \dots , i_n$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \dots , n$, а отображение f определено, например, в некоторой проколотой или обычной окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots , x_n^{(0)})$. Такие пределы называются повторными пределами.

Повторный переход к пределу в силу своего определения сводится к последовательному нахождению пределов отображений по одному переменному. Так, $\lim\limits_{x_i \to x_i^{(0)}} f(x_1, x_2, \dots , x_n)$ означает, что у отображения f: $X \to R$, фиксированы все значения координат x_j, $j \neq i$, ее аргумента $x = (x_1, x_2, \dots , x_n)$ и тем самым указанный предел означает предел отображения по множеству $\{x = (x_1, x_2, \dots , x_n): x_j = x_j^{(0)}, j \neq i\} \cap X$.

Аналогично пределу в смысле определения 2 повторные пределы отображения сводятся к повторным пределам координатных функций этого отображения. Поэтому ограничимся рассмотрением только повторных пределов числовых функций.

Пример. Рассмотрим определенную на всей плоскости функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0 \text{ и } y \neq 0, \\ 0, \text{ если } x = 0 \text{ или } y = 0. \end{cases}$$

Исследуем различные ее пределы в точке (0,0). Очевидно, $\lim\limits_{(x,\, y) \to (0,\, 0)} f(x, y) = 0$. Повторные пределы

$$\lim_{y \to 0} \left[\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{y} + \lim_{x \to 0} y \sin \frac{1}{x} \right]$$

и

$$\lim_{x \to 0} \left[\lim_{y \to 0} x \sin \frac{1}{y} + \lim_{y \to 0} y \sin \frac{1}{x} \right]$$

не существуют, так как не существуют даже пределы $\lim\limits_{x \to 0} y \sin \frac{1}{x}$ $(y \neq 0)$ и $\lim\limits_{y \to 0} x \sin \frac{1}{y}$ $(x \neq 0)$, а $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{y} = 0$ $(y \neq 0)$ и $\lim\limits_{y \to 0} y \sin \frac{1}{x} = 0$ $(x \neq 0)$.

Для функции же $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, определенной этой формулой на всей плоскости, кроме начала координат, оба повторных предела в точке (0, 0) существуют и

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 0.$$

Однако предела функции f в точке (0, 0) не существует, так как предел вдоль координатных осей равен нулю, а вдоль прямой $y = x$ он равен $^1/_2$.

Таким образом, из одного лишь существования предела функции в данной точке не следует существования повторных пределов в этой точке и, наоборот, из существования повторных пределов не следует существования предела в соответствующей точке. Тем не менее определенная связь между этими понятиями может быть установлена.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве X, содержащем все точки некоторой прямоугольной окрестности $P((x_0, y_0); \delta_1, \delta_2)$ точки (x_0, y_0), кроме, быть может, точек прямых $x = x_0$ и $y = y_0$. Если существует предел функции f в точке (x_0, y_0) по множеству X и при любом $y \in (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ существует предел*

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y) = g(y), \qquad (36.17)$$

то повторный предел $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$ *существует и*

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,\, y)\to(x_0,\, y_0)\\ (x,y)\in X}} f(x, y). \qquad (36.18)$$

Доказательство. Пусть

$$\lim_{(x,\, y)\to(x_0,\, y_0),(x,y)\in X} f(x, y) = a$$

и пусть фиксировано произвольное $\varepsilon > 0$. Существует прямоугольная окрестность $P = P((x_0, y_0); \eta_1, \eta_2)$, $0 < \eta_1 < \delta_1$, $0 < \eta_2 < \delta_2$ такая, что если $(x, y)\in P \cap X$, то

$$|f(x, y) - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (36.19)$$

В силу существования предела (36.17), для любого числа y такого, что $(x, y)\in P \cap X$ и, следовательно, $|y - y_0| < \eta_2$, из (36.19) имеем $|g(y) - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ (для этого достаточно перейти к пределу при $x \to x_0$ в равенстве (36.19)), а это и означает, что $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = a$. □

Пример. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$, $y \neq 0$. Эта функция определена во всей плоскости, кроме точек оси Ox. Обозначим ее область определения через X. Очевидно, существуют пределы

$$\lim_{\substack{(x,\, y)\to(0,\, 0)\\ x\in X}} f(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0} f(x, y) = 0,\ y \neq 0, \qquad (36.20)$$

поэтому, согласно доказанной теореме, существует и повторный предел $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = 0$. Это ясно и непосредственно. Заметим, что другой повторный предел $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$ в этом случае не существует.

36.6. Предел и непрерывность композиции отображений

Композиция функций многих переменных и отображений множеств многомерных пространств имеет ряд специфических особенностей, связанных как с самой многомерностью,

так и с возможностью наличия разных размерностей у пространств, в которых лежат отображаемые множества.

Пусть n, m и p — произвольные, вообще говоря, различные натуральные числа, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, f — отображение множества X в множество $Y \subset \boldsymbol{R}^m$, а g — отображение множества Y в пространство $\boldsymbol{R}^p$, т. е.

$$f\colon X \to Y \subset \boldsymbol{R}^m, \quad X \subset \boldsymbol{R}^n, \quad g\colon Y \to \boldsymbol{R}^p. \qquad (36.21)$$

В этом случае имеет смысл композиция $g \circ f$ отображений f и g, задаваемая, как известно (см. п. 1.2*), формулой

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in X.$$

В этой ситуации отображение $y = f(x)$ часто называют заменой (независимой) переменной в отображении $g(y)$.

Отметим, что если отображение $f(x)$ множества X непрерывно в точке $x^{(0)} \in X$, а отображение $g(y)$ определено в некоторой окрестности точки $y^{(0)} = f(x^{(0)})$, то всегда существует такая окрестность U_x точки $x^{(0)}$, что на множестве $X \cap U_x$ имеет смысл композиция $g \circ f$. Действительно, пусть U_y — окрестность точки $y^{(0)}$, на которой определено отображение $g(y)$. Согласно определению непрерывности отображения, для U_y существует такая окрестность U_x точки $x^{(0)}$, что $f(U_x \cap X) \subset U_y$. Очевидно, что для всех точек $x \in U_x \cap X$ и имеет смысл композиция $g \circ f$.

Пусть $x^{(0)}$, a и b — конечные или бесконечно удаленные точки соответственно пространств $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ и $\boldsymbol{R}^p$, причем если какое-то из чисел n, m или p равно единице, то соответствующая ему из указанных точек может быть и бесконечностью со знаком.

ТЕОРЕМА 2. *Если имеет смысл композиция $g(f(x))$, $x \in X$, и существуют пределы*

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = a, \qquad (36.22)$$

$$\lim_{y \to a} g(y) = b, \qquad (36.23)$$

то существует и предел

$$\lim_{x \to x^{(0)}} g(f(x)) = b. \qquad (36.24)$$

Объединив формулы (36.23) и (36.24), получим

$$\lim_{x \to x^{(0)}} g(f(x)) = \lim_{y \to a} g(y). \qquad (36.25)$$

Эта формула называется формулой замены переменного для пределов отображений (функций).

СЛЕДСТВИЕ. *Если отображение f непрерывно в точке $x^{(0)} \in X \subset \boldsymbol{R}^n$, а отображение g непрерывно в точке $y^{(0)} = f(x^{(0)})$, то их композиция $g(f(x))$ также непрерывна в точке $x^{(0)}$.*

Короче: *композиция непрерывных отображений непрерывна.*

Теорема 3 аналогична теореме о пределе композиции пределов функций одного переменного. Для разнообразия выберем метод ее доказательства, основанный на определении предела функции в терминах последовательностей.

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность точек $x^{(k)} \in X$, $k = 1, 2, \ldots$, стремящуюся к точке $x^{(0)}$:

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^{(0)}. \tag{36.26}$$

Тогда, в силу условия (36.22), будем иметь

$$\lim_{k \to \infty} f(x^{(k)}) = a.$$

Поэтому, согласно предположению (36.23),

$$\lim_{k \to \infty} g(f(x^{(k)}) = b. \tag{36.27}$$

Поскольку последовательность $x^{(k)}$ была произвольной последовательностью, удовлетворяющей условиям (36.26), равенство (36.27), согласно определению предела отображения, и означает справедливость формулы (36.24).

Для доказательства следствия достаточно заметить, что в силу непрерывности отображений f и g соответственно в точках $x^{(0)}$ и $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ точка $x^{(0)}$ принадлежит области определения композиции $g(f(x))$. □

С помощью теоремы 2 можно легко установить непрерывность функций, наиболее часто встречающихся на практике, а именно элементарных функций многих переменных.

Определение 4. *Функции, получающиеся из переменных $x_1, \ldots, x_n$ с помощью конечного числа композиций элементарных функций одного переменного, операций сложения, умножения и деления, называются элементарными функциями переменных $x_1, \ldots, x_n$.*

Например, функция $f(x, y) = xe^{y \sin \frac{xy}{x+y}}$ является элементарной функцией двух переменных x и y. Действительно,

$$f(x, y) = xw,\ w = e^v,\ v = yz,\ z = \sin t,\ t = \frac{\alpha}{\beta},\ \alpha = xy,\ \beta = x + y.$$

Из теоремы 2 и сохранения непрерывности в соответствующих точках при арифметических операциях над непрерывными функциями (см. п. 36.4) следует, что *всякая элементарная функция любого числа переменных непрерывна в каждой точке области своего определения.*

36.7. Непрерывные отображения компактов

Отображение, непрерывное в каждой точке отображаемого множества, называется непрерывным на этом множестве.

ТЕОРЕМА 3. *Непрерывный образ компакта является компактом.*

СЛЕДСТВИЕ. *Числовая непрерывная на компакте функция ограничена и достигает своих экстремальных (наибольшего и наименьшего) значений.*

Доказательство. Пусть множество X является компактом, $X \subset \boldsymbol{R}^n$ и отображение $f\colon X \to \boldsymbol{R}^n$ непрерывно на X. Покажем, что из любой последовательности точек образа $f(X)$ компакта X можно выделить сходящуюся к точке из $f(X)$ подпоследовательность. Это и будет означать, что множество $f(X)$ — компакт.

Пусть $y^{(k)} \in f(X)$. Тогда существуют такие точки $x^{(k)} \in X$, что $f(x^{(k)}) = y^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Поскольку множество X — компакт, существует сходящаяся подпоследовательность $\{x^{(k_j)}\}$ последовательности $\{x^{(k)}\}$, предел которой принадлежит множеству X: $\lim\limits_{j \to \infty} x^{(k_j)} = x^{(0)} \in X$. Пусть $y^{(0)} = f(x^{(0)})$.

В силу непрерывности отображения f в точке $x^{(0)}$ имеем $\lim\limits_{j \to \infty} y^{(k_j)} = \lim\limits_{j \to \infty} f(x^{(k_j)}) = f(x^{(0)}) = y^{(0)}$. Таким образом, подпоследовательность $\{y^{(k_j)}\}$ последовательности $\{y^{(k)}\}$ сходится к точке $y^{(0)} \in f(X)$. □

Докажем следствие.

Если $f\colon X \to \boldsymbol{R}$, X — компакт, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, то в силу доказанной теоремы, множество $f(X)$ является компактом на числовой оси, т. е. ограниченным и замкнутым числовым множеством.

В силу своего определения, нижняя и верхняя грани множества являются точками прикосновения этого множества. Из ограниченности множества $f(X)$ следует, что его нижняя и верхняя грани конечны. Поскольку $f(X)$ — замкнутое множество, они содержатся в нем. Это и означает, что функция f достигает на компакте X наибольшего и наименьшего значений. □

З а м е ч а н и е. Если функция определена на некотором множестве X n-мерного пространства и ее значениями являются комплексные числа, то она называется ограниченной на этом множестве, если на нем ограничена ее абсолютная величина.

Таким образом, ограниченность комплекснозначной функции сводится к ограниченности функции, принимающей только действительные значения — ее абсолютной величине. Из этого, в силу теоремы 3, сразу следует, что всякая комплекснозначная функция, непрерывная в каждой точке некоторого компакта, ограничена на нем.

Напомним, что, согласно введенной для отображений терминологии (см. п. 1.2*), отображение $f\colon X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, называется *взаимно-однозначным* или *инъекцией*, если разным точкам множества X соответствуют при этом отображении также разные точки. В этом случае говорят также, что множество X взаимно-однозначно отображается посредством этого отображения на множество $f(X)$, т. е. $f\colon X \to f(X)$ является биекцией. При выполнении этого условия на множестве $f(X)$ существует однозначное обратное отображение (однозначная обратная функция) $f^{-1}(y) = x$, где x таково, что $f(x) = y$, т. е. $f^{-1}(f(x)) = x$; иначе говоря, отображение $f^{-1}f$ является *тождественным отображением* (тождественным отображением множества X называется отображение, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие эту же точку).

Важным является понятие гомеоморфного отображения.

Определение 5. *Если отображение f множества $X \subset \boldsymbol{R}^n$ в пространство $\boldsymbol{R}^m$ взаимно-однозначно и непрерывно на X и обратное ему отображение f^{-1} непрерывно на множестве $f(X)$, то f называется гомеоморфным отображением или гомеоморфизмом, а множество $f(X)$ — гомеоморфным образом множества X или, что то же, множеством, гомеоморфным множеству X.*

Ясно, что если f — гомеоморфизм множества X, то обратное ему отображение f^{-1} является гомеоморфизмом множества $f(X)$.

ТЕОРЕМА 4. *Непрерывное взаимно-однозначное отображение компакта является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Пусть X — компакт, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, и f — его непрерывное взаимно-однозначное отображение в пространство $\boldsymbol{R}^m$. Докажем, что обратное ему отображение f^{-1} множества $f(X) \subset \boldsymbol{R}^m$ в пространство $\boldsymbol{R}^n$ также непрерывно.

Пусть $y^{(0)}$, $y^{(k)} \in f(X)$, тогда

$$x^{(0)} = f^{-1}(y^{(0)}) \in X, \quad x^{(k)} = f^{-1}(y^{(k)}) \in X, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{36.28}$$

и пусть

$$\lim_{k \to \infty} y^{(k)} = y^{(0)}. \tag{36.29}$$

Покажем, что

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^{(0)}. \tag{36.30}$$

Если бы это было не так, то существовало бы такое $\varepsilon > 0$, что для любого натурального m нашлось бы натуральное

$$k_m > m, \tag{36.31}$$

для которого выполнялось бы неравенство

$$|x^{(k_m)} - x^{(0)}| \geqslant \varepsilon, \tag{36.32}$$

при этом из (36.31) следовало бы, что

$$\lim_{m \to \infty} k_m = \infty.$$

В силу компактности множества X из последовательности $x_{k_m} \in X$, $m = 1, 2, \dots$, можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x^{(k_{m_j})}$, $j = 1, 2, \dots$, предел которой принадлежал бы X:

$$\lim_{j \to \infty} x^{(k_{m_j})} = x \in X. \tag{36.33}$$

Из неравенства (36.32) следует, в частности, что $|x^{(k_{m_j})} - x^{(0)}| \geqslant \varepsilon$, $j = 1, 2, \dots$. Переходя к пределу при $j \to \infty$, получим $|x - x^{(0)}| \geqslant \varepsilon$. Следовательно, $x \neq x^{(0)}$, а это в силу взаимной однозначности отображения f означает, что

$$f(x) \neq f(x^{(0)}) = y^{(0)}. \tag{36.34}$$

Однако последовательность $\{y^{(k_{m_j})}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{y^{(k)}\}$, имеющей своим пределом точку $y^{(0)}$ и поэтому

$$\lim_{j \to \infty} y^{(k_{m_j})} = \lim_{k \to \infty} y^{(k)} = y^{(0)}. \tag{36.35}$$

Но в силу непрерывности отображения f в точке x, согласно (36.33), имеем

$$\lim_{j \to \infty} y^{(k_{m_j})} = \lim_{j \to \infty} f(x^{(k_{m_j})}) = f(x) \underset{(36.34)}{\neq} y^{(0)},$$

что противоречит равенству (36.35). Таким образом, справедливо равенство (36.30), т. е.

$$\lim_{k \to \infty} f^{-1}(y^{(k)}) = f^{-1}(y^{(0)}).$$

Это и означает непрерывность отображения f^{-1} в любой точке $y^{(0)} \in f(X)$. □

Доказанная теорема является обобщением теоремы о непрерывности функции, обратной к непрерывной строго монотонной на отрезке функции.

36.8. Равномерная непрерывность

В пункте 6.4 т. 1 было введено понятие равномерно непрерывной функции на отрезке. Это определение можно обобщить на случай отображений $f\colon X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$. Если отображение f непрерывно на множестве X, то для любого $\varepsilon > 0$ и для любой точки $x \in X$ существует такое $\delta > 0$ (тем самым зависящее от ε и x), что для всех точек $x' \in X$, для которых $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$.

Как и в случае функций одной переменной, отказ от зависимости числа δ от точки множества приводит к понятию равномерной непрерывности.

Определение 6. *Отображение $f\colon X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, называется равномерно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $x \in X$ и $x' \in X$ таких, что $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство*

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

В символической записи это определение выглядит следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x,\, x' \in X,\, |x' - x| < \delta\colon \;\; |f(x') - f(x)| < \varepsilon, \qquad (36.36)$$

т. е. снова буквальное повторение записи определения равномерной непрерывности функции одной переменной (см. т. 1, п. 6.4).

Вспомнив определение диаметра множества (см. определение 33 в п. 35.3), по аналогии со случаем числовых функций одной переменной легко убедиться, что определение рав-

номерной непрерывности отображения можно сформулировать следующим образом.

Определение 6′. *Отображение* $f\colon X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, *называется равномерно непрерывным, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что для каждого множества* $E \subset X$ *диаметра, меньшего, чем* δ: $\operatorname{diam} X < \delta$, *выполняется неравенство* $\operatorname{diam} f(E) < \varepsilon$.

Свойство отображения быть равномерно непрерывным на множестве снова по аналогии со случаем функций одной переменной можно описать в терминах колебания на этот раз отображения на множестве.

Определение 7. *Для отображения* $f\colon X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, *его колебанием на множестве* X *называется число* (*конечное или бесконечное*)

$$\omega(f; X) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{diam} f(X).$$

В этих терминах определение (36.36) равномерной непрерывности отображения в символической записи имеет вид

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall E \subset X, \operatorname{diam} E < \delta\colon \ \omega(f; E) < \varepsilon. \qquad (36.37)$$

ТЕОРЕМА 5. *Непрерывное отображение компакта равномерно непрерывно.*

СЛЕДСТВИЕ. *Если числовая функция непрерывна на компакте, то она равномерно непрерывна.*

Доказательство. Если $f\colon X \to \boldsymbol{R}^m$ — непрерывное отображение компакта $X \subset \boldsymbol{R}^n$, то для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки $x \in X$ существует такое $\delta_x > 0$, что для всех точек $x' \in X$, удовлетворяющих условию $|x' - x| < \delta_x$, выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (36.38)$$

Система всех сферических окрестностей $\Omega = \{U(x;\ \delta_x)\}$, $x \in X$, образует покрытие компакта X. Если η — лебегово число этого покрытия (см. теорему 5 в п. 35.3), то для любых точек $x' \in X$ и $x'' \in X$, для которых $|x'' - x'| < \eta$, найдется такой элемент покрытия Ω, обозначим его $U(x^{(0)};\ \delta_{x^{(0)}})$, что $x' \in U(x^{(0)},\ \delta_{x^{(0)}})$ и $x'' \in U(x^{(0)},\ \delta_{x^{(0)}})$, поэтому

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant |f(x'') - f(x^{(0)})| + |f(x^{(0)}) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает равномерную непрерывность отображения f. □

Следствие является частным случаем теоремы при $m = 1$. Для функций, непрерывных на отрезке, оно было доказано раньше (см. т. 1, п. 6.4).

В теореме 5 требование того, что отображаемое множество является компактом, существенно. Например, непрерывная и ограниченная на интервале $(0, 1)$ функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной, так как при любом $n = 1, 2, \ldots$ имеем $\operatorname{diam} f\left(0, \frac{1}{n}\right) = 2$.

В самом деле, с одной стороны, для любых $x', x'' \in (0, 1)$ для функции $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ имеет место неравенство

$$|f(x'') - f(x')| = \left|\sin\frac{1}{x''} - \sin\frac{1}{x'}\right| \leqslant \left|\sin\frac{1}{x''}\right| + \left|\sin\frac{1}{x'}\right| \leqslant 2.$$

С другой — для любого $n \in \boldsymbol{N}$ найдется такое $m \in \boldsymbol{N}$, что

$$0 < \frac{1}{\pi/2 + 2\pi m} < \frac{1}{n}, \quad 0 < \frac{1}{-\pi/2 + 2\pi m} < \frac{1}{n}. \qquad (36.39)$$

Тогда при $x' = \dfrac{1}{\pi/2 + 2\pi m}$, $x'' = \dfrac{1}{-\pi/2 + 2\pi m}$ будем иметь

$$|f(x'') - f(x')| = \left|\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| = 2 \text{ и } x', x'' \underset{(36.39)}{\in} \left(0, \frac{1}{n}\right).$$

Это и означает, что $\operatorname{diam} f\left(0, \frac{1}{n}\right) = \sup\limits_{x', x'' \in (0, 1/n)} |f(x'') - f(x')| = 2$ и, следовательно, сколь угодно малым по диаметру множествам $E = (0, 1/n)$ не соответствуют достаточно малые по диаметру множества $f(E)$.

Аналогично определению модуля непрерывности числовой функции одной переменной (см. т. 1, п. 6.4) вводится понятие модуля непрерывности отображения.

Определение 8. *Для отображения $f\colon X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, функция*

$$\omega(\delta; f; X) = \sup_{|x' - x| \leqslant \delta} |f(x') - f(x)|, \quad x, x' \in X, \quad \delta > 0, \qquad (36.40)$$

называется модулем непрерывности этого отображения.

Как и в случае функций одной переменной, модуль непрерывности отображения является неотрицательной возрастающей функцией при $\delta > 0$.

Отметим очевидную связь понятий колебания отображения и его модуля непрерывности на множестве: колебание отображения f на множестве X равно значению его модуля непрерывности $\omega(\delta; f; X)$ на этом множестве при $\delta = \operatorname{diam} X$, т. е. $\omega(f; X) = \omega(\operatorname{diam} X; f; X)$, а модуль непрерывности $\omega(\delta; f; X)$ равен верхней грани диаметров образов $f(E)$ множеств $E \subset X$, диаметры которых не превышают числа δ: $\omega(\delta; f; X) = \sup \operatorname{diam} f(E)$, $\operatorname{diam} E \leqslant \delta$.

Аналогично случаю функции одной переменной имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. *Для того чтобы отображение* $f: X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, *было равномерно непрерывно на множестве* X, *необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta; f; X) = 0$.

Теорема 6 доказывается почти дословным повторением доказательства соответствующего утверждения для функций одной переменной (см. т. 1, п. 6.4), поэтому в случае внутренней потребности проведение ее доказательства может быть предоставлено читателю.

Мы видели выше (см. п. 6.4), что на отрезке $[0, 1]$ $\omega(\delta; x^2) = 2\delta - \delta^2$, поэтому $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega(\delta; x^2) = 0$ и, следовательно, функция x^2 равномерно непрерывна на этом отрезке, как и должно быть, согласно теореме 5. Модуль непрерывности той же функции x^2, но уже рассматриваемой на всей вещественной оси, так же как и модули непрерывности $\omega\left(\delta; \sin \frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$, и $\omega\left(\delta; \frac{1}{x}\right)$, $0 < x < 1$, не стремится к нулю при $\delta \to +0$, поэтому все эти функции не являются равномерно непрерывными на соответствующих множествах.

Задача 6. Пусть G — область в $\boldsymbol{R}^n$ и $f: G \to R$. Доказать, что если $\lim\limits_{\delta \to 0} \frac{\omega(\delta; f; G)}{\delta} = 0$, то f — постоянная функция.

С помощью доказанных свойств непрерывных отображений можно получить одно полезное для дальнейшего свойство областей (т. е. открытых линейно связных множеств, см. п. 35.2). Сформулируем это свойство в виде леммы.

ЛЕММА 1. *Открытое множество является областью тогда и только тогда, когда любые две его точки можно соединить целиком лежащей в нем ломаной.*

Доказательство. Достаточность сформулированного условия не требует доказательства. В самом деле, если у некоторого открытого множества $G \subset \boldsymbol{R}^n$ любые две точки можно соединить некоторой ломаной, целиком лежащей в нем, то, поскольку всякая ломаная является кривой (см. т. 1, п. 16.5), любые две точки множества G оказываются соединимыми в нем кривой, что и означает, согласно определению (см. определение 27 в п. 35.2), что открытое множество G линейно связно, т. е. является областью (см. определение 28 там же).

Докажем необходимость условий леммы. Пусть G — область пространства $\boldsymbol{R}^n$. Рассмотрим точки $x \in G$ и $y \in G$. Согласно определению области, существует кривая $\Gamma = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$, соединяющая в G точки x и y, т. е. $r(a) = x$, $r(b) = y$ и $r(t) \in G$, $a \leqslant t \leqslant b$. Кривая Γ представляет собой непрерывный образ при отображении $r(t)$ отрезка $[a, b]$, являющегося компактом, и поэтому (см. теорему 3) сама будет компактом. Так как компакт Γ не пересекается с замкнутым множеством $\boldsymbol{R}^n \backslash G$, то расстояние между ними больше нуля (см. лемму 7 в п. 35.2). Следовательно, существует такое число $\eta > 0$, что $\rho(\Gamma, \boldsymbol{R}^n \backslash G) > \eta$.

Отображение $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ отрезка $[a, b]$, будучи непрерывным, является и равномерно непрерывным (см. теорему 5). Поэтому существует такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $t' \in [a, b]$ и $t'' \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|t'' - t'| < \delta$, выполняется неравенство $\rho(r(t''), r(t')) < \eta$. Отсюда вытекает, что для любого разбиения $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ мелкости $|\tau| < \delta$ все точки ломаной λ_τ с вершинами $r(t_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, будут содержаться в G (почему?). Следовательно, $\lambda_\tau \subset G$.

Началом и концом ломаной λ_τ являются соответственно начало и конец кривой Γ, т. е. произвольно заданные точки x и y из G, поэтому нами доказано, что любые две точки области могут быть соединены в ней ломаной. □

36.9. Непрерывные отображения линейно связных множеств

Прежде всего определим, что будем понимать под образом кривой при заданном непрерывном отображении.

Пусть $\Gamma = \{x(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — кривая в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ и f — непрерывное отображение ее носителя в пространство $\boldsymbol{R}^m$.

Кривая в пространстве $\boldsymbol{R}^m$, представлением которой является отображение $f(x(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$ отрезка $[a, b]$ в пространство $\boldsymbol{R}^m$, называется *образом* $f(\Gamma)$ *кривой* Γ *при отображении* f.

Докажем теперь следующую простую теорему.

ТЕОРЕМА 7. *Непрерывный образ линейно связного множества является линейно связным множеством.*

Доказательство. Пусть X — линейно связное множество, $X \subset \boldsymbol{R}^n$ и f — его непрерывное отображение в пространство $\boldsymbol{R}^m$. Пусть $Y = f(X)$ и $y' \in Y$, $y'' \in Y$. Тогда существуют такие точки $x' \in X$ и $x'' \in X$, что $f(x') = y'$, $f(x'') = y''$. В силу линейной связности множества X существует такая кривая $\Gamma = \{x(t); a \leqslant t \leqslant b\}$, что $x(a) = x'$, $x(b) = x''$ и для всех $t \in [a, b]$ выполняется включение $x(t) \in X$. Очевидно, что кривая $f(\Gamma) = \{f(x(t)); a \leqslant t \leqslant b\}$ соединяет точки y' и y'' в множестве Y, т. е. $f(x(a)) = f(x') = y'$, $f(x(b)) = f(x'') = y''$ и для всех $t \in [a, b]$ выполняется включение $f(x(t)) = f(x) \in Y$. Это и означает, что множество Y линейно связно. □

Докажем теперь теорему о непрерывных числовых функциях на линейно связных множествах, обобщающую теорему Коши о промежуточных значениях непрерывных на отрезке функций.

ТЕОРЕМА 8. *Функция, непрерывная на линейно связном множестве, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное между ними значение.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Функция, непрерывная на замыкании линейно связного множества, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное между ними значение.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Функция, непрерывная на области или на замыкании области, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное между ними значение.*

Доказательство. Пусть X — линейно связное множество, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, функция $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ непрерывна на X, $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$, $f(x^{(1)}) = A$, $f(x^{(2)}) = B$ и, например, $A < C < B$. В силу линейной связности множества X, существует такая кривая $\Gamma = \{x(t); a \leqslant t \leqslant b\}$, лежащая в X, что $x^{(1)}$ является началом, а $x^{(2)}$ — ее концом: $x(a) = x^{(1)}$, $x(b) = x^{(2)}$. Функция $F(t) = f(x(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, непрерывна на отрезке $[a, b]$ как композиция непрерывных функций $f(x)$ и $x(t)$. Кроме того,

$$F(a) = f(x(a)) = f(x^{(1)}) = A, \quad F(b) = f(x(b)) = f(x^{(2)}) = B.$$

Поэтому, согласно теореме Коши о промежуточных значениях непрерывных на отрезке функций (см. т. 1, п. 6.2), существует такое $t_0 \in [a, b]$, что $F(t_0) = C$. Полагая $x^{(0)} = x(t_0)$, получим $f(x^{(0)}) = f(x(t_0)) = F(t_0) = C$. □

Докажем первое следствие. Пусть функция f непрерывна на замыкании $\overline{X}$ линейно связного множества $X \subset \boldsymbol{R}^n$, $x^{(1)} \in \overline{X}$, $x^{(2)} \in \overline{X}$, $f(x^{(1)}) = A$, $f(x^{(2)}) = B$ и, например, $A < C < B$. В силу непрерывности функции f в точке $x^{(1)}$ для $\varepsilon = C - A > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in \overline{X} \cap U(x^{(1)}; \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon = C - A$ и, следовательно, неравенство

$$f(x) < C. \tag{36.41}$$

Поскольку $x^{(1)}$ — точка прикосновения множества X, в ее δ-окрестности $U(x^{(1)}; \delta)$ существует точка $y^{(1)}$, принадлежащая множеству X:

$$y^{(1)} \in X \cap U(x^{(1)}; \delta).$$

Для нее, в силу (36.41), выполняется неравенство

$$f(y^{(1)}) < C. \tag{36.42}$$

Аналогично существует такая точка $y^{(2)} \in X$, что

$$f(y^{(2)}) > C. \tag{36.43}$$

Таким образом, $f(y^{(1)} < C < f(y^{(2)})$ и мы находимся в условиях теоремы 8 и поэтому из условий (36.42) и (36.43) следует, что существует такая точка $x^{(0)} \in X$, что $f(x^{(0)}) = C$. □

Второе следствие теоремы непосредственно вытекает из первого, так как область является линейно связным множеством (см. определение 28 в п. 35.2). □

УПРАЖНЕНИЕ 4. Пусть функция f непрерывна и принимает значения разных знаков на открытом множестве. Доказать, что множество точек, в которых $f \neq 0$, является открытым множеством, но не является областью.

Задача 7. Построить пример области G, в замыкании $\overline{G}$ которой существуют две точки, не соединяемые в $\overline{G}$ непрерывной кривой.

36.10. Свойства непрерывных отображений

При непрерывных отображениях образ открытого множества не является, вообще говоря, открытым, а замкнутого — замкнутым. Это видно уже на примере числовых функций одной переменной. Так, отображение $y = \sin x$ отображает интервал $(0, \pi)$ — открытое множество — на полуинтервал $(0, 1]$,

который не является открытым множеством, а отображение $y = \operatorname{arctg} x$ отображает числовую прямую — замкнутое множество — на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$, не являющийся замкнутым множеством. То, что в последнем примере в качестве замкнутого множества взято неограниченное множество, не является случайным, так как ограниченное замкнутое множество, будучи компактом, согласно теореме 3, при непрерывном отображении отображается в компакт и, следовательно, в замкнутое множество. Покажем, что для прообразов открытых и замкнутых множеств дело обстоит иначе.

ЛЕММА 2. *Если отображение $f\colon G \to \boldsymbol{R}^m$, $G \subset \boldsymbol{R}^n$, задано на открытом множестве G, то оно непрерывно в точке $x^{(0)} \in G$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности V точки $f(x^{(0)})$ существует такая окрестность U точки $x^{(0)}$, что*

$$f(U) \subset V, \quad U \subset G. \tag{36.44}$$

Таким образом, в отличие от общего случая (см. (36.11)) здесь можно не брать пересечение окрестности U точки $x^{(0)}$ с отображаемым множеством G.

Доказательство. Если $f\colon G \to \boldsymbol{R}^m$, где G — открытое в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ множество, и отображение f непрерывно в точке $x^{(0)} \in \boldsymbol{G}$, т. е. $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})$, то, согласно определению 2 предела для любой окрестности V точки $f(x^{(0)})$ существует такая окрестность U_0 точки $x^{(0)}$, что для нее выполняется условие (36.2), т. е. в данном случае $f(G \cap U_0) \subset V$.

Поскольку пересечение $U = G \cap U_0$ открытых множеств G и U_0 является открытым множеством и содержит точку $x^{(0)}$, оно также является окрестностью этой точки и $f(U) \subset V$. Включение (36.44) доказано.

Обратное утверждение, т. е. что из выполнения условия (36.44) вытекает непрерывность отображения f в точке $x^{(0)}$, следует непосредственно из определения непрерывности (36.11), так как $U \subset G$ и, следовательно, $G \cap U = U$. □

ТЕОРЕМА 9. *Отображение $f\colon G \to \boldsymbol{R}^m$ открытого множества $G \subset \boldsymbol{R}^n$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз всякого открытого множества является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть отображение f непрерывно на открытом множестве G, V — открытое в $\boldsymbol{R}^m$ множество и $x \in f^{-1}(V)$. Множество V, в силу своей открытости, является окрестностью

точки $y = f(x) \in V$. Согласно лемме, существует такая окрестность U точки x, что $f(U) \subset V$ и, следовательно, $U \subset f^{-1}(V)$, т. е. для каждой точки x прообраза $f^{-1}(V)$ открытого множества V существует ее окрестность U, содержащаяся в этом прообразе. Это и означает, что множество $f^{-1}(V)$ является открытым.

Пусть теперь при отображении f прообраз всякого открытого множества — открытое множество и $x \in G$. Тогда, какова бы ни была окрестность V точки $f(x)$, она, будучи открытым множеством, имеет своим прообразом

$$U = f^{-1}(V) \tag{36.45}$$

— также открытое множество, которое поэтому является окрестностью точки $x \in U$. Из равенства (36.45) следует, что $f(U) = V$, и, следовательно, отображение f непрерывно в точке $x^{(0)} \in G$. □

Пример. Рассмотрим непрерывное отображение $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, заданное формулой

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

Согласно лемме 2, прообраз открытого множества $(-\infty, 0)$, т. е. множество точек (x, y), удовлетворяющих неравенству $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ (и, следовательно, составляющих внутренность эллипса), а также прообраз открытого множества $(0, +\infty)$, т. е. множество таких точек (x, y), что $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ (эти точки образуют внешность эллипса), являются открытыми множествами.

Вообще, если $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ — непрерывная на $\boldsymbol{R}^n$ функция, то для любого числа $a \in \boldsymbol{R}$ множества $\{x\colon f(x) < a,\ x \in \boldsymbol{R}^n\}$ и $\{x\colon f(x) > a,\ x \in \boldsymbol{R}^n\}$ являются открытыми множествами как прообразы открытых множеств $(-\infty, a)$ и $(a, +\infty)$.

При гомеоморфном отображении (см. определение 5 в п. 36.7) открытого множества на открытое образы открытых подмножеств также открыты. Действительно, если f — гомеоморфное отображение открытого множества G на открытое $f(G)$, U — открытое подмножество множества G и $V = f(U)$, то в силу взаимной однозначности отображения f имеем $U = f^{-1}(V)$, а это означает, что множество U представляет собой образ множества V при отображении f^{-1}. Следовательно, множество V является прообразом при отображении f^{-1} открытого множества U. Согласно определению гомеоморфизма, отображение f^{-1} непрерывно. Таким образом, множество V является прообразом открытого мно-

жества U при непрерывном отображении f^{-1} открытого множества $f(G)$, поэтому, в силу теоремы, множество V открыто.

Отметим, что в топологии доказывается, что гомеоморфный образ открытого множества n-мерного пространства может быть открытым множеством только в пространстве того же числа измерений.

ТЕОРЕМА 10. *Отображение f: $X \to \boldsymbol{R}^m$ замкнутого множества $X \subset \boldsymbol{R}^n$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз всякого замкнутого множества является замкнутым множеством.*

Доказательство. Пусть отображение f непрерывно на замкнутом множестве X, Y — замкнутое множество в пространстве $\boldsymbol{R}^m$ и x — точка прикосновения прообраза

$$f^{-1}(Y) \subset X \tag{36.46}$$

множества Y:

$$x \in \overline{f^{-1}(Y)}. \tag{36.47}$$

Множество X — замкнуто: $X = \overline{X}$, поэтому

$$x \underset{(36.47)}{\in} \overline{f^{-1}(Y)} \underset{(36.46)}{\subset} \overline{X} = X$$

и, следовательно, отображение f определено в точке x.

Покажем, что $f(x) \in Y$. Из того, что x — точка прикосновения множества $f^{-1}(Y)$, следует, что существует такая последовательность точек

$$x^{(k)} \in f^{-1}(Y), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{36.48}$$

что

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x. \tag{36.49}$$

Последовательность $y^{(k)} = f(x^{(k)})$, $k = 1, 2, \ldots$, имеет предел, так как в силу непрерывности отображения f в точке x имеем

$$\lim_{k \to \infty} y^{(k)} = \lim_{k \to \infty} f(x^{(k)}) \underset{(36.49)}{=} f(x). \tag{36.50}$$

Поскольку множество Y замкнуто и $y^{(k)} = f(x^{(k)}) \in Y$, то $f(x) \underset{(36.50)}{\in} Y$, следовательно, $x \in f^{-1}(Y)$. Это и означает замкнутость множества $f^{-1}(Y)$.

Пусть теперь f: $X \to \boldsymbol{R}^m$ — отображение замкнутого множества $X \subset \boldsymbol{R}^n$, при котором прообраз всякого замкнутого множества также является замкнутым множеством. Пусть $x^{(0)} \in X$ и V — какая-либо окрестность точки $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ в пространст-

ве $\boldsymbol{R}^m$, $y^{(0)} \in U$. Поскольку V — открытое множество, множество $\boldsymbol{R}^m \backslash V$ является замкнутым и, следовательно, замкнутым будет и его прообраз $f^{-1}(\boldsymbol{R}^m \backslash V)$. Поэтому дополнение $U = \boldsymbol{R}^n \backslash f^{-1}(\boldsymbol{R}^m \backslash V)$ в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ этого прообраза является открытым множеством. Оно содержит точку $x^{(0)}$. Действительно, $x^{(0)} = f^{-1}(y^{(0)}) \in$ $\in f^{-1}(V)$. Множества V и $\boldsymbol{R}^m \backslash V$ не пересекаются, поэтому не пересекаются их прообразы: $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(\boldsymbol{R}^m \backslash V) = \varnothing$. Следовательно, $x^{(0)} \notin f^{-1}(\boldsymbol{R}^m \backslash V)$, а поэтому $x^{(0)} \in \boldsymbol{R}^n \backslash f^{-1}(\boldsymbol{R}^m \backslash V) = U$. В силу открытости множества U, оно является окрестностью точки $x^{(0)}$. При этом $f(U \cap X) \subset V$.

В самом деле, если $x \in U \cap X$, то, очевидно, $f(x) \notin \boldsymbol{R}^m \backslash V$ (в противном случае $x \in f^{-1}(\boldsymbol{R}^m \backslash V)$, тогда как $x \in U = \boldsymbol{R}^n \backslash f^{-1}(\boldsymbol{R}^m \backslash V)$). Следовательно, $f(x) \in V$.

Итак, для любой окрестности V точки $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ существует такая окрестность U точки $x^{(0)}$, что $f(U \cap X) \subset V$. Это и означает непрерывность отображения f в точке $x \in X$. □

УПРАЖНЕНИЕ 5. Доказать теорему 4 с помощью теорем 3 и 10.

З а м е ч а н и е 1. При рассмотрении отображений $f \colon X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}$, было видно, в частности, что специфику ряда вопросов можно в достаточной мере усмотреть уже на примере отображений плоских или лежащих в трехмерном пространстве множеств, а специфику функций многих переменных на примере функций двух или трех переменных. Благодаря удачно выбранным определениям и обозначениям доказательства теорем для указанных частных случаев без особого труда переносятся на общий случай. Вместе с тем доказательства в этих частных случаях имеют преимущество наглядности и простоты записи. Поэтому в дальнейшем будем иногда для большей ясности и простоты изложения ограничиваться подробным рассмотрением лишь двумерного или трехмерного случая, а в общем случае будем только формулировать соответствующие результаты или даже ограничиваться указанием на возможность их обобщения. Однако если при изучении какого-либо вопроса в многомерном случае возникают какие-то специфические трудности, то этот вопрос будет детально рассматриваться в общем случае.

З а м е ч а н и е 2. Для отображений f множеств из комплексного пространства $\boldsymbol{C}^n$ в комплексное пространство $\boldsymbol{C}^m$, т. е. для отображений $f \colon X \to \boldsymbol{C}^m$, $X \subset \boldsymbol{C}^n$, можно ввести многие понятия, определенные нами для отображений множеств действительного пространства $\boldsymbol{R}^n$ в действительное пространство $\boldsymbol{R}^m$.

Например, понятие предела отображения, его непрерывности, равномерной непрерывности отображения, колебания отображения, его модуля непрерывности. В случае необходимости читатель сможет без труда сформулировать определение подобных нужных ему понятий.

Для отображений $f: X \to \boldsymbol{C}^m$, $X \subset \boldsymbol{C}^n$, справедливы и аналоги многих из доказанных выше теорем, например о том, что непрерывный образ компакта является компактом, что непрерывное отображение компакта равномерно непрерывно, следовательно, и их частные случаи для комплекснозначных функций многих комплексных переменных, например, о том, что непрерывная на компакте функция ограничена.

Справедливость всего этого следует из того, что для рассматриваемых вопросов их изучение в комплексных пространствах $\boldsymbol{C}^n$, состоящих из точек $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $z_k = x_k + iy_k$, $x_k, y_k \in \boldsymbol{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$, можно заменить изучением в действительных пространствах $\boldsymbol{R}^{2n}$ с точками

$$(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_n,\ y_1, y_2, \dots, y_n).$$

§ 37

Частные производные. Дифференцируемость функций многих переменных

37.1. Частные производные и частные дифференциалы

Рассмотрим сначала случай функций трех переменных.

Определение 1. *Пусть в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0, z_0) *задана функция* $u = u(x, y, z)$. *Фиксируя переменные* y *и* z: $y = y_0$, $z = z_0$, *получим функцию одного переменного* x: $u = u(x, y_0, z_0)$. *Обычная производная* (см. т. 1, п. 9.1) *этой функции в точке* $x = x_0$ *называется частной производной функции* $u(x, y, z)$ *в точке* (x_0, y_0, z_0) *по* x *и обозначается через* $\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$.

Таким образом,

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{du(x, y_0, z_0)}{dx}\right|_{x = x_0}.$$

Заметим, что обозначение частной производной по переменной x через $\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$ традиционно. Правильнее было бы писать $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, так как $\frac{\partial u}{\partial x}$ является единым символом, обозначающим новую функцию, значение которой и рассматривается в точке (x_0, y_0, z_0).

Если вспомнить определение обычной производной $\frac{du}{dx}$ (см. п. 9.1), то, согласно этому определению, можно написать

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x},$$

или, если ввести обозначение $u(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0) = \Delta_x u$ ($\Delta_x u$ — приращение функции по переменной x),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}.$$

Аналогично вводятся частные производные по y и z:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = \left.\frac{du(x_0,y_0,z_0)}{dy}\right|_{y = y_0},$$

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = \left.\frac{du(x_0,y_0,z)}{dz}\right|_{z = z_0},$$

или, короче,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z},$$

где $\Delta_y u$ и $\Delta_z u$ — приращения функции соответственно по переменным y и z.

Частным дифференциалом $d_x u$ функции $u(x, y, z)$ в данной точке называется ее дифференциал по переменной x при условии, что переменные y и z фиксированы.

Из свойств дифференциала функции одного переменного следует, что $d_x u = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx$.

Аналогично определяются частные дифференциалы $d_y u$, $d_z u$. Для них имеют место формулы $d_y u = \frac{\partial u}{\partial y}\, dy$, $d_z u = \frac{\partial u}{\partial z}\, dz$.

Подобные определения имеют место для любого числа переменных.

Если функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, то, по определению,

$$\frac{\partial f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\partial x_i} \stackrel{\text{def}}{=} \left.\frac{df(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{dx_i}\right|_{x_i = x_i^{(0)}}, \quad (37.1)$$

или, что то же, если опустить обозначение аргумента,

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} y}{\Delta x_i},$$

где $\Delta_{x_i} y = f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots$ $\dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Для обозначения частной производной $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ применяются также обозначения y_{x_i} или f_{x_i}.

Частным дифференциалом $d_{x_i} y$ *функции* $y = f(x_1, \dots, x_n)$ *называется дифференциал этой функции, рассматриваемой как функция только одной переменной* x_i*, остальные переменные фиксированы.*

Из свойств дифференциала функций одного переменного следует, что

$$d_{x_i} y = \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (37.2)$$

где $dx_i = \Delta x_i$, и тем самым частный дифференциал $d_{x_i} y$ является линейной функцией переменной dx_i, называемой *дифференциалом независимой переменной* x_i. Здесь везде $i = 1, 2, \dots, n$. В случае $n = 1$ частная производная совпадает с обычной производной, а частный дифференциал — с обычным дифференциалом.

Подчеркнем, что $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ — единый символ, т. е. в нем числитель и знаменатель не имеют самостоятельного смысла. С другой стороны, частная производная $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, может быть записана и в виде дроби: частного двух дифференциалов: $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{d_{x_i} y}{dx_i}$.

Из определения частных производных, как обычных производных при условии фиксирования всех переменных, кроме одной, по которой берется производная, следует, что при вычислении частных производных можно использовать правила

вычисления обычных производных. Пусть, например, требуется найти производную $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = xye^{x/y}$. Для этого, зафиксировав в этой формуле x, получим функцию одной переменной y; вычисляя ее производную, будем иметь

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{x/y} + xye^{x/y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x(y-x)e^{x/y}}{y}.$$

В заключение этого пункта отметим, что из непрерывности в данной точке функции n переменных не вытекает существование у нее в этой точке частных производных. Соответствующий пример в случае $n = 1$ был приведен ранее (см. п. 9.2). Важно заметить, что при $n \geqslant 2$ из существования даже всех частных производных в некоторой точке не следует непрерывность функции в этой точке*. Это естественно, поскольку условие непрерывности функции нескольких переменных в точке накладывает определенное ограничение на ее поведение при приближении к этой точке п о в с е м направлениям, в то время как существование частных производных в точке означает, что функция удовлетворяет определенным условиям при приближении к указанной точке лишь в направлении координатных осей.

Чтобы в этом наглядно убедиться, рассмотрим функцию $f(x, y)$, равную нулю, если $xy = 0$, и единице, если $xy \neq 0$. Очевидно, $f(x, 0) \equiv f(0, y) \equiv 0$ и, следовательно,

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Однако эта функция разрывна в точке $(0, 0)$, так как, например, ее предел вдоль прямой $y = x$ с удаленной из нее точкой $(0, 0)$ при $(x, y) \to (0, 0)$ равен 1, а $f(0, 0) = 0$. Более того, существуют функции, имеющие частные производные во всех точках и все-таки разрывные. Примером является функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{при } x = y = 0. \end{cases} \tag{37.3}$$

Эта функция имеет частные производные во всей плоскости и разрывна в точке $(0, 0)$ (почему?).

---

* Напомним, что при $n = 1$, т. е. для функции одной переменной из существования в точке производной, вытекает и непрерывность функции в этой точке (см. п. 9.2).

37.2. Дифференцируемость функций в точке

По аналогии с функцией одного переменного, функция $\alpha(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, многих переменных, заданная на множестве X, называется бесконечно малой при $x \to x^{(0)}$ по сравнению с функцией $\beta(x)$, заданной на том же множестве $X \subset \boldsymbol{R}^n$, если существует такая функция $\varphi(x)$, определенная также на множестве X, что в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ для всех точек x множества X выполняется равенство $\alpha(x) = \varphi(x)\beta(x)$ и $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} \varphi(x) = 0$. В этом случае пишут $\alpha = o(\beta)$, $x \to x^{(0)}$.

Как и для функции одного переменного, если $x^{(0)} \in X$, т. е. если функции α, β и φ определены в точке $x^{(0)}$, то из приведенного определения «o-малого» следует непрерывность функции φ в точке $x^{(0)}$, а поэтому и равенство $\varphi(x^{(0)}) = 0$.

Само собой разумеется, что данное здесь определение $\alpha = o(\beta)$ при $x \to x^{(0)}$ является частным случаем соответствующего определения для отображений из $\boldsymbol{R}$ в $\boldsymbol{R}^m$ (см. в п. 36.3 формулы (36.14) — (36.16)).

При определении дифференцируемости функций многих переменных рассмотрим сначала случай двух переменных: здесь хорошо видна сущность понятия дифференцируемости, а соответствующие формулы, естественно, выглядят короче и проще, чем в общем случае.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой δ-окрестности $U = U(M_0, \delta)$ точки $M_0 = (x_0, y_0)$ и пусть (рис. 23) $M = (x, y) \in U(M_0; \delta)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, следовательно,

$$\rho = \rho(M, M_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta.$$

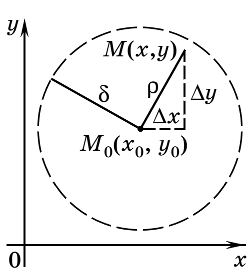


Рис. 23

Пусть, наконец,

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Обычно Δz называется *полным приращением функции*; это название объясняется тем, что здесь, вообще говоря, все независимые переменные получают приращения, отличные от нуля.

Определение 2. *Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если существуют два такие числа A и B, что*

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad \rho \to 0. \tag{37.4}$$

Определение 3. *В случае дифференцируемости функции f в точке (x_0, y_0) линейная функция $A\Delta x + B\Delta y$ переменных Δx и Δy называется полным дифференциалом или просто дифференциалом функции f в точке (x_0, y_0) и обозначается через dz.*

Таким образом, $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Вместо Δx и Δy используют также равнозначные обозначения dx и dy, т. е. $dx \stackrel{\text{def}}{=} \Delta x$, $dy \stackrel{\text{def}}{=} \Delta y$. Таким образом, $dz = Adx + Bdy$, функцию $o(\rho)$, согласно определению символа «o-малое», можно представить в виде $o(\rho) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho$, где

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0, \tag{37.5}$$

и функция $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ определена, согласно тому же определению, в точке $(0, 0)$, так как в этой точке определены функции ρ и $o(\rho) = \Delta z - A\Delta x - B\Delta y$. Поэтому

$$\varepsilon(0, 0) = 0. \tag{37.6}$$

Таким образом,

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho, \tag{37.7}$$

причем выполняется условие (37.5), следовательно, и условие (37.6).

Запишем соотношение (37.7) в другой форме, при этом все ниже написанные пределы будут браться по целой окрестности точки $(0, 0)$.

ЛЕММА 1. *Условие* (37.7) *эквивалентно условию*

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \tag{37.8}$$

где $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0$.

Доказательство. Пусть выполнено условие (37.7) и $\alpha = \varepsilon\rho$, где $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$; тогда при $\rho \neq 0$

$$\alpha = \varepsilon\rho = \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} =$$

$$= \varepsilon\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\Delta x + \varepsilon\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\Delta y = \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$. Заметив, что $\frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \leqslant 1$, $\frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \leqslant 1$, имеем $|\varepsilon_1| \leqslant |\varepsilon|$, $|\varepsilon_2| \leqslant |\varepsilon|$ при $\rho \neq 0$. Если же $\rho = 0$, то положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. В результате $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0$, т. е. получилось представление функции α в виде $\alpha = \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0$.

Пусть, наоборот, выполнено условие (37.8) и $\alpha = \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$, где $\varepsilon_1 \to 0$ и $\varepsilon_2 \to 0$ при $\rho \to 0$. Тогда при $\rho \neq 0$ имеем

$$\alpha = \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_1 + \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_2 \right) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \varepsilon \rho,$$

где $\varepsilon = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_1 + \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_2$ и, следовательно, $|\varepsilon| \leqslant |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$ при $\rho \neq 0$. Если же $\rho = 0$, то положим $\varepsilon = 0$. В результате получим, что $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$, а это означает, что функция α представлена в виде $\alpha = \varepsilon \rho$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon = 0$. □

ТЕОРЕМА 1. *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то она непрерывна в этой точке.*

Действительно, так как $|\Delta x| \leqslant \rho$ и $|\Delta y| \leqslant \rho$, то из формулы (37.7) и следует, что при $\rho \to 0$ имеет место $\Delta z \to 0$. Это и означает непрерывность функции f в точке (x_0, y_0). □

ТЕОРЕМА 2. *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) и $dz = A dx + B dy$ — ее дифференциал в этой точке, то в точке (x_0, y_0) у функции f существуют все частные производные и*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = B. \qquad (37.9)$$

Таким образом,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \qquad (37.10)$$

Доказательство. Согласно определению дифференцируемости (см. (37.4) и (37.8)), $\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_1 \Delta y$, где

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0. \qquad (37.11)$$

Если $\Delta y = 0$, то $\Delta z = \Delta_x z = A\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = 0$ (это следует из (37.11), поскольку, полагая $\Delta y = 0$, получим $\rho = |\Delta x|$). Отсюда, разделив на Δx при $\Delta x \neq 0$, имеем

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \varepsilon_1, \tag{37.12}$$

где при $\Delta x \to 0$ правая часть стремится к пределу, равному A, поэтому и левая часть при $\Delta x \to 0$ имеет тот же предел. Это означает (см. (37.1)), что в точке (x_0, y_0) существует производная $\frac{\partial z}{\partial x} = A$. Аналогично, полагая в (37.8) $\Delta x = 0$, поделив на Δy и перейдя к пределу при $\Delta y \to 0$, $\Delta y \neq 0$, получим $\frac{\partial z}{\partial y} = B$. □

СЛЕДСТВИЕ. *Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то она имеет единственный дифференциал.*

Единственность дифференциала непосредственно вытекает из формул (37.9), так как частные производные в данной точке определяются однозначно.

Вспоминая определения частных дифференциалов (см. (37.2)), формулу (37.10) можно переписать в виде $dz = d_x z + d_y z$, т. е. полный дифференциал функции (когда он существует) является суммой ее частных дифференциалов.

Заметим, что утверждение, обратное теореме 2, не имеет места: существуют функции, имеющие все частные производные во всех точках плоскости, но не дифференцируемые в некоторой точке. Примером может служить функция (37.3), приведенная в конце предыдущего пункта: в точке (0, 0) эта функция не непрерывна, откуда, в силу теоремы 1, вытекает, что в точке (0, 0) она и не дифференцируема.

Из сказанного следует, что не всегда выражение $d_x z + d_y z$, когда оно имеет смысл, является полным дифференциалом функции. Связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием в этой точке частных производных сложнее, чем связь между дифференцируемостью и существованием производной функции одной переменной.

Сформулируем достаточные условия в терминах свойств частных производных для дифференцируемости функции.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть функция $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) имеет частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и*

$\frac{\partial z}{\partial y}$, *которые непрерывны в самой точке* (x_0, y_0); *тогда функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в этой точке.*

СЛЕДСТВИЕ. *Если функция* $z = f(x, y)$ *имеет в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0) *частные производные* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial z}{\partial y}$, *причем эти частные производные непрерывны в самой точке* (x_0, y_0), *то и функция* $z = f(x, y)$ *также непрерывна в этой точке.*

Доказательство теоремы. Обозначим через $U(\delta)$ δ-окрестность точки (x_0, y_0), в которой определена вместе со своими частными производными f_x и f_y функция f. Выберем Δx и Δy так, чтобы $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U(\delta)$. Замечая, что

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)],$$

применим к выражениям в квадратных скобках, являющимся приращениями функций только одной переменной, формулу конечных приращений Лагранжа (см. п. 11.2). Это возможно, поскольку функция $f(x, y_0 + \Delta y)$, рассматриваемая как функция одного переменного x, имеет на отрезке с концами в точках x_0 и $x_0 + \Delta x$ производную (являющуюся частной производной по x функции f), откуда следует непрерывность этой функции на указанном отрезке и, таким образом, функция $f(x, y_0 + \Delta y)$ удовлетворяет всем условиям, при которых была доказана формула конечных приращений Лагранжа. Аналогично проверяется и возможность применения формулы Лагранжа к функции $f(x_0, y)$, рассматриваемой как функция одного переменного y на отрезке с концами в точках y_0 и $y_0 + \Delta y$. В результате получим

$$\Delta z = f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y, \qquad (37.13)$$

$$0 < \theta_1 < 1, \ 0 < \theta_2 < 1,$$

причем θ_1 и θ_2 зависят от выбора точки $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, т. е. от Δx и Δy.

Если

$$\begin{gathered} f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0, y_0) = \varepsilon_1, \\ f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) - f_y(x_0, y_0) = \varepsilon_2, \end{gathered} \qquad (37.14)$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$, то, в силу непрерывности частных производных f_x и f_y в точке (x_0, y_0), имеем

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0. \qquad (37.15)$$

Найдя из (37.14) выражения для $f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)$ и $f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)$ и подставив их в (37.13), получим

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \qquad (37.16)$$

что, в силу выполнения условий (37.15), и означает дифференцируемость функции f в точке (x_0, y_0) (см. (37.4) и (37.8)). □

Следствие из теоремы вытекает из того обстоятельства, что функция, дифференцируемая в некоторой точке, является и непрерывной в ней (см. теорему 1).

Теорема 3 имеет важное значение, поскольку понятие дифференцируемости функции играет первостепенную роль в ряде разделов теории функций многих переменных. Однако непосредственная проверка дифференцируемости функции (например, для выяснения возможности применения тех или иных теорем) часто бывает затруднительна, проверка же непрерывности частных производных, для вычислений которых имеется удобный аналитический аппарат, оказывается проще.

Определение 4. *Функция, имеющая в некоторой точке* (*на некотором множестве*) *непрерывные частные производные, называется непрерывно дифференцируемой в этой точке* (*на этом множестве*).

Сопоставим определение дифференцируемости функции (определение 2) и определение непрерывной дифференцируемости (определение 4). Дифференцируемость функции в точке означает существование в этой точке дифференциала, т. е. справедливость для этой точки формулы (37.4). Непрерывная же дифференцируемость функции в точке означает непрерывность в этой точке ее частных производных. Таким образом, дифференцируемость функции связана с понятием дифференциала, а непрерывная дифференцируемость — с понятием частных производных. Вместе с тем из непрерывной дифференцируемости в точке (на открытом множестве) следует дифференцируемость в этой точке (на этом множестве); в этом состоит утверждение теоремы 3.

В дальнейшем понадобятся некоторые дополнительные свойства функции ε_1 и ε_2 из формулы (37.16).

Определение 5. *Пусть A и B — два плоских множества, $A \subset \boldsymbol{R}^2_{xy}$, $B \subset \boldsymbol{R}^2_{uv}$, и пусть функция $f = f(x, y, u, v)$ определена для $(x, y) \in A$, $(u, v) \in B$.*

Функция f называется равномерно стремящейся к нулю на множестве A точек (x, y) при $(u, v) \to (u_0, v_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $(u, v) \in B$, удовлетворяющих условию $\sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} < \delta$, и всех $(x, y) \in A$ выполняется условие $|f(x, y, u, v)| < \varepsilon$.

Общее определение равномерного стремления функции к пределу будет дано в п. 39.4.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывно дифференцируема на открытом множестве $G \subset \boldsymbol{R}^2$. Тогда*

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \qquad (37.17)$$

где функции $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x, y, \Delta x, \Delta y)$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(x, y, \Delta x, \Delta y)$ равномерно стремятся к нулю при $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ на любом компакте $A \subset G$.

Доказательство. Пусть A — компакт, лежащий в G. Тогда замкнутые множества A и $\boldsymbol{R}^2 \backslash G$ не пересекаются, и так как A ограничено (см. теорему 3 п. 35.3), то $d = \rho(A, \boldsymbol{R}^2 \backslash G) > 0$ (см. лемму 7 п. 35.2).

Множество $A_{d/2} = \{(x, y)\colon \rho((x, y), A) \leqslant d/2\}$ содержится в множестве G и является компактом (см. лемму 11 п. 35.3).

Пусть теперь $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \frac{d}{2}$. Поскольку точки $(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)$ и $(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)$ находятся от точки (x_0, y_0) на расстоянии, меньшем $\frac{d}{2}$, при $(x_0, y_0) \in A$ имеем

$$(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \in A_{d/2}, \quad (x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \in A_{d/2},$$
$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1,$$

и, следовательно, согласно формулам (37.14), имеем неравенства $|\varepsilon_1| \leqslant \omega(\rho; f_x; A_{d/2})$, $|\varepsilon_2| \leqslant \omega(\rho; f_y; A_{d/2})$, где в их правых частях стоят соответственно модули непрерывности функций f_x и f_y. Из непрерывности частных производных f_x и f_y на компакте $A_{d/2}$ следует, что

$$\lim_{\rho \to 0} \omega(\rho; f_x; A_{d/2}) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\rho \to 0} \omega(\rho; f_y; A_{d/2}) = 0.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\rho < \delta$ выполняются неравенства $\omega(\rho; f_x; A_{d/2}) < \varepsilon$, $\omega(\rho, f_y; A_{d/2}) < \varepsilon$. Следовательно, для всех $\rho < \delta$ и всех $(x_0, y_0) \in A$ справедливы неравенства $|\varepsilon_1| < \varepsilon$, $|\varepsilon_2| < \varepsilon$.

Это и означает равномерное стремление к нулю при $\rho \to 0$ функций ε_1 и ε_2 на компакте A. □

З а м е ч а н и е. В предположениях теоремы 4 приращение функции Δz представимо также в виде

$$\Delta z = f_x(x, y)\, \Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon\rho, \tag{37.18}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(x, y, \Delta x, \Delta y)$ равномерно на каждом компакте $A \subset G$ и стремится к нулю, когда $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$. Для доказательства достаточно в формуле (37.18) положить $\varepsilon = \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\rho} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\rho}$ при $\rho \neq 0$ и $\varepsilon = 0$ при $\rho = 0$ (сравните с доказательством леммы в начале этого пункта).

Все определения и утверждения этого пункта переносятся и на случай функции $y = f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ любого числа n переменных, определенной в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Например, условие дифференцируемости в данной точке $x^{(0)}$ в общем случае выглядит так:

$$\Delta y = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + o(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{37.19}$$

где

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}, \quad \Delta y = f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}),$$

$$\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, если функция f дифференцируема, то

$$f(x) = f(x^{(0)}) + A(x_1 - x_1^{(0)}) + \dots + A_n(x_n - x_n^{(0)}) + o(\rho),\ \rho \to 0, \tag{37.20}$$

т. е. функция f в окрестности данной точки с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^{(0)})^2}$, равна линейной функции*. Образно говоря, дифференцируемость функции в данной точке означает, что функция f «по-

* Функция вида $y = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x_n$, где c_i — постоянные, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, называются *линейными* (*однородными*) *функциями* n переменных или, что то же самое, *линейными функциями точки* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$.

чти линейна» в окрестности этой точки; точный смысл выражения «почти линейна» заключается в формуле (37.20).

Если функция f дифференцируема, т. е. имеет место равенство (37.19), то у нее существуют все частные производные $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}$, и они равны коэффициентам A_i:

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} = A_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Линейная функция $\frac{\partial f(x)}{\partial x}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\Delta x_n$ от переменных $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ (здесь вместо $x^{(0)}$ написано x) называется *дифференциалом* дифференцируемой функции или, подробнее, ее полным дифференциалом в данной точке x и обозначается $df(x)$:

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\Delta x_n. \qquad (37.21)$$

Дифференциал, как и всякая линейная функция n переменных, определен на всем n-мерном пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Таким образом, *формула* (37.21) *имеет смысл для всех значений* Δx_i, $i = 1, 2, \dots, n$, в то время как формула (37.19) — *только для тех, которые не выводят за область определения функции* f.

Переменные Δx_i называются также *дифференциалами переменных* x_i и обозначаются dx_i, $i = 1, 2, \dots, n$. В этих обозначениях дифференциал функции f записывается в виде

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\,dx_1 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\,dx_n.$$

Очевидно, что $\Delta f(x) = df(x) + o(\rho)$ при $\rho \to 0$.

Если функция f дифференцируема в данной точке, то ее дифференциал является суммой всех ее частных дифференциалов (см. п. 37.1) в этой точке:

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} d_{x_i} f(x).$$

Однако не всегда, когда существуют все частные дифференциалы $d_{x_i} f(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, функция f дифференцируема (соответствующие примеры для случая функций двух переменных были рассмотрены выше).

Если же рассматривать дифференциал и при изменении точки $x = (x_1, \dots, x_n)$, то он уже является функцией от $2n$ переменных: $x_1, \dots, x_n, dx_1, \dots, dx_n$.

Теоремы 1—4 этого параграфа очевидным образом обобщаются на функции любого числа n переменных ($n = 1, 2, \dots$), поэтому их формулировки не приводятся.

37.3. Дифференцирование сложной функции

ТЕОРЕМА 5. *Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ одного переменного t дифференцируемы в точке t_0 (что, как мы знаем, эквивалентно существованию у них производных в точке t_0* (см. п. 9.2)) *и пусть $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то сложная функция $z = f(x(t), y(t))$ определена в некоторой окрестности точки t_0, имеет в t_0 производную и эта производная выражается формулой*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \tag{37.22}$$

или подробнее

$$\frac{df(x(t_0), y(t_0))}{dt} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{dx(t_0)}{dt} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{dy(t_0)}{dt}.$$

Доказательство. Функция $f(x, y)$, согласно определению дифференцируемости функции, определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Из дифференцируемости же функций $x(t)$ и $y(t)$ следует их непрерывность в точке t_0. Поэтому, согласно замечанию перед теоремой 2 в п. 36.6, в некоторой окрестности точки t_0 определена сложная функция $f(x(t), y(t))$.

Дифференцируемость функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) означает, что ее полное приращение $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ представимо в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \tag{37.23}$$

где функция $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ определена в некоторой окрестности точки $(0, 0)$, непрерывна в ней и $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$. Здесь, как обычно, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Пусть теперь Δt — приращение переменной t и $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$, $\Delta y = y(t_0 + \Delta x) - y(t_0)$. Разделим обе части равенства (37.23) на Δt:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} \pm \varepsilon\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \qquad (37.24)$$

(при $\Delta t > 0$ берется знак плюс, а при $\Delta t < 0$ — знак минус). При $\Delta t \to 0$, в силу непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ в точке t_0, получим $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, а значит, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \rho = 0$. Отсюда, по теореме о пределе композиций функции $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$. Заметим, наконец, что существует конечный предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}.$$

Из всего этого следует, что при $\Delta t \to 0$ правая часть формулы (37.24) стремится к конечному пределу $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ (в точке $t = t_0$), поэтому и левая часть этой формулы, т. е. $\frac{\Delta z}{\Delta t}$, стремится к тому же пределу, а это и означает, что в точке t_0 существует производная $\frac{dz}{dt}$ и выражается формулой (37.22). □

Отметим, что, хотя в окончательную формулу производной сложной функции (37.22) входят только частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x, y)$, по ходу доказательства использовалось более сильное свойство этой функции, чем существование частных производных, а именно ее дифференцируемость.

УПРАЖНЕНИЕ. Показать, что при отказе от требования дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0), лишь при предположении существования в этой точке частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ и существования производных $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ в точке t_0 формула (37.22), вообще говоря, несправедлива и, более того, сложная функция $f(x(t), y(t))$ (предполагается, что она имеет смысл), вообще говоря, не имеет производной в точке t_0.

СЛЕДСТВИЕ. *Если функции $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ непрерывны в точке (u_0, v_0) и имеют в ней частные производные $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, то в точке (u_0, v_0) существует ча-*

стная производная $\frac{\partial z}{\partial u}$ *сложной функции* $z = f(x(u, v), y(u, v))$, *причем*

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{37.25}$$

Доказательство. Функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0) и, следовательно, определена в некоторой ее окрестности. В силу непрерывности функции $x(u, v)$, $y(u, v)$ в точке (u_0, v_0), в некоторой окрестности этой точки имеет смысл сложная функция $f(x(u, v), y(u, v))$ (см. п. 36.6).

Зафиксируем $v = v_0$ и рассмотрим сложную функцию $z = f(x(u, v_0), y(u, v_0))$ одного переменного u. Согласно теореме 5, эта функция определена в некоторой окрестности точки u_0 и имеет в этой точке производную. Таким образом, производная $\frac{\partial z}{\partial u}$ в точке (u_0, v_0) существует и из формулы (37.22) вытекает формула (37.25). □

Аналогично, если в точке (u_0, v_0) существуют частные производные $\frac{\partial x}{\partial v}$ и $\frac{\partial y}{\partial v}$, то у сложной функции $z = f(x(u, v), y(u, v))$ существует в точке (u_0, v_0) частная производная по v и для нее справедлива формула

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Замечание. Рассмотрим общий n-мерный случай. *Пусть в окрестности точки* $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ *задана функция* $y = y(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, *а на некоторой окрестности точки* $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \ldots, t_k^{(0)}) \in \boldsymbol{R}^k$ — *функции* $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1, \ldots, t_k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *такие, что* $x_i(t^{(0)}) = x_i^{(0)}$. *Если функция* $y = y(x)$ *дифференцируема в точке* $x^{(0)}$ *и если в точке* $t^{(0)}$ *существуют частные производные* $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *то сложная функция* $y(x(t))$ *имеет в точке* $t^{(0)}$ *частные производные* $\frac{\partial y}{\partial t_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, *причем*

$$\frac{\partial y}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{37.26}$$

Заметим, что если при сделанных предположениях частные производные $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, k$, непре-

рывны соответственно в точках $x^{(0)}$ и $t^{(0)}$, то, в силу формулы (37.26), частные производные сложной функции $y = y(x(t))$ также непрерывны в точке $t^{(0)}$ и, следовательно, она будет дифференцируемой в этой точке (см. теорему 3 п. 37.2). В следующем пункте будет доказана дифференцируемость композиций функций при более слабых предположениях.

37.4. Инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных. Правила вычисления дифференциалов

ТЕОРЕМА 6. *Пусть функция $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_i^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, а функции $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1, \ldots, t_k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, определены в некоторой окрестности точки $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \ldots, t_k^{(0)})$ и пусть $x_i^{(0)} = x_i(t^{(0)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Тогда если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$, а функции $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, дифференцируемы в точке $t^{(0)}$, то сложная функция $f(x(t)) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ определена в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$ и дифференцируема в этой точке. При этом дифференциал df функции $f(x(t))$ в точке $t^{(0)}$ может быть записан как в виде

$$df = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f(x(t^{(0)}))}{\partial x_i}\, dt_j, \tag{37.27}$$

так и в виде

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial t_j}\, dx_i, \tag{37.28}$$

где $dx_i = dx_i(t)\big|_{t = t^{(0)}}$.

Доказательство. Функции $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, определены в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$, и так как из дифференцируемости функций следует их непрерывность, то сложная функция $f(x(t))$ определена в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$ (см. замечание перед теоремой 2 п. 36.6). Зафиксируем какие-либо два числа $\delta > 0$ и $\eta > 0$ так, чтобы функция $f(x)$ была определена на η-окрестности точки $x^{(0)}$, функции $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, на δ-окрестности точки $t^{(0)}$ и чтобы $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in U(x^{(0)}; \eta)$ при $t \in U(t^{(0)}; \delta)$. Тогда на окрестности $U(t^{(0)}; \delta)$ определена сложная функция $f(x(t))$. Возможность выбора таких чисел δ и η (очевид-

но, δ зависит от выбора η) была показана в п. 36.6. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$; поэтому при $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i} < \eta$ имеем

$$\Delta f = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \Delta x_1 + \varepsilon r, \qquad (37.29)$$

где функция $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $(0, 0, \dots, 0)$, непрерывна в ней и $\lim\limits_{r \to 0} \varepsilon = 0$.

В силу дифференцируемости функций $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, в точке $t^{(0)}$, при $\rho = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \Delta t_j^2} < \delta$ получим

$$\Delta x_i = x_i(t_1^{(0)} + \Delta t_1, \dots, t_k^{(0)} + \Delta t_k) - x_i(t_1^{(0)}, \dots, t_k^{(0)}) =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \Delta t_j + \varepsilon_i \rho, \quad i = 1, 2, \dots, n, \qquad (37.30)$$

где $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Подставив значения Δx_i из (37.30) в (37.29), имеем

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \Delta t_j + \beta, \qquad (37.31)$$

где

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \varepsilon_i \rho + \varepsilon r. \qquad (37.32)$$

Переставив порядок суммирования в (37.31), найдем

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \right) \Delta t_j + \beta. \qquad (37.33)$$

Теперь, для того чтобы доказать, что сложная функция $f(x(t))$ дифференцируема в точке $t^{(0)}$, надо показать, что $\beta = o(\rho)$ при $\rho \to 0$. В силу непрерывности функций $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, в точке $t^{(0)}$, имеем $\lim\limits_{\rho \to 0} \Delta x_i = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{\rho \to 0} r = 0$. Отсюда, в силу теоремы о композиции непрерывных функций (см. п. 36.6),

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon = 0. \qquad (37.34)$$

Заметим, что

$$\frac{\beta}{\rho} \underset{(37.32)}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \varepsilon_i + \varepsilon \frac{r}{\rho}. \qquad (37.35)$$

Докажем ограниченность отношения $\frac{r}{\rho}$. Использовав формулы (37.30), получим

$$\frac{r}{\rho} = \frac{1}{\rho}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2} \leqslant \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i|^* \underset{(37.30)}{\leqslant} \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}\left|\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j}\right|\frac{|\Delta t_j|}{\rho} + \varepsilon_i\right).$$

Из условия $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_i = 0$ вытекает, что в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$ функции ε_i ограничены, а так как $\frac{|\Delta t_j|}{\rho} \leqslant 1$, то и функция $\frac{r}{\rho}$ ограничена в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$. Поэтому из равенств $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, (37.34) и (37.35) следует, что $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\beta}{\rho} = 0$, т. е. что $\beta = o(\rho)$ при $\rho \to 0$. Дифференцируемость сложной функции $f(x(t))$ в точке $t^{(0)}$ доказана.

Из формулы (37.31) имеем

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t}\Delta t_j.$$

Отсюда, замечая, что $\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t}\Delta t_j = dt_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, мы и получаем формулу (37.28). Формула же (37.27) является обычной формулой для дифференциала (см. (37.21)). □

Формально обе записи (37.27) и (37.28) дифференциала функции выглядят одинаково: в обеих формулах дифференциал равен сумме произведений частных производных на соответствующие дифференциалы, однако в формуле (37.27) dt_j — дифференциалы независимых переменных, а в формуле (37.28) dx_i — дифференциалы функций. Свойство дифференциала функции, выражаемое формулами (37.27) и (37.28), называется *инвариантностью формы первого дифференциала* относительно выбора переменных.

З а м е ч а н и е 1. Из формулы (37.33) следует, что

$$df(x^{(0)}) = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j}\right)dt_j.$$

Но коэффициенты дифференциала функции при дифференциалах независимых переменных определяются однозначно и рав-

---

* Мы воспользовались неравенством $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|$, которое является следствием очевидного неравенства $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2 \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|\right)^2$ (см. (35.9)).

ны соответствующим частным производным, поэтому, сравнивая эту формулу с формулой (37.27), получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j},$$

т. е. снова формулу (37.26). Правда, она выведена при более сильных ограничениях, чем раньше: на этот раз предполагалась дифференцируемость функций $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, в то время как в п. 37.3 — лишь существование у этих функций соответствующих частных производных.

З а м е ч а н и е 2. Если функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1, \dots, t_k) \in \boldsymbol{R}^k$, $i = 1, 2, \dots, n$, имеют непрерывные частные производные соответственно в точке $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \boldsymbol{R}^n$ и в точке $t^{(0)} \in \boldsymbol{R}^k$, где $x_i^{(0)} = x_i(t^{(0)})$, то эти функции, будучи дифференцируемы в указанных точках, удовлетворяют условиям теоремы 6. Следовательно, как это уже отмечалось в конце п. 37.3, для них справедливы утверждение этой теоремы и вытекающая из него формула для вычисления частной производной сложной функции (см. предыдущее замечание).

Инвариантность формы первого дифференциала широко используется при практическом вычислении дифференциалов и частных производных. Если u и v — функции какого-то числа переменных, то с помощью формулы (37.28) легко получаются следующие формулы:

$$\begin{aligned} &1.\ d(u+v) = du + dv.\\ &2.\ d(uv) = vdu + udv.\\ &3.\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}. \end{aligned} \tag{37.36}$$

Докажем, например, формулу 3. Пусть $z = \frac{u}{v}$, где $u = u(x_1, \dots, x_n)$, $v = v(x_1, \dots, x_n)$. Замечая, что $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v}$ и $\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$, согласно формуле (37.28), имеем

$$dz = \frac{1}{v}du - \frac{u}{v^2}dv = \frac{vdu - udv}{v^2}. \square$$

При вычислении конкретных дифференциалов элементарных функций многих переменных можно использовать формулы, полученные раньше (см. § 9) для дифференциалов элементарных функций одной переменной. При этом следует заметить, что если функция $y = y(x_1, \dots, x_n)$ представлена в виде $y = F(u)$, где $u = u(x_1, \dots, x_n)$, то при соответствующих предположениях, согласно формуле (37.28), $dy = F'(u)\, du$, $u = u(x_1, \dots, x_n)$.

Например, если $y = \sin u$, то $dy = \cos u\, du$; если $y = \ln u$, то $dy = \frac{du}{u}$; если $y = \operatorname{arctg} u$, то $dy = \frac{du}{1 + u^2}$ и т. д. (подчеркнем, что здесь везде $u = u(x_1, \dots, x_n)$).

В качестве примера найдем дифференциал функции $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Вычисления произведем в следующем порядке:

$$dz = d\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{x dy - y dx}{x^2} = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

При вычислении дифференциала $d\left(\frac{y}{x}\right)$ мы воспользовались формулой $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$, доказанной выше для случая, когда u и v являются функциями одних и тех же переменных. Использование этой формулы в указанном случае правомерно, так как можно считать, что у дроби $\frac{y}{x}$ и числитель и знаменатель являются функциями одних и тех же переменных x и y, что можно даже выразить, например, следующей формулой:

$$\frac{y}{x} = \frac{y + 0x}{x + 0y}.$$

Если требуется найти частные производные функции многих переменных, особенно если надо вычислить все производные, то целесообразно вычислить дифференциал этой функции, тогда искомыми частными производными являются коэффициенты при соответствующих дифференциалах.

Так, в рассмотренном примере $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, беря коэффициенты при dx и dy из найденного для дифференциала выражения, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

З а м е ч а н и е 3. *Всякую функцию $y = f(x_1, \dots, x_n)$ от n переменных можно рассматривать в определенном смысле и как функцию от любого числа $n + m > n$ переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_{n+m}$.* Именно для всякой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, заданной на множестве $X \subset \boldsymbol{R}^n$, определим функцию $f^*(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+m})$ на множестве точек $(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+m})$ таких, что $(x_1, \dots, x_n) \in X$, $-\infty < x_j < +\infty$, $j = n + 1, \dots, n + m$, следующим образом:

$$f^*(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+m}) = f(x_1, \dots, x_n). \qquad (37.37)$$

Таким образом, рассмотрение функции n переменных как функции $n + m$ переменных означает фактически продолжение по формуле (37.37) функции f с множества ее определения $X \subset \boldsymbol{R}^n$ на множество

$$X^* = \{(x_1, \dots, x_{n+m}) : (x_1, \dots, x_n) \in X, \quad -\infty < x_j < +\infty, \\ j = n+1, \dots, n+m\},$$

лежащее уже в пространстве $\boldsymbol{R}^{n+m}$. Для функции f^*, полученной после такого продолжения, имеем

$$\frac{\partial f^*(x_1, \dots, x_{n+m})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial f^*(x_1, \dots, x_{n+m})}{\partial x_j} = 0, \quad j = n+1, \dots, n+m,$$

поэтому

$$df^*(x_1, \dots, x_{n+m}) = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f^*(x_1, \dots, x_{n+m})}{\partial x_i}\, dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}\, dx_i = df(x_1, \dots, x_n).$$

Например, когда мы говорим, что функцию одного переменного $z = f(x)$, определенную на некотором интервале (a, b), мы рассматриваем как функцию двух переменных $f(x) = F(x, y)$, $x \in (a, b)$, $-\infty < y < +\infty$; это означает, что функция $F(x, y)$ является постоянной, равной $f(x)$ на любой прямой, проходящей через точку x интервала (a, b) оси Ox параллельно оси Oy. При этом

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = f'(x), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0,$$

$$dF(x, y) = df(x), \quad a < x < b, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Полезно для дальнейшего отметить обратный факт. Пусть $X \subset \boldsymbol{R}^n$. Если функция $f^*(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ определена на множестве

$$X^* = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : (x_1, \dots, x_n) \in X, \quad a < x_{n+1} < b\}$$

и

$$\frac{\partial f^*(x_1, \dots x_n, x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} = 0 \qquad (37.38)$$

— на X^*, то существует такая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ от n переменных, определенная на множестве X, что $f^*(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_n)$ для всех $(x_1, \dots, x_n) \in X$, $x_{n+1} \in (a, b)$. В этом случае говорят, что функция f^* фактически *не зависит от переменной* x_{n+1}. В самом деле, из условия (37.38) сле-

дует, что функция f^* постоянна как функция x_{n+1} (см. следствие 1 теоремы 3 из п. 11.2) при фиксированной точке $(x_1, \dots, x_n)$, т. е., зафиксировав какое-либо $c \in (a, b)$ для любой точки $(x_1, \dots, x_n) \in X$ и $x_{n+1} \in (a, b)$, имеем $f^*(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f^*(x_1, \dots, x_n, c)$. Искомая функция f, очевидно, определяется равенством $f(x_1, \dots, x_n) = f^*(x_1, \dots, x_n, c)$, причем она не зависит от выбора $c \in (a, b)$.

Из сказанного, в частности, следует, что формулы (37.36) для дифференциалов остаются справедливыми и в том случае, когда функции u и v зависят от разного числа переменных, так как всегда, в силу указанного приема, этот случай можно свести к разобранному выше случаю функций одного числа переменных.

37.5. Геометрический смысл частных производных и полного дифференциала

Для большей геометрической наглядности и для того, чтобы не вводить новых понятий, в этом пункте ограничимся рассмотрением функций двух переменных.

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, определенную на плоском открытом множестве G, т. е. открытом множестве G, лежащем на плоскости $\boldsymbol{R}^2$. Пусть $(x_0, y_0) \in G$, и пусть в точке (x_0, y_0) существует частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$. Ее геометрический смысл сразу получается из определения частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ как обычной производной функции $f(x, y)$ по x при фиксированном y и из геометрического смысла обычной производной (см. п. 9.3). В самом деле, возьмем замкнутый круг Q радиуса r с центром в точке (x_0, y_0) и лежащий в G*. Пусть Γ — кривая, заданная представлением $z = f(x, y_0)$, $y = y_0$, $x_0 - r \leqslant x \leqslant x_0 + r$, т. е. кривая, которая получается в результате сечения графика функции $z = f(x, y)$, $(x, y) \in Q$ плоскостью $y = y_0$ (рис. 24). Как известно, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \left.\frac{df(x, y_0)}{dx}\right|_{x = x_0} = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол,

---

* Такой круг Q всегда существует. Действительно, в силу определения открытого множества, существует такая δ-окрестность U точки (x_0, y_0), что $U \subset G$. Тогда замкнутый круг Q радиуса $\delta/2$ с центром в точке (x_0, y_0) будет заведомо лежать в G.

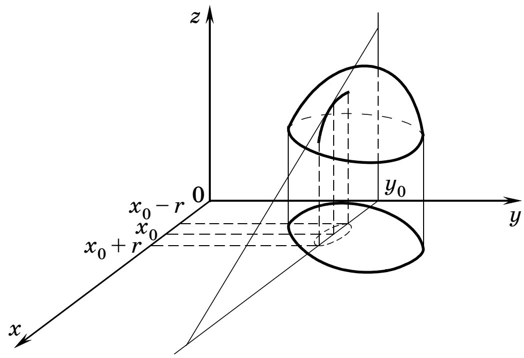


Рис. 24

образованный касательной к графику функции $f(x, y_0)$ в точке $(x_0, f(x_0, y_0))$ с осью Ox, т. е. угол, образованный касательной к кривой Γ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ с осью Ox.

Таким образом, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$; в этом и состоит геометрический смысл частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Аналогично устанавливается и геометрический смысл частной производной $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ как тангенса угла наклона, образованного с осью Oy касательной в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ к кривой, получающейся в результате сечения графика функции $z = f(x, y)$, $(x, y) \in Q$, плоскостью $x = x_0$.

Что же касается геометрического смысла дифференциала, то из формулы (37.4) получим

$$f(x, y) = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{37.39}$$

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad z_0 = f(x_0, y_0).$$

Уравнение

$$z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) \tag{37.40}$$

является уравнением плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и не параллельной оси Oz. Как известно, коэффициенты A и B однозначно определяются из соотношения (37.39), причем

$$A = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \tag{37.41}$$

и, значит, плоскость (37.40) однозначно определена соотношением (37.39). Эта плоскость называется *касательной плоскостью* к графику функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0).

Таким образом, мы пришли к следующему определению.

Определение 6. *Касательной плоскостью к графику функции $f(x, y)$ в данной точке называется такая плоскость, что разность ее аппликаты и значения функции $f(x, y)$ является величиной, бесконечно малой по сравнению с ρ при $\rho \to 0$.*

В силу (37.41), уравнение этой касательной плоскости имеет вид

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0). \qquad (37.42)$$

В дальнейшем (см. п. 50.5) мы познакомимся с другим подходом к понятию касательной плоскости.

Полагая $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, правую часть уравнения (37.42) запишем в виде

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y.$$

Это есть обычная запись дифференциала dz функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0), поэтому уравнение (37.42) можно переписать в виде $z - z_0 = dz$.

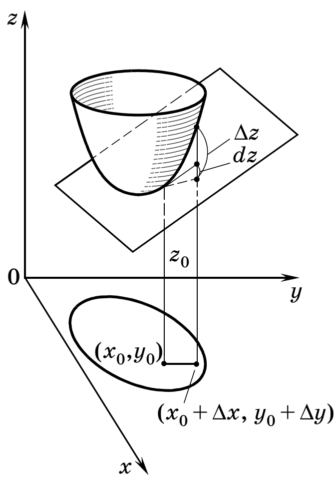


Рис. 25

Таким образом, геометрический смысл полного дифференциала функции в точке (x_0, y_0) состоит в том, что он равен приращению аппликаты плоскости, касательной к графику функции (рис. 25).

Более подробно дифференциал

$$dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta y,$$

$$\Delta x = x - x_0,\ \Delta y = y - y_0,$$

совпадает с приращением в точке $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ аппликаты плоскости, касательной к графику функции в точке

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0)).$$

37.6. Градиент функции

Пусть функция $F(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), а кривая Г такова, что функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, с помощью которых она задана в параметрической форме, удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, т. е. с его помощью осуществляется неявное задание кривой Г. Пусть $t_0 \in [a, b]$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, а функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы при $t = t_0$.

Дифференцируя при $t = t_0$ тождество $F(x(t), y(t)) = 0$, $a \leqslant t \leqslant b$, получим

$$x'_t \frac{\partial F}{\partial x} + y'_t \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad t = t_0,$$

т. е. векторы $(x'(t_0), y'(t_0))$ и $\left(\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$ ортогональны. Вектор $\boldsymbol{a} = (x'_t, y'_t)$ в случае, когда он не равен нулю, является, как известно, касательным вектором к кривой Г в точке $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$. Вектор $\left(\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$ называется *градиентом функции* F в точке (x_0, y_0) и обозначается через $\operatorname{grad} F(x_0, y_0)$. Из сказанного следует, что градиент функции F ортогонален касательной к кривой, неявно задаваемой уравнением $F(x, y) = 0$. Прямая, перпендикулярная касательной к плоской кривой и лежащая в одной плоскости с ней, называется (см. п. 17.3) нормалью к данной кривой.

Таким образом, градиент функции F коллинеарен нормали в соответствующей точке к кривой, задаваемой уравнением $F(x, y) = 0$.

В случае дифференцируемой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ ее градиентом называется вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

37.7. Производная по направлению

Частные производные от функции являются производными «в направлениях координатных осей». Естественно поставить вопрос об определении и вычислении производной по любому фиксированному направлению. Определим это понятие, рассмотрев этот вопрос на примере функций трех переменных.

Пусть, как всегда, в пространстве зафиксирована система координат x, y, z, заданы точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и ненулевой

вектор $\boldsymbol{l}$. Обозначим через $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{l}$. Как известно,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

и если $\boldsymbol{l}_0$ — единичный вектор в направлении вектора $\boldsymbol{l}$, то

$$\boldsymbol{l}_0 = \frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Проведем из точки M_0 луч в направлении вектора $\boldsymbol{l}$. Его уравнение в координатной форме имеет вид

$$x = x_0 + t\cos\alpha,\ \ y = y_0 + t\cos\beta,\ \ z = z_0 + t\cos\gamma,\ \ t \geqslant 0, \quad (37.43)$$

где параметр t равен расстоянию от точки M до точки M_0:

$$|M_0M| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} =$$

$$= t\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = t. \quad (37.44)$$

Пусть функция $f(M)$, где $M = (x, y, z)$, определена на некотором отрезке $[M_0, M_1]$ с концами в точках M_0 и M_1 рассматриваемого луча. Ее производная $\frac{\partial f}{dl}$ в точке M_0 в направлении вектора $\boldsymbol{l}$ определяется (рис. 26) равенством

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \boldsymbol{l}} \overset{\text{def}}{=} \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{|M_0M|}.$$

В силу равенств (37.43) и (37.44), это определение можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \boldsymbol{l}} = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta,\ z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}.$$

Таким образом, производная функции f в точке M_0 по направлению вектора $\boldsymbol{l}$ является производной справа сложной функции $f(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta,\ z_0 + t\cos\gamma)$ в точке $t = 0$:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \boldsymbol{l}} = \frac{d}{dt} f(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta,\ z_0 + t\cos\gamma)\big|_{t=0}. \quad (37.45)$$

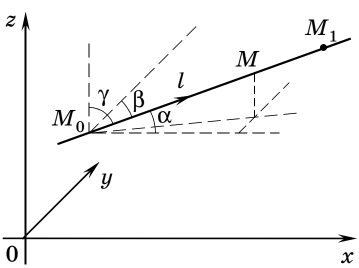


Рис. 26

Если функция $f(x, y, z)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и дифференцируема в этой точке, то, заметив, что

вдоль луча (37.43) $\frac{dx}{dt} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{dt} = \cos\beta$, $\frac{dz}{dt} = \cos\gamma$, и продифференцировав по t в точке $t = 0$ сложную функцию $f(x_0 + t\cos\alpha,$ $y_0 + t\cos\beta,\ z_0 + t\cos\gamma)$, получим

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \boldsymbol{l}} \underset{(37.45)}{=} \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma$$

или, короче, опустив обозначения аргумента,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (37.46)$$

Эта формула при сделанных предположениях имеет место для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{l}$. С ее помощью производная по направлению вектора $\boldsymbol{l}$ выражается через частные производные по координатам x, y, z и направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{l}$ с координатными осями.

Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0, z_0). Тогда в этой точке функция f имеет производную по любому направлению и эта производная находится по формуле* (37.46).

Любопытно отметить, что из полученной формулы (37.46) для производной по направлению сразу не видно, что эта производная не зависит от выбора системы координат. Эта независимость непосредственно следует из самого определения производной по направлению, откуда, в свою очередь, вытекает, что правая часть формулы (37.46) не зависит от выбора прямоугольной декартовой системы координат, а определяется только вектором $\boldsymbol{l}$.

Вектор с координатами $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}$, $\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}$ называется, как отмечалось выше, *градиентом* функции $f(M)$ в точке M_0 и обозначается $\operatorname{grad} f$. (Мы уже встречались с понятием градиента функций при рассмотрении кривых, заданных неявным образом; см. п. 37.6.)

Таким образом, если $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — координатные орты, то

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}. \qquad (37.47)$$

Часто оказывается удобно использовать символический вектор Гамильтона*

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

называемый *наблой*. Набла является обозначением определенной операции, которую следует произвести над той или иной функцией.

Для функции f, по определению, полагаем

$$\nabla f = \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Формально это равенство можно рассматривать как «произведение» вектора ∇ на число f. Итак, grad f и ∇f являются обозначениями одного и того же выражения.

Пусть теперь вектор $\boldsymbol{l}$ является единичным и, следовательно, $\boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. С помощью градиента формула для производной функции f по направлению вектора $\boldsymbol{l}$ запишется следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = \cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial f}{\partial z} = (\boldsymbol{l}, \operatorname{grad} f), \qquad (37.48)$$

где в правой части стоит скалярное произведение векторов $\boldsymbol{l}$ и grad f. Отсюда, поскольку $\boldsymbol{l}$ — единичный вектор,

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = |\operatorname{grad} f|\cos\varphi,$$

где φ — угол, образованный вектором $\boldsymbol{l}$ и grad f. Из этой формулы видно, что если в данной точке

$$|\operatorname{grad} f|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \neq 0,$$

то производная дифференцируемой функции по направлению достигает наибольшего значения в единственном направлении, а именно том, при котором $\cos\varphi = 1$, т. е. в направлении градиента. Из этого следует, что для заданной функции точки $f(M)$ градиент в каждой точке однозначно определяется самой функцией и не зависит от выбора системы координат, как это могло бы сначала показаться из формулы (37.47).

Действительно, прежде всего, если градиент равен нулю в одной декартовой системе координат, то он равен нулю и в каждой другой подобной системе координат. В самом деле,

* У. Гамильтон (1805—1865) — ирландский математик.

равенство нулю градиента в некоторой точке, согласно формуле (37.48), равносильно равенству нулю в этой точке производных по всем направлениям, последнее же не зависит от выбора декартовой системы координат, поскольку от этого выбора не зависит производная по направлению. Если же градиент не равен нулю, то его независимость от выбора декартовой системы координат следует непосредственно из доказанного выше его геометрического смысла: направление градиента показывает направление наибыстрейшего роста функции (оно единственно), а его величина равна производной в этом направлении.

Возьмем теперь любую непрерывно дифференцируемую кривую без особых точек, проходящих через точку (x_0, y_0, z_0), и такую, что вектор $\boldsymbol{l}$ является ее касательным вектором. Обозначим через s переменную длину дуги этой кривой, отсчитываемую от точки M_0 в таком направлении, чтобы вектор $\boldsymbol{l}$ давал положительное направление на касательной. Если $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ — представление этой кривой, то, как известно (см. п. 16.5), $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{ds} = \cos\beta$, $\frac{dz}{ds} = \cos\gamma$, т. е. справедливы те же формулы, что и для луча (37.43). Поэтому если взять производную в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от дифференцируемой функции $f(x, y, z)$ по данной кривой в направлении возрастания длины дуги s, т. е. производную по s сложной функции $f(x(s), y(s), z(s))$, $s \geqslant 0$, при $s = 0$, то для этой производной, если ее также обозначить через $\frac{\partial f}{\partial l}$, справедлива формула (37.46). Это означает, что производная в некоторой точке от функции вдоль кривой, проходящей через указанную точку, совпадает с производной по направлению касательной к кривой в той же точке.

Все сказанное переносится на функции любого числа n переменных ($n \geqslant 2$). Сформулируем лишь для этого случая определение производной по направлению.

Пусть в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ определена функция $f(x)$ и пусть $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ — точка этой окрестности, $x^{(1)} \neq x^{(0)}$.

Проведем прямую через точки $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$. Ее уравнение (см. (35.44) и (35.45)) имеет вид

$$x_i = x_i^{(0)} + t\cos\alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad -\infty < t < +\infty,$$

где $\cos \alpha_i$ — направляющие косинусы вектора

$$\boldsymbol{l} = (x_1^{(1)} - x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(1)} - x_n^{(0)}).$$

Рассмотрим функцию f только на точках этой прямой, т. е. рассмотрим функцию

$$f(x_1^{(0)} + t \cos \alpha_1, \ldots, x_n^{(0)} + t \cos \alpha_n).$$

Производная $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в точке $x^{(0)}$ в направлении точки $x^{(1)}$ или, что то же, в направлении вектора $\boldsymbol{l}$ определяется как производная $\frac{\partial f}{\partial t}$ от сложной функции

$$f(x_1^{(0)} + t \cos \alpha_1, \ldots, x_n^{(0)} + t \cos \alpha_n), \quad t \geqslant 0.$$

В том случае, если функция f дифференцируема в точке $x^{(0)}$, согласно формуле для производной сложной функции, в этой точке имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cos \alpha_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cos \alpha_n.$$

Вспоминая определение градиента функции n переменных (см. п. 37.6), с помощью скалярного произведения n-мерных векторов (см. (35.32)) формулу производной функции f по направлению вектора $\boldsymbol{l}$ для любого n-мерного пространства $\boldsymbol{R}^n$ можно записать в виде (37.48), т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = (\operatorname{grad} f, \boldsymbol{l}_0), \quad \text{где} \quad \boldsymbol{l}_0 = (\cos \alpha_1, \ldots, \cos \alpha_n) = \frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}.$$

В заключение отметим, что из того, что функция в некоторой точке имеет производные по всем направлениям, не следует, что функция в этой точке дифференцируема или даже непрерывна. Например, функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } y \neq x^2 \text{ или } x = y = 0, \\ 1, \text{ если } y = x^2 \text{ и } x^2 + y^2 > 0, \end{cases}$$

имеет в точке (0, 0) по любому направлению производную, равную нулю. Однако в точке (0, 0) функция f разрывна и тем более не дифференцируема (рис. 27).

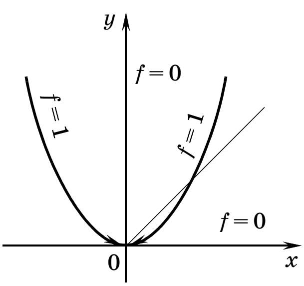


Рис. 27

37.8. Пример исследования функций двух переменных

С помощью частных производных можно изучать поведение функций многих переменных, подобно тому как исследовалось поведение функции одной переменной с помощью ее производной. Вопрос отыскания наибольших и наименьших значений рассмотрен в § 40 и § 43, здесь же ограничимся одним примером изучения функции двух переменных, с помощью которого получим еще одно доказательство установленного в п. 28.2* числового неравенства (28.17). Напомним его.

Пусть $p > 1$ и число q определяется равенством

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{37.49}$$

Тогда для любых чисел $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{37.50}$$

Прежде всего отметим, что уравнение (37.49), связывающее числа p и q, равносильно соотношению

$$(p-1)(q-1) = 1, \tag{37.51}$$

которое эквивалентно условию

$$q = \frac{p}{p-1}. \tag{37.52}$$

Это устанавливается непосредственной проверкой.

Для доказательства неравенства (37.50) рассмотрим функцию

$$F(x, y) = xy - \frac{x^p}{p} - \frac{y^q}{q}, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0. \tag{37.53}$$

Вычислим ее частные производные:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y - x^{p-1}, \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x - y^{q-1}. \tag{37.54}$$

Из (37.51) следует, что при $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ уравнения

$$y - x^{p-1} = 0 \tag{37.55}$$

и

$$x - y^{q-1} = 0 \tag{37.56}$$

равносильны. Таким образом, точки (x, y), удовлетворяющие как условию $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 0$, так и условию $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0$, лежат на кривой (37.55) или, что то же, на кривой (37.56).

В силу (37.49) и (37.52), вдоль кривой (37.55) имеем

$$F(x,\ x^{p-1}) = x^p - \frac{x^p}{p} - \frac{x^{(p-1)q}}{q} = x^p - \frac{x^p}{p} - \frac{x^p}{q} =$$

$$= x^p\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = 0. \qquad (37.57)$$

Обозначим теперь через G^+ множество всех точек, расположенных выше кривой (37.55) и на самой кривой:

$$G^+ \overset{\text{def}}{=} \{(x,\ y) : y \geqslant x^{p-1}, \quad x \geqslant 0\},$$

а через G^- — множество всех точек первой координатной четверти (включая и точки оси Ox), лежащих ниже этой кривой и на ней самой:

$$G^- \overset{\text{def}}{=} \{(x,\ y); \quad 0 \leqslant y \leqslant x^{p-1}, \quad x \geqslant 0\}.$$

Согласно формулам (37.54), при $(x,\ y) \in G^+$, $y \neq x^{p-1}$ имеем $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} > 0$, а при $(x,\ y) \in G^-$, $y \neq x^{p-1}$, соответственно $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} > 0$ (здесь использована эквивалентность уравнений (37.55) и (37.56)). Поэтому вдоль любого отрезка, лежащего на множестве G^+ и параллельного оси Ox (рис. 28), функция $F(x,\ y)$ строго возрастает. Следовательно, если $(x,\ y) \in G^+$, $y \neq x^{p-1}$, то (см. (37.57))

$$F(x,\ y) < F(x,\ x^{p-1}) = 0.$$

Аналогично, на любом отрезке, лежащем на множестве G^- и параллельном оси Oy, функция $F(x,\ y)$ также строго возрастает. Поэтому если $(x,\ y) \in G^-$ и $y \neq x^{p-1}$, то опять

$$F(x,\ y) < F(x,\ x^{p-1}) = 0.$$

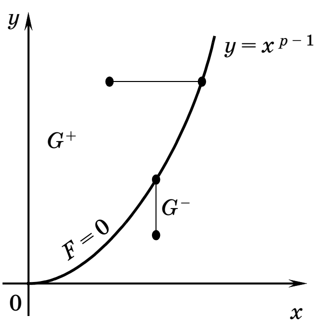


Рис. 28

Таким образом, если $y \neq x^{p-1}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, то всегда $F(x,\ y) < 0$. Итак, вспоминая вид функции F (см. (37.53)), имеем: если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{при } b \neq a^{p-1},$$

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{при } b = a^{p-1}.$$

Тем самым неравенство (37.50) доказано.

§ 38

Частные производные и дифференциалы высших порядков

38.1. Частные производные высших порядков

Пусть задана функция $f(x, y)$. Тогда каждая из ее частных производных (если они, конечно, существуют) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, которые называются также *частными производными первого порядка*, снова является функцией независимых переменных x, y и может, следовательно, также иметь частные производные. Частная производная $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ обозначается через $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ или f_{xx}, а $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ через $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ или f_{xy}. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

и, аналогично,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

Производные f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} и f_{yy} называются *частными производными второго порядка*. Рассматривая частные производные от них, получим всевозможные частные производные третьего порядка: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$ и т. д.

Аналогично определяются частные производные произвольного порядка и для функций любого числа переменных.

Определение 1. *Частная производная (по любой из независимых переменных) от частной производной порядка $m - 1$, $m = 1, 2, \ldots$,*[*] *называется частной производной порядка m.*

Частная производная, полученная дифференцированием по различным переменным, называется смешанной частной производной. Частная же производная, полученная дифференцированием только по одной переменной, называется чистой частной производной.

---

[*] *Частной производной нулевого порядка* для удобства обозначений считают саму функцию.

Число различных производных при увеличении m, очевидно, возрастает, однако оказывается, что при определенных предположениях многие из них совпадают, а именно смешанные частные производные по одним и тем же переменным не зависят от порядка дифференцирования.

Более точно имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция $f(x, y)$ определена вместе со своими частными производными f_x, f_y, f_{xy} и f_{yx} в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), причем f_{xy} и f_{yx} непрерывны в этой точке; тогда*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \tag{38.1}$$

Доказательство. Пусть функция $f(x, y)$ определена вместе с производными f_x, f_y, f_{xy} и f_{yx} в δ-окрестности точки (x_0, y_0), и пусть Δx и Δy фиксированы так, что $\Delta x^2 + \Delta y^2 < \delta^2$. Будем обозначать, как и раньше (см. п. 37.1), символом Δ_x, соответственно Δ_y, приращение функции f по аргументу x, соответственно y, в точке (x_0, y_0)*. Введем обозначения $\Delta_{xy}f = \Delta_x(\Delta_y f)$, $\Delta_{yx}f = \Delta_y(\Delta_x f)$ и покажем, что

$$\Delta_{xy} = \Delta_{yx}f. \tag{38.2}$$

Действительно,

$$\Delta_{xy}f = \Delta_x(\Delta_y f) = \Delta_x[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - \\ - f(x_0 + \Delta x, y_0)] - [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]; \tag{38.3}$$

аналогично

$$\Delta_{yx}f = \Delta_y(\Delta_x f) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] - \\ - [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)]. \tag{38.4}$$

Сравнивая (38.3) и (38.4), убеждаемся в справедливости соотношения (38.2).

Положим теперь $\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)$; тогда (38.3) можно переписать в виде

$$\Delta_{xy}f = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0).$$

---

* Напомним (см. п. 37.1), что для заданной функции $F(x, y)$ ее приращения Δ_x и Δ_y в данной точке (x_0, y_0) определяются по формулам

$$\Delta_x F(x_0, y_0) = F(x_0 + \Delta x, y_0) - F(x_0, y_0),$$

$$\Delta_y F(x_0, y_0) = F(x_0, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0).$$

В силу того что в рассматриваемой окрестности точки (x_0, y_0) существует частная производная f_x, функция $\varphi(x)$ дифференцируема на отрезке с концами в точках x_0 и $x_0 + \Delta x$. Из теоремы Лагранжа о конечных приращениях следует, что

$$\Delta_{xy}f = \varphi'(x_0 + \theta_1\Delta x)\Delta x, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Но $\varphi'(x) = f_x(x, y_0 + \Delta y) - f_x(x, y_0)$, поэтому

$$\Delta_{xy}f = [f_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0)]\Delta x.$$

Применяя еще раз ту же теорему о конечных приращениях, но теперь уже по переменной y, имеем

$$\Delta_{xy}f = f_{xy}(x + \theta_1\Delta x, y_0 + \theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y,$$
$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1. \qquad (38.5)$$

Аналогично, полагая $\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)$, имеем

$$\Delta_{yx}f = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) = \psi'(y_0 + \theta_3\Delta y)\Delta y =$$
$$= [f_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_3\Delta y) - f_y(x_0, y_0 + \theta_3\Delta y)]\Delta y =$$
$$= f_{yx}(x_0 + \theta_4\Delta x, y_0 + \theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y, \quad 0 < \theta_3 < 1, \quad 0 < \theta_4 < 1. \quad (38.6)$$

Согласно (38.2), левые части равенства (38.5) и (38.6) равны между собой, значит, равны и правые; приравнивая их и сокращая на $\Delta x\Delta y$ при $\Delta x \neq 0$ и $\Delta y \neq 0$, получаем

$$f_{xy}(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \theta_2\Delta y) = f_{yx}(x_0 + \theta_4\Delta x, y_0 + \theta_3\Delta y),$$
$$0 < \theta_i < 1, \quad i = 1, 2, 3, 4. \qquad (38.7)$$

В силу непрерывности частных производных f_{xy} и f_{yx} в точке x_0, y_0, переходя в (38.7) к пределу при $\Delta x^2 + \Delta y^2 \to 0$, получаем (38.1). □

З а м е ч а н и е 1. Из доказанной теоремы по индукции следует, что если у функции n переменных смешанные частные производные m-го порядка непрерывны в некоторой точке, а производные низших порядков непрерывны в ее окрестности, то производные порядка m в этой точке не зависят от порядка дифференцирования. Это следует из того, что любые две последовательности дифференцирования, отличающиеся только порядком дифференцирования (т. е. такие, что по каждому фиксированному аргументу они содержат одно и то же суммарное число дифференцирований), можно перевести одну в другую конечным числом шагов, при каждом из которых меняется порядок дифференцирования только по двум переменным, а дру-

гие остаются фиксированными. Таким образом, при каждом шаге фактически рассматривается изменение порядка дифференцирования у функции лишь двух переменных, а в этом случае выполняются условия доказанной выше теоремы. Тем самым общий случай и сводится к случаю функций двух переменных.

Поясним это на примере. Докажем, например, что $f_{xyz} = f_{zyx}$. Согласно сказанному выше, последовательно имеем

$$f_{xyz} = (f_x)_{yz} = (f_x)_{zy} = (f_{xz})_y = (f_{zx})_y = (f_z)_{xy} = (f_z)_{yx} = f_{zyx}.$$

З а м е ч а н и е 2. В заключение этого пункта отметим, что на первый взгляд доказанная теорема может показаться не очень содержательной: для того чтобы судить о том, имеет ли место равенство $f_{xy} = f_{yx}$, надо, согласно этой теореме, проверить непрерывность функций f_{xy} и f_{yx}, а для этого надо, казалось бы, их знать, но если они уже известны, то без всякой теоремы можно сказать, равны они или нет. Тем не менее теорема 1 все-таки содержательна. Дело в том, что о непрерывности функции можно иногда судить на основании некоторых общих теорем, не прибегая к конкретному вычислению и исследованию самой функции. Так, все элементарные функции многих переменных непрерывны в своей области определения (см. п. 36.5). С другой стороны, частные производные элементарных функций сами являются элементарными, поэтому если, например, частная производная некоторой элементарной функции определена на некоторой окрестности какой-либо точки, то эта производная и непрерывна в каждой точке указанной окрестности.

Задача 8. Доказать, что если функция $f(x, y)$ определена вместе со своими частными производными f_x, f_y и f_{xy} в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), причем частная производная f_{xy} непрерывна в точке (x_0, y_0), то в этой точке существует частная производная f_{yx} и $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$.

Функция, имеющая в некоторой точке (на некотором открытом множестве) непрерывные частные производные всех порядков до некоторого порядка m включительно, называется *m раз непрерывно дифференцируемой* в этой точке (на этом множестве).

Заметим, что, для того чтобы функция имела в точке (на открытом множестве) непрерывные частные производные всех порядков до некоторого порядка m включительно, достаточно, чтобы она имела в этой точке (на этом множестве) непрерывные частные производные порядка m. Действительно, из непрерывности всех частных производных порядка m в точке (на

открытом множестве), согласно следствию из теоремы 3 в п. 37.2, вытекает непрерывность всех частных производных порядка $m - 1$ в рассматриваемой точке (на рассматриваемом множестве). Из непрерывности же частных производных порядка $m - 1$ вытекает (в случае $m > 1$) непрерывность частных производных порядка $m - 2$ и т. д.

38.2. Дифференциалы высших порядков

Функция от $2n$ переменных $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, или, что то же, от упорядоченной пары (x, y) точек n-мерного пространства $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ вида

$$A(x, y) = A(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k,$$

где a_{ik} — заданные числа ($i, k = 1, 2, \dots, n$), называется *билинейной формой* от x и y. Это название объясняется тем, что если одну из точек x и y зафиксировать, то функция будет линейной относительно координат оставшейся точки.

Функция $A(x, x)$ называется *квадратичной формой*, соответствующей данной билинейной форме $A(x, y)$:

$$A(x, x) = A(x_1, \dots, x_n; x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k.$$

В случае, когда $a_{ik} = a_{ki}$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, билинейная форма $A(x, y)$ называется *симметричной*.

Так, например, скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ n-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$

$$\boldsymbol{xy} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

является симметричной билинейной формой точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, а квадрат длины вектора $|\boldsymbol{x}|$ — соответствующей ей квадратичной формой

$$|\boldsymbol{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

В дальнейшем для удобства изложения будем обозначать дифференциалы не только символом d, но и символом δ, например писать не только $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$, но и $\delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\delta y$, причем дифференциал какой-либо функции будем называть также и ее первым дифференциалом.

Пусть функция $z = z(x, y)$ имеет непрерывные первые и вторые частные производные на некотором открытом плоском множестве G (такие функции, согласно определению предыдущего пункта, называются дважды непрерывно дифференцируемыми на множестве G). Из непрерывности на множестве G частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следует, как мы знаем (см. теорему 3 в п. 37.2), дифференцируемость самой функции $z(x, y)$ в каждой точке этого множества. Таким образом, для всех точек $(x, y) \in G$ определен дифференциал

$$dz = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\, dy.$$

Согласно сделанным предположениям, частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ имеют на открытом множестве непрерывные частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

поэтому, в силу той же теоремы 3 из п. 37.2, $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ также дифференцируемы на множестве G. Поэтому дифференциал dz, рассматриваемый как функция только переменных x и y, в свою очередь является дифференцируемой на множестве G функцией. Вычислим дифференциал от первого дифференциала dz, считая dx и dy фиксированными, а точку (x, y) — принадлежащей области G: $(x, y) \in G$, при этом новое дифференцирование обозначим символом δ:

$$\delta(dz) = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy\right) = \left(\delta\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(\delta\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}\,\delta y\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\,\delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\delta y\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dx\, \delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}(dx\, \delta y + \delta x\, dy) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dy\, \delta y.$$

Обратим внимание на то, что непрерывность вторых производных была использована не только для того, чтобы проведенные вычисления имели смысл $\Big($т. е. для того, чтобы во всех рассматриваемых точках существовали дифференциалы $\delta\,\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\delta\,\frac{\partial z}{\partial y}\Big)$, но и для того, чтобы в процессе вычислений не обращать внимания на порядок дифференцирования. Действительно, было показано (см. п. 38.1), что в случае непрерывности сме-

шанных частных производных $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ они совпадают, поэтому для их обозначения может быть использован один и тот же символ, что и было сделано при указанных вычислениях.

В результате получилась симметричная билинейная форма переменных dx, dy, δx, δy. Полагая $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, получим соответствующую ей квадратичную форму, которая и называется *вторым дифференциалом* функции $z = z(x, y)$ в данной точке $(x, y) \in G$ и обозначается $d^2 z$.

Таким образом, мы пришли к следующему определению.

Определение 2. *Вторым дифференциалом $d^2 z$ функции $z = f(x, y)$ в данной точке называется квадратичная форма от дифференциалов dx и dy независимых переменных, соответствующая билинейной форме дифференциала от первого дифференциала, т. е.*

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2. \tag{38.8}$$

На практике при конкретном вычислении дифференциалов обычно совмещаются оба шага — вычисление дифференциала от дифференциала $\delta(dz)$ и приравнивание дифференциалов аргументов при последовательных дифференцированиях: $\delta x = dx$, $\delta y = dy$. Например, пусть $z = x^3 \cos^2 y$ и требуется найти $d^2 z$.

Последовательно имеем:

$$dz = 3x^2 \cos^2 y\,dx - x^3 \sin 2y\,dy,$$

$$d^2 z = 6x \cos^2 y\,dx^2 - 3x^2 \sin 2y\,dx\,dy - 3x^2 \sin 2y\,dx\,dy -$$

$$- 2x^3 \cos 2y\,dy^2 = 6x \cos^2 y\,dx^2 - 6x^2 \sin 2y\,dx\,dy - 2x^3 \cos^2 2y\,dy^2.$$

Аналогичным образом при непрерывности частных производных третьего порядка можно вычислить и дифференциал от второго дифференциала $\delta(d^2 z)$, после чего, полагая $\delta x = dx$ и $\delta y = dy$, мы получим по определению третий дифференциал. По индукции определяется и дифференциал $(m + 1)$-го порядка $d^{m+1} z$, $m = 1, 2, \ldots$. Именно, чтобы в предположении непрерывности у рассматриваемой функции $z(x, y)$ всех ее частных производных до порядка $m + 1$ включительно на некотором открытом множестве получить ее дифференциал $d^{m+1} z$, надо взять дифференциал от дифференциала $d^m z$ порядка m: $\delta(d^m z)$ и положить $\delta x = dx$, $\delta y = dy$. При этом для дифференциалов порядка $m = 1, 2, \ldots$ справедлива формула

$$d^m z = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m z}{\partial x^{m-k} \partial y^k}\,dx^{m-k}\,dy^k, \tag{38.9}$$

ее обычно символически записывают с помощью «символической» степени $\{m\}$ (см. п. 10.2) в следующем виде, более удобном для запоминания:

$$d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^{\{m\}} f(x, y). \qquad (38.10)$$

Докажем формулу (38.9) по индукции. При $m = 1$ она, очевидно, верна. Пусть она справедлива при некотором m, покажем ее справедливость при $m + 1$. Имеем

$$\delta(d^m z) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left(\frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m-k+1} \partial y^k}\,\delta x\, dx^{m-k}\, dy^k + \frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m-k} \partial y^{k+1}}\, dx^{m-k}\,\delta y\, dy^k\right).$$

Положим $\delta x = dx$ и $\delta y = dy$; тогда

$$d^{m+1} z = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m-k+1} \partial y^k}\, dx^{m-k+1}\, dy^k +$$

$$+ \sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m-p} \partial y^{p+1}}\, dx^{m-p}\, dy^{p+1}.$$

Заменим во второй сумме индекс суммирования p на $k - 1$ и заметим, что $C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k$; окончательно получим

$$d^{m+1} z = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m-k+1} \partial y^k}\, dx^{m-k+1}\, dy^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} \frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m-k+1} \partial y^k}\, dx^{m-k+1}\, dy^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1-k} \partial y^k}\, dx^{m+1-k}\, dy^k. \ \square$$

З а м е ч а н и е. Следует иметь в виду, что, как и в случае функций одного переменного, для функций большего числа переменных дифференциалы порядка выше первого не обладают свойством инвариантности формы записи относительно выбора переменных. Например, для сложной функции $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, второй дифференциал функции f, записанный через дифференциалы переменных x и y, уже не будет, вообще говоря, иметь вид (38.8), а, как правило, выглядит сложнее. Чтобы в этом убедиться, вычислим в рассматриваемом случае второй дифференциал функции $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. В силу инвариантности формы первого дифференциала, имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy.$$

Далее вычислим дифференциал $\delta(dz)$, считая, что $\delta u = du$, $\delta v = dv$. Использовав инвариантность формы первого диффе-

ренциала относительно выбора переменных при вычислении $\delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ и $\delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, имеем

$$\delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\delta x+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\,\delta y,$$

$$\delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,\delta x+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\delta y;$$

заметив, что дифференциал $\delta(dx)$ является дифференциалом функции и, значит, вообще говоря, не нуль, получим

$$d^2z=\delta(dz)\Big|_{\substack{\delta u=du\\ \delta v=dv}}=\delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)\Big|_{\substack{\delta u=du\\ \delta v=dv}}=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2+\frac{\partial z}{\partial x}\,d^2x+\frac{\partial z}{\partial y}\,d^2y.$$

На практике и в этом случае обе операции: вычисление дифференциалов и приравнивание дифференциалов $\delta u=du$, $\delta v=dv$ — выполняют одновременно, т. е. запись $\delta(dz)\Big|_{\substack{\delta x=dx\\ \delta y=dy}}$ считается равноправной записи $d(dz)$.

Все сказанное, в частности определение дифференциалов высших порядков, естественным образом переносится на функции большего числа переменных. Отметим, что дифференциал m-го порядка от функций n переменных $y=y(x_1,\ \dots\ ,x_n)$ имеет вид

$$d^m y=\sum_{m_1+\dots+m_n=m}\frac{m!}{m_1'\,\dots\,m_n!}\,\frac{\partial^m y}{\partial y_1^{m_1}\dots\partial y_n^{m_n}}dx_1^{m_1}\dots dx_n^{m_n},$$

или в символической записи

$$d^m y=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1+\dots+\frac{\partial}{\partial x_n}\,dx\right)^{\{m\}}y(x_1,\ \dots\ ,x_n). \qquad (38.11)$$

Доказывается эта формула аналогично формуле (38.10).

§ 39

Формула Тейлора и ряд Тейлора для функций многих переменных

39.1. Формула Тейлора для функций многих переменных

Если функция многих переменных имеет достаточное число непрерывных производных в окрестности некоторой точки, то эту функцию в указанной окрестности можно (подобно тому, как это было сделано для функций одного переменного) представить в виде суммы некоторого многочлена и остатка, который «мал» в определенном смысле.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка m включительно ($m \geqslant 1$) в некоторой δ-окрестности точки (x_0, y_0). Тогда для всех Δx и Δy, удовлетворяющих условию $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$, существует такое $\theta = \theta(\Delta x, \Delta y)$, $0 < \theta < 1$, что справедлива формула*

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{3\}} f(x_0, y_0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(m-1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m-1\}} f(x_0, y_0) + r_{m-1}(\Delta x, \Delta y),$$

или, короче,

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(x_0, y_0) + r_{m-1}(\Delta x, \Delta y), \qquad (39.1)$$

где

$$r_{m-1}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{m!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m\}} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y). \qquad (39.2)$$

Формула (39.1) называется *формулой Тейлора* (порядка $m - 1$) для функции f.

Пусть $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Многочлен

$$P_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(x_0, y_0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

называется *многочленом Тейлора* степени n функции f в точке (x_0, y_0), разность $f(x, y) - P_n(x, y)$ — остаточным членом $r_n(x, y)$ формулы Тейлора. Таким образом, формула Тейлора (39.1) имеет вид

$$f(x, y) = P_{m-1}(x, y) + r_{m-1}(x, y).$$

Запись $r_{m-1}(\Delta x, \Delta y)$ в виде (39.2) называется остаточным членом формулы Тейлора в *форме Лагранжа*.

При $m = 1$ в (39.1) требует разъяснения смысл первого члена правой части, поскольку в этом случае верхний индекс суммирования равен нулю. В этом случае, по определению, полагается, что этот член равен нулю, т. е. что формула (39.1) имеет вид

$$\Delta z = r_0(\Delta x, \Delta y).$$

В дальнейшем всегда, когда встретится выражение, записанное с помощью символа Σ, у которого значение верхнего индекса суммирования меньше значения нижнего индекса, будем также считать, что это выражение равно нулю.

Доказательство. Пусть Δx и Δy зафиксированы так, что $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$; тогда все точки вида $(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, лежат на отрезке, соединяющем точки (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, и поэтому все они принадлежат δ-окрестности точки (x_0, y_0). Вследствие этого имеет смысл композиция функций $z = f(x, y)$ и $x = x_0 + t\Delta x$, $y = y_0 + t\Delta y$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, т. е. сложная функция

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{39.3}$$

Очевидно, что

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0). \tag{39.4}$$

Поскольку функция f имеет в δ-окрестности точки (x_0, y_0) m непрерывных частных производных, согласно теореме о производных сложной функции (см. п. 37.3), функция F также имеет на отрезке $[0, 1]$ m непрерывных производных и поэтому для нее справедлива формула Тейлора порядка $m - 1$ с остаточным членом в форме Лагранжа

$$F(t) - F(0) = F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}t^{m-1} + \frac{F^{(m)}(\theta t)}{m!}t^m,$$
$$0 < \theta < 1, \tag{39.5}$$

и в рассматриваемой окрестности точки (x_0, y_0) функцию (39.3) можно m раз продифференцировать по правилу дифференцирования сложной функции (см. замечание 2 в п. 37.4), причем значения получающихся смешанных частных производных не зависят от порядка дифференцирования (см. п. 38.1).

Выразив производные $F^{(k)}(t)$ через производные функции $f(x, y)$ и положив в формуле (39.5) $t = 1$ (см. (39.4)), получим требуемую формулу Тейлора для функции $f(x, y)$. Действительно, из (39.3) следует, что

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial y}\Delta y.$$

Отсюда для $F''(t)$, опустив для краткости обозначения аргументов, получим

$$F''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2.$$

Вообще по индукции легко установить, что

$$F^{(k)}(t) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(x_0 + t\Delta x,\ y_0 + t\Delta x),$$

$$k = 1, 2, \dots, m. \qquad (39.6)$$

Положив в формулах (39.6) $t = 0$ при $k = 1, 2, \dots, m - 1$, будем иметь

$$F'(0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y;$$

$$F''(0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\,\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2,$$

и вообще

$$F^{(k)}(0) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(x_0, y_0), \quad k = 1, 2, \dots, m - 1. \qquad (39.7)$$

При $k = m$, заменив t на θt, получим

$$F^{(m)}(\theta t) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m\}} f(x_0 + \theta t\Delta x,\ y_0 + \theta t\Delta y). \qquad (39.8)$$

Подставим теперь (39.7) и (39.8) в (39.5) и положим $t = 1$; тогда, в силу соотношения (39.4), получим

$$\Delta z = F(1) - F(0) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(m)}(\theta)}{m!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{m!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m\}} f(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y), \quad 0 < \theta < 1. \ \square$$

СЛЕДСТВИЕ. *В предположениях теоремы* 1 *справедлива формула*

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(x_0, y_0) + r_m(\Delta x, \Delta y), \qquad (39.9)$$

причем остаточный член $r_m(\Delta x, \Delta y)$ *может быть записан как в виде*

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)\Delta x^k \Delta y^{m-k}, \qquad (39.10)$$

где

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

так и в виде

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho^m, \qquad (39.11)$$

где $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$, *т. е.*

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = o(\rho^m),\ \rho \to 0. \qquad (39.12)$$

Представление остаточного члена формулы Тейлора в форме (39.12) называется его записью в *форме Пеано*.

Доказательство. Положим

$$\varepsilon_k'(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial^m f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} - \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^{m-k}}. \qquad (39.13)$$

В силу непрерывности всех частных производных порядка m, имеем $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_k'(\Delta x, \Delta y) = 0$.

Преобразуем остаток $r_{m-1}(\Delta x, \Delta y)$ (см. (39.2)), использовав выражение (39.13), следующим образом:

$$r_{m-1}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \Delta x^k \Delta y^{m-k} =$$

$$= \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \Delta x^k \Delta y^{m-k} + \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m} C_m^k \varepsilon_k'(\Delta x, \Delta y) \Delta x^k \Delta y^{m-k} =$$

$$= \frac{1}{m!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m\}} f(x_0, y_0) + \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) \Delta x^k \Delta y^{m-k}, \qquad (39.14)$$

где $\varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = \frac{C_m^k}{m!}\varepsilon_k'(\Delta x, \Delta y)$, поэтому

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = 0. \qquad (39.15)$$

Подставляя (39.14) в (39.1), получим формулу Тейлора (39.9) с остаточным членом в виде (39.10).

Покажем, что остаточный член (39.10) можно записать в виде (39.11). Для этого положим

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)\left(\frac{\Delta x}{\rho}\right)^k \left(\frac{\Delta y}{\rho}\right)^{m-k}. \qquad (39.16)$$

Тогда

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) \Delta x^k \Delta y^{m-k} =$$

$$= \rho^m \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)^k \left(\frac{\Delta x}{\rho}\right)^k \left(\frac{\Delta y}{\rho}\right)^{m-k} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho^m,$$

и так как $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| \leqslant 1$ и $\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \leqslant 1$, то из (39.15) следует, что

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0. \ \square$$

Используя понятие дифференциалов высших порядков, формуле Тейлора для функций двух переменных можно придать более компактную форму, внешне идентичную формуле Тейлора для функций одной переменной, записанной также с помощью дифференциалов. В самом деле, так как (см. п. 38.2)

$$d^k f(x, y) = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(x, y), \quad k = 0, 1, 2, \dots, m,$$

то, полагая для краткости $M_0 = (x_0, y_0)$ и $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, формулу (39.9) можно записать в виде

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(M_0) + r_m(M). \qquad (39.17)$$

Эта форма записи формулы Тейлора наиболее проста и поэтому удобна для запоминания.

Сделаем несколько замечаний к доказательствам теоремы 1 и ее следствия. Прежде всего в условиях этой теоремы было потребовано, чтобы функция f имела непрерывные производные до порядка m включительно в некоторой δ-окрестности точки (x_0, y_0). Можно было бы потребовать непрерывность в указанной окрестности т о л ь к о производных порядка m, поскольку из их непрерывности вытекает и непрерывность в этой окрестности всех младших производных данной функции, т. е. производных порядков $k = 0, 1, \dots, m - 1$ (см. п. 37.2).

Подчеркнем, что непрерывность частных производных в δ-окрестности точки (x_0, y_0) была использована, во-первых, для того чтобы встречающиеся частные производные не зависели от порядка дифференцирования (это было использовано как при доказательстве формулы Тейлора (39.1), так и в самой форме записи этой формулы), и, во-вторых, для того чтобы функцию (39.3) можно было m раз дифференцировать по правилу дифференцирования сложной функции. Обратим внимание на то, что при $m = 1$ смешанные производные отсутствуют; для возможности же один раз дифференцировать функцию (39.3) по правилу сложной функции, следовательно, и для справедливости теоремы 1 достаточно более слабого предположения о рассматриваемой функции f. Именно, вместо предположения о непрерывной дифференцируемости в вы-

шеуказанной δ-окрестности точки (x_0, y_0) функции f достаточно ее дифференцируемости в этой окрестности (см. определения 2 и 4 в п. 37.2).

Непрерывность частных производных порядка m (в точке (x_0, y_0)) использована также при доказательстве следствия теоремы 1: она нужна для того, чтобы функции $\varepsilon'_k(\Delta x, \Delta y)$, определенные формулами (39.13), стремились к нулю при $\rho \to 0$.

Подчеркнем еще, что при сделанных предположениях в формуле (39.9) доказано, что $r_m(\Delta x, \Delta y) = o(\rho^m)$ при $\rho \to 0$ не в смысле предела по любому фиксированному направлению, как может показаться на первый взгляд из приведенного доказательства, а в более сильном смысле — в смысле предела в точке (x_0, y_0) (почему?).

Формулу (39.1) можно несколько обобщить, если не стремиться к тому, чтобы она была справедливой для всех точек $(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y)$ δ-окрестности точки (x_0, y_0), а рассматривать эту формулу лишь при фиксированных Δx и Δy. Именно, если функция f определена и имеет непрерывные частные производные порядка m на открытом множестве, содержащем отрезок с концами (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, то формула (39.1) также остается справедливой вместе с ее доказательством. Из этого следует, что если функция f определена в выпуклой области G (см. п. 14.2) и имеет в G непрерывные частные производные порядка m, то для любых двух точек $(x_0, y_0) \in G$ и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in G$ справедлива формула Тейлора (39.1).

Все сказанное переносится и на случай функции любого числа переменных.

ТЕОРЕМА 1′. *Если функция n переменных* $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ *определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка* m, $m \geqslant 1$, *включительно в некоторой δ-окрестности точки* $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(n)})$, *то справедлива формула*

$$\Delta y = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{k\}} f(x^{(0)}) + r_{m-1}(\Delta x), \qquad (39.18)$$

где

$$r_{m-1}(\Delta x)=\frac{1}{m!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{m\}}f(x_1^{(0)}+\theta\Delta x_1,\ \ldots\ ,x_n^{(0)}+\theta\Delta x_n),$$

$$0<\theta<1,\quad \Delta x=(\Delta x_1,\ \ldots\ ,\Delta x_n),\qquad (39.19)$$

а также формула

$$\Delta y=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{k\}}f(x^{(0)})+r_m(\Delta x),\qquad (39.20)$$

где $r_m(\Delta x)$ *можно записать как в виде*

$$r_m(\Delta x)=\sum_{m_1+\ldots+m_n=m}\varepsilon_{m_1\ldots m_n}(\Delta x)\Delta x_1^{m_1}\ldots\Delta x_n^{m_n},\qquad (39.21)$$

где $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_{m_1\ldots m_n}(\Delta x)=0$, $\rho=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}$, *так и в виде*

$$r_m(\Delta x)=\varepsilon(\Delta x)\rho^m,\quad \lim_{\rho\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0,\qquad (39.22)$$

т. е.

$$r_m(\Delta x)=o(\rho^m),\quad \rho\to 0.$$

Наконец, через дифференциалы формулу (39.20) *можно записать в виде*

$$\Delta y=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}d^kf(x^{(0)})+r_m(\Delta x).\qquad (39.23)$$

Раскроем теперь скобки в формулах (39.18) и (39.19), воспользовавшись алгебраической формулой

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_i\right)^k=\sum_{k_1+\ldots+k_n=k}\frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}a_1^{k_1}a_2^{k_2}\ldots a_n^{k_n}.$$

Для того чтобы короче записать результат, введем новые обозначения. Положим $k=(k_1,\ \ldots,\ k_n)$, $|k|=k_1+\ldots+k_m$, $k!=k_1!\ldots k_n!$,

$$f^{(k)}=\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}},\quad (x-x^{(0)})^k=(x_1-x_1^{(0)})^{k_1}\ldots(x_n-x_n^{(0)})^{k_n};$$

$k=(k_1,\ \ldots\ ,k_n)$ называется *мультииндексом*.

В этих обозначениях формула Тейлора (39.18) с остаточным членом в виде (39.19) перепишется в виде

$$f(x)=\sum_{|k|<m}\frac{f^{(k)}(x^{(0)})}{k!}(x-x^{(0)})^k+\sum_{|k|=m}\frac{f^{(k)}(x^{(0)}+\theta(x-x^{(0)}))}{k!}(x-x^{(0)})^k.$$

Здесь, как всегда, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ и

$$x^{(0)} + \theta(x - x^{(0)}) = (x_1^{(0)} + \theta(x_1 - x_1^{(0)}), \ldots, x_n^{(0)} + \theta(x_n - x_n^{(0)})).$$

В этом виде формула Тейлора для функций любого числа переменных выглядит так же, как и для функций одной переменной.

Иногда, особенно в случае функций многих переменных, для производных используют обозначение

$$D^k \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}},$$

где $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс. Если пользоваться этой символикой, то формула Тейлора принимает вид

$$f(x) = \sum_{|k| < m} \frac{1}{k!} D^k f(x^{(0)})(x - x^{(0)})^k +$$

$$+ \sum_{|k| = m} \frac{1}{k!} D^k f(x^{(0)} + \theta(x - x^{(0)}))(x - x^{(0)})^k, \quad 0 < \theta < 1.$$

Покажем единственность представления функции f в виде

$$f(x + \Delta x) = P_m(\Delta x) + o(\rho^m), \quad \rho \to 0, \tag{39.24}$$

где

$$P_m(\Delta x) = \sum_{|k| = 0}^{m} a_k \Delta x^k \tag{39.25}$$

— многочлен степени не выше m от n переменных $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$.

ЛЕММА. *Если многочлен*

$$P_m(x) = \sum_{|k| = 0}^{m} a_k x^k,$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x^k = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}, \quad k = (k_1, \ldots, k_n),$$

тождественно равен нулю:

$$P_m(x) \equiv 0 \tag{39.26}$$

в некоторой окрестности нуля, то все его коэффициенты равны нулю.

Доказательство. Из (39.26) следует, что для любого $k = (k_1, \ldots, k_n)$ имеет место равенство $P_m^{(k)}(0) = 0$. Но если $0 \leqslant |k| \leqslant m$,

то $P_m^{(k)}(0) = k!\, a_k$. Из двух последних равенств следует, что для всех k таких, что $0 \leqslant |k| \leqslant m$, выполняются равенства $a_k = 0$. □

ТЕОРЕМА 2. *Если функция f задана в окрестности точки x, то ее представление в виде* (39.24) *единственно.*

Доказательство. Пусть число $\delta > 0$ выбрано таким образом, что для всех Δx, $|\Delta x| < \delta$, у функции f наряду с представлением (39.24) имеет место представление

$$f(x + \Delta x) = \sum_{|k| = 0}^{m} b_k \Delta x^k + o(\rho^m), \quad \rho \to 0. \tag{39.27}$$

Тогда, положив

$$c_k = b_k - a_k, \ |k| = 0, 1, \ldots, m, \tag{39.28}$$

и вычтя из равенства (39.27) равенство (39.24), получим, что

$$\sum_{|k| = 0}^{m} c_k \Delta x^k + o(\rho^m) = 0, \quad \rho \to 0. \tag{39.29}$$

Зафиксируем произвольно Δx, $|\Delta x| < \delta$; тогда если $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $|t\Delta x| < \delta$ и в (39.29) можно вместо Δx подставить $t\Delta x$. Выполнив эту подстановку, будем иметь

$$\sum_{|k| = 0}^{m} c_k t^{|k|} \Delta x^k + o(\rho_t^m) = 0,$$

$$\rho_t = \sqrt{\sum_{j = 1}^{n} (t\Delta x_j)^2} = t\rho \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0$$

(так как Δx фиксировано, то и ρ также фиксировано), т. е. при $0 \leqslant t \leqslant 1$ имеем

$$\sum_{l = 0}^{m} t^l \sum_{|k| = l} c_k \Delta x^k + o(t^m) = 0, \quad t \to 0.$$

В силу теоремы 2 п. 13.2, отсюда следует, что $\sum\limits_{|k| = l} c_k \Delta x^k = 0$, причем это верно для всех таких Δx, что $|\Delta x| < \delta$, т. е. стоящий в левой части этого равенства многочлен относительно переменных $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ равен нулю в некоторой окрестности нуля. Согласно лемме, отсюда следует, что все $c_k = 0$. Поэтому, в силу (39.28), для всех k таких, что $0 \leqslant |k| \leqslant m$, выполняется равенство $a_k = b_k$. □

39.2. Формула конечных приращений для функций многих переменных

Частный случай формулы Тейлора (39.18), в котором $m = 1$, обычно называется формулой конечных приращений Лагранжа для функций многих переменных. В силу сделанных в предыдущем пункте замечаний к теореме 1 о предположениях, при которых справедливы формулы (39.1) и (39.18), из теоремы 1′ получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема в каждой точке некоторой выпуклой области $G \subset \boldsymbol{R}^n$, то для каждой пары точек $(x_1, \dots, x_n)$ и $(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n)$ из G существует такое θ, $0 < \theta < 1$, что*

$$f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1 + \theta\Delta x_1, \dots, x_n + \theta\Delta x_n)}{\partial x_i}\Delta x_i,$$

или, короче,

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x + \theta\Delta x)}{\partial x_i}\Delta x_i, \tag{39.30}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x + \Delta x = (x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n)$ *и*

$$x + \theta\Delta x = (x_1 + \theta\Delta x_1, \dots, x_n + \theta\Delta x_n).$$

Формула (39.30), как указывалось, и называется *формулой конечных приращений Лагранжа*.

Эта формула, так же, как и вообще формула Тейлора, находит многочисленные и разнообразные применения в различных вопросах математического анализа.

Обратим внимание на то, что теорема 3 не является частным случаем теоремы 1, поскольку в ней требуется не непрерывная дифференцируемость рассматриваемой функции в каждой точке множества G, а лишь ее дифференцируемость. Однако доказательство теоремы 3 фактически содержится в доказательстве теоремы 1. Действительно, как это отмечалось в замечаниях к доказательству теоремы 1 и ее следствию (см. п. 39.1), при $m = 1$ приведенное выше доказательство теоремы 1 сохраняет силу и при предположениях теоремы 3, т. е. при предположении лишь дифференцируемости (а не непрерывной дифференцируемости) функции f.

В качестве примера применения формулы (39.30) докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Если функция дифференцируема в каждой точке выпуклой области G и имеет в G ограниченные частные производные, то она равномерно непрерывна в этой области.*

Доказательство. Если

$$\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right| \leqslant c, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in G$$

(c — постоянная), то для любых двух точек $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ и $x'' = (x''_1, \ldots, x''_n)$ из (39.30) следует, что

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f(\xi)}{\partial x_i}\right| |x''_i - x'_i| \leqslant cn\rho(x', x'')$$

(здесь ξ — некоторая точка отрезка с концами в точках x' и x''). Поэтому, если задано $\varepsilon > 0$, достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{cn}$, чтобы для любых точек $x' \in G$ и $x'' \in G$ таких, что $\rho(x', x'') < \delta$, выполнялось неравенство

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon, \tag{39.31}$$

а это и означает равномерную непрерывность функции f в области G. □

39.3. Оценка остаточного члена формулы Тейлора во всей области определения функции

Остаточный член в формуле Тейлора, очевидно, зависит не только от приращений аргументов, но и от самой точки, в окрестности которой рассматривается разложение функции и которую мы в п. 39.1 считали фиксированной. Теперь нас будут интересовать поведение и оценка остаточного члена в зависимости от изменения указанной точки. Чтобы подчеркнуть эту зависимость, мы в этом пункте будем остаточный член порядка m обозначать $r_m(x, \Delta x)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка, в окрестности которой раскладывается данная функция по формуле Тейлора. Как и раньше, $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$.

В формулах (39.21) и (39.22) будем вместо $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(\Delta x)$ и $\varepsilon(\Delta x)$ соответственно писать $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)$ и $\varepsilon(x, \Delta x)$. В дальнейшем нам потребуется оценка остаточного члена формулы Тейлора в форме Пеано сразу для всей области существования разложения по указанной формуле.

Введем сначала понятие непрерывности частных производных в замыкании открытого множества. Это требует специального определения, так как в граничной точке открытого множества G даже в случае, когда функция определена на замыкании $\overline{G}$ множества G, понятие частной производной, вообще говоря, не определено (см., например, точку M границы области G на рис. 29).

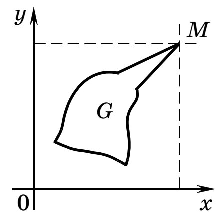


Рис. 29

Определение 1. *Функция f, определенная на открытом множестве $G \subset \boldsymbol{R}^n$, называется непрерывно продолжаемой на его замыкание $\overline{G}$, если существует такая непрерывная на $\overline{G}$ функция F, что $F = f$ на G.*

Функция F называется непрерывным продолжением функции f (на $\overline{G}$) и для простоты будет также обозначаться символом f.

Очевидно, в силу единственности предела функции, если у функции, определенной на G, существует непрерывное продолжение на $\overline{G}$, то оно единственно.

Определение 2. *Функция f называется непрерывно дифференцируемой (соответственно m раз непрерывно дифференцируемой) на замыкании $\overline{G}$ области G (т. е. на замкнутой области), если функция f определена на G и все ее частные производные первого порядка (соответственно частные производные до порядка m включительно) непрерывно продолжаемы с G на $\overline{G}$.*

УПРАЖНЕНИЯ. 1. Доказать, что если функция f определена на открытом множестве $G \subset \boldsymbol{R}^n$, имеет на нем непрерывно продолжаемую на его замыкание $\overline{G}$ производную $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ и в некоторой точке границы множества G существует (односторонняя) частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, то она совпадает с непрерывным продолжением в эту точку частной производной $\frac{\partial f}{\partial x_1}$.

У к а з а н и е. Воспользоваться следствием 3 из теоремы 3 в п. 11.2.

2. Доказать, что, для того чтобы непрерывная функция, определенная на ограниченном открытом множестве $G \subset \boldsymbol{R}^n$, была непрерывно продолжаемой на его замыкание, необходимо и достаточно, чтобы она была равномерно непрерывной на G. Показать, что в случае неограниченного открытого множества условие равномерной непрерывности продолжаемой функции, являясь достаточным для непрерывного продолжения, не является необходимым.

3. Построить пример непрерывной и ограниченной в области функции, которую нельзя непрерывно продолжить на замыкание этой области.

Вернемся теперь к формуле Тейлора. Пусть функция f непрерывно дифференцируема m раз на замыкании $\overline{G}$ открытого ограниченного множества G. Тогда, согласно результатам п. 39.1, в каждой точке $x \in G$ для некоторой ее окрестности имеет место разложение (39.20) функции f по формуле Тейлора, причем *стремление к нулю* $\varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x)$ *в формуле* (39.21) *и* $\varepsilon(x, \Delta x)$ *в формуле* (39.22) *при* $\rho \to 0$ *равномерно на множестве* G (см. определение в п. 37.2), т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если

$$\rho = |\Delta x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} < \delta, \qquad (39.32)$$

то $|\varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x)| < \varepsilon$ и $|\varepsilon(x, \Delta x)| < \varepsilon$ для всех точек $x \in G$.

Это в данном случае непосредственно следует из метода получения функций $\varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x)$ и $\varepsilon(x, \Delta x)$. Действительно, в силу ограниченности и замкнутости замыкания $\overline{G}$ открытого множества G, непрерывные продолжения на $\overline{G}$ частных производных порядка m данной функции равномерно непрерывны на $\overline{G}$, поэтому (см. формулу (39.13) для случая $n = 2$; в общем случае справедлива аналогичная формула), если выполнено условие (39.32), то

$$|\varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x)| \leqslant \omega\left(\delta, \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x^{m_n}}, \overline{G}\right), \qquad (39.33)$$

$$m = m_1 + \dots + m_n.$$

Здесь правая часть (модуль непрерывности соответствующей производной) не зависит от точки множества G и стремится к нулю при $\delta \to 0$. Поэтому из (39.33) следует равномерное стремление $\varepsilon_{m_1 \dots m_n}$ к нулю на G при $\Delta x \to 0$.

Теперь можно оценить бесконечно малую $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ в формуле (39.22). Для произвольного натурального n ее можно, аналогично случаю $n = 2$ (см. (39.16)), представить в виде

$$\varepsilon(x, \Delta x) = \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} \varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x)\left(\frac{\Delta x_1}{\rho}\right)^{m_1} \dots \left(\frac{\Delta x_n}{\rho}\right)^{m_n}.$$

Отсюда имеем

$$|\varepsilon(x, \Delta x)| \leqslant \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} |\varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x)|. \qquad (39.34)$$

В правой части неравенства (39.34) стоит некоторое фиксированное число слагаемых; обозначим его через N. В силу уже доказанного равномерного в G стремления к нулю функ-

ции $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)$, для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если выполнено условие $|\Delta x| < \delta$, то

$$|\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{N}, \quad m_1 + \ldots + m_n = m.$$

Отсюда и из неравенства (39.34) следует, что $|\varepsilon(x, \Delta x)| < \varepsilon$.

Отметим еще одну оценку в целом остаточного члена формулы Тейлора, получающуюся из записи его в форме Лагранжа (39.19).

Если функция f определена на открытом множестве G и имеет на G ограниченные частные производные порядка m, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$\left|\frac{\partial^m f(x)}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x^{m_n}}\right| \leqslant c, \quad m_1 + \ldots + m_n = m, \quad x \in G, \qquad (39.35)$$

то при выполнении условия $|\Delta x| < \delta$ для всех $x \in G$ справедливо неравенство

$$|r_{m-1}(x, \Delta x)| \leqslant \frac{c n^m \delta^m}{m!}.$$

Это сразу следует из формулы (39.19), если абсолютные величины каждого слагаемого ее правой части оценить с помощью неравенства (39.35) и очевидного неравенства $|\Delta x_i| \leqslant \delta$.

39.4. Равномерная сходимость по параметру семейства функций

В предыдущем пункте мы встретились с понятием равномерной сходимости на данном множестве семейства функций, зависящих от некоторого параметра, когда этот параметр стремится к определенным значениям. Такими функциями в нашем случае являлись $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)$ и $\varepsilon(x, \Delta x)$, где роль параметра играло Δx. В простейшем виде этот случай встречался еще раньше в п. 37.2.

Сформулируем определение равномерной сходимости семейства функций в общем случае.

Определение 3. *Пусть $X \subset \boldsymbol{R}^n$, $Y \subset \boldsymbol{R}^m$, $y^{(0)}$ — точка прикосновения множества Y, конечная или бесконечно удаленная ∞, $+\infty$, $-\infty$ (последние две бесконечности имеет смысл рассматривать только при $m = 1$). Пусть, далее, функция $\varphi(x)$ определена для всех $x \in X$, а $f(x, y)$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$.*

Функцию $f(x, y)$ называют равномерно стремящейся на множестве X к функции $\varphi(x)$ при $y \to y^{(0)}$ и пишут

$$f(x, y) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x), \quad y \to y^{(0)},$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U(y^{(0)})$ точки $y^{(0)}$, что для всех $x \in X$ и всех $y \in Y \cap U(y^{(0)})$ выполняется неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon. \tag{39.36}$$

Переменная y часто называется в этом случае параметром, а функция $f(x, y)$, $y \in Y$, — «семейством функций от x» (в том смысле, что эта функция при различных фиксированных значениях параметра $y \in Y$ задает функции переменной x).

Подобно случаю равномерной сходимости последовательности функций (см. п. 32.1) условие равномерной сходимости функций по параметру можно сформулировать, используя понятие предела функции, следующим образом.

Функция $f(x, y)$ равномерно стремится на множестве X к функции $\varphi(x)$ при $y \to y^{(0)}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{y \to y^{(0)}} \sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| = 0. \tag{39.37}$$

Таким образом, условие $f(x, y) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $y \to y^{(0)}$, равносильно стремлению к нулю при $y \to y^{(0)}$ функции

$$F(y) \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)|.$$

Доказательство этого утверждения совсем не сложно и аналогично случаю равномерной сходимости последовательности функций. Его проведение предоставляется читателю.

Справедлив в рассматриваемом случае и аналог критерия Коши равномерной сходимости последовательностей.

ТЕОРЕМА 5 (критерий Коши). *Для того чтобы функция $f(x, y)$ при $y \to y^{(0)}$ равномерно стремилась на множестве X к некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлась такая окрестность $U(y^{(0)})$ точки $y^{(0)}$, что для любых $y' \in U(y^{(0)}) \cap Y$ и $y'' \in U(y^{(0)}) \cap Y$ и любого $x \in X$ выполнялось неравенство*

$$|f(x, y'') - f(x, y')| < \varepsilon. \tag{39.38}$$

Действительно, необходимость условия (39.38), как всегда в подобных ситуациях, легко следует из условия (39.36). Для доказательства же достаточности следует показать, что из ус-

ловия (39.38) вытекает, что для любого фиксированного $x \in X$ существует $\lim\limits_{y \to y^{(0)}} f(x, y)$ и что стремление функции $f(x, y)$ к этому пределу при $y \to y^{(0)}$ происходит равномерно.

Все это также рекомендуется проделать читателю самостоятельно.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Доказать: для того чтобы функция $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in X$ равномерно на множестве X стремилась при $y \to y^{(0)}$ к функции $\varphi(x)$, $x \in X$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $y^{(n)} \in Y$, $n = 1, 2, \ldots$, стремящейся к $y^{(0)}$, последовательность $f(x, y^{(n)})$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно на множестве X сходилась к функции $\varphi(x)$.

Примеры. 1. Рассмотрим семейство функций $f(x, y) = e^{-xy}$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y < +\infty$. Очевидно,

$$\lim_{y \to +\infty} f(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x > 0, \\ 1, \text{ если } x = 0 \end{cases}$$

(переменная y, если использовать указанную выше терминологию, является здесь параметром). Обозначим предельную функцию через $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x > 0, \\ 1, \text{ если } x = 0. \end{cases} \qquad (39.39)$$

Докажем, что стремление функции $f(x, y)$ к $\varphi(x)$ при $y \to +\infty$ происходит неравномерно. Для этого достаточно показать, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что, какую бы окрестность $U(+\infty)$ ни взять, найдутся такие $x \in [0, 1]$ и $y \in U(+\infty)$, что будет выполнено неравенство $|e^{-xy} - \varphi(x)| \geqslant \varepsilon_0$. Возьмем ε_0 такое, что $0 < \varepsilon_0 < 1$, и произвольную окрестность $U(+\infty)$. Тогда, какое бы $y \in U(+\infty)$ ни взять, для него $\lim\limits_{x \to 0} e^{-xy} = 1$, поэтому найдется такое $x \in (0, 1]$, что

$$|e^{-xy} - \varphi(x)| = |e^{-xy} - 0| > \varepsilon_0.$$

Таким образом, в данном случае условия равномерной сходимости не выполняются.

Однако при любом a, $0 < a < 1$, семейство функций $f(x, y) = e^{-xy}$ при $y \to +\infty$ равномерно стремится к нулю на отрезке $[a, 1]$. Проверим в этом случае выполнение условий равномерной сходимости. Для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\eta_\varepsilon > 0$ такое, что $e^{-a\eta_\varepsilon} < \varepsilon$ $\left(\text{достаточно взять любое } \eta > \dfrac{|\ln \varepsilon|}{a}\right)$, поэтому для всех $y > \eta_\varepsilon$ и всех $x \in [a, 1]$ будем иметь

$$|e^{-xy} - 0| = e^{-xy} < e^{-a\eta_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Конечно, исследование равномерной сходимости рассматриваемого семейства функций можно выполнить и применив критерий (39.37). Действительно, использовав формулу (39.39), получим

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |e^{-xy} - \varphi(x)| \geqslant \sup_{0 < x \leqslant 1} e^{-xy} = 1,$$

поэтому условие (39.31) заведомо не выполняется. Если же $0 < a < 1$, то

$$\lim_{y \to +\infty} \sup_{a \leqslant x \leqslant 1} |e^{-xy} - \varphi(x)| = \lim_{y \to +\infty} \sup_{a \leqslant x \leqslant 1} e^{-xy} = \lim_{y \to +\infty} e^{-ay} = 0.$$

Таким образом,

$$e^{-xy} \underset{[0,\,1]}{\not\rightrightarrows} \varphi(x), \quad e^{-xy} \underset{[a,\,1]}{\rightrightarrows} 0, \quad 0 < a < 1, \quad y \to +\infty.$$

2. В том случае, когда Y является множеством натуральных чисел $Y = \{1, 2, 3, \ldots\}$, а $y^{(0)} = +\infty$, приведенное определение равномерной сходимости по параметру превращается в определение равномерной сходимости последовательности функций $f_n(x) = f(x, n)$, $n = 1, 2, \ldots$, на множестве X.

3. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике $Q = \{(x, y): -\infty < a \leqslant x \leqslant b < +\infty, -\infty < c \leqslant y \leqslant d < +\infty\}$ и пусть $y_0 \in [c, d]$.

Обозначим через $\omega(\delta, f)$ модуль непрерывности функции f в прямоугольнике Q; тогда

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| \leqslant \omega(|y - y_0|; f), \quad (x, y) \in Q. \qquad (39.40)$$

Правая часть этого неравенства не зависит от x и, в силу равномерной непрерывности функции f на прямоугольнике Q, $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta, f) = 0$. Поэтому из неравенства (39.40) следует, что при $y \to y_0$ функция $f(x, y)$ равномерно на отрезке $[a, b]$ стремится к функции $f(x, y_0)$.

УПРАЖНЕНИЕ 5. Доказать, что если семейство функций $f(x, y)$, $x \in X \subset \subset \boldsymbol{R}^n$, $y \in Y \in \boldsymbol{R}^m$ таково, что функции $f(x, y)$ при любом фиксированном $y \in Y$ непрерывны по x на множестве X и равномерно на этом множестве стремятся к $\varphi(x)$ при $y \to y^{(0)}$, то $\varphi(x)$ также непрерывна на множестве X.

39. 5. Замечания о рядах Тейлора для функций многих переменных

Если функция $f(x)$ определена и бесконечно дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in \boldsymbol{R}^n$, то для этой функции формула Тейлора (39.20) будет, очевидно, спра-

ведливой при любом натуральном $n = 1, 2, \ldots$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 < \delta^2$. Если при этом ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{k\}} f(x^{(0)})$$

сходится к $\Delta y = f(x) - f(x^{(0)})$ (см. п. 38.2), то получим формулу

$$\Delta y = f(x) - f(x^{(0)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{k\}} f(x^{(0)}),$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $x_i - x_i^{(0)} = \Delta x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда, перенося $f(x^{(0)})$ в правую часть, получим разложение функции в степенной ряд, называемый *рядом Тейлора* функции f:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left((x_1 - x_1^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - x_n^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{k\}} f(x^{(0)}),$$

или, что то же,

$$f(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k f(x^{(0)})(x - x^{(0)})^k,$$

где $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс.

УПРАЖНЕНИЕ 6. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x, y) = e^{x+y}$.

§ 40
Экстремумы функций многих переменных

40.1. Необходимые условия экстремума

Изучаемые в настоящем и некоторых следующих параграфах вопросы носят аналитический характер, и их доказательства не усложняются при увеличении числа переменных. Поэтому мы проведем их рассмотрение сразу в общем n-мерном случае, указывая при необходимости их специфические особенности для случаев $n = 2$ и $n = 3$.

Определение 1. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \boldsymbol{R}^n$. Точка $x^{(0)} \in X$ называется точкой строгого максимума, соответственно строгого минимума, если существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что для всех $x \in U(x^{(0)}) \cap X$, $x \neq x^{(0)}$, выполняется неравенство $f(x) < f(x^{(0)})$, соответственно неравенство $f(x) > f(x^{(0)})$.*

Итак, точка строгого максимума (соответственно строгого минимума) характеризуется тем, что $\Delta f = f(x) - f(x^{(0)}) < 0$ (соответственно $\Delta f > 0$) при всех $x \in U(x^{(0)}) \cap X$, $x \neq x^{(0)}$ (рис. 30).

Если же для точки $x^{(0)}$ существует такая окрестность $U(x^{(0)})$, что при всех $x \in U(x^{(0)}) \cap X$ выполняется условие $f(x) \leqslant f(x^{(0)})$ (соответственно $f(x) \geqslant f(x^{(0)})$), то $x^{(0)}$ называется просто точкой максимума (соответственно минимума).

Определение 2. *Точки (строгого) максимума и минимума функции называются точками (строгого) экстремума.*

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$; если она является точкой экстремума функции $f(x)$ и если в ней существует какая-то из производных $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ (j может принимать одно из значений $1, 2, \dots, n$), то она равна нулю: $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_j} = 0$.*

СЛЕДСТВИЕ. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке экстремума $x^{(0)}$, то ее дифференциал равен нулю в этой точке: $df(x^{(0)}) = 0$.*

Доказательство (теоремы и следствия). Пусть для определенности $j = 1$. Если $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ является точкой экстремума для функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, то $x_1^{(0)}$ является точкой экстремума для функции $f(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ одной переменной x_1 (рис. 31), причем так как точка $x^{(0)}$ была внутренней для области определения функции $f(x_1, \dots, x_n)$, то

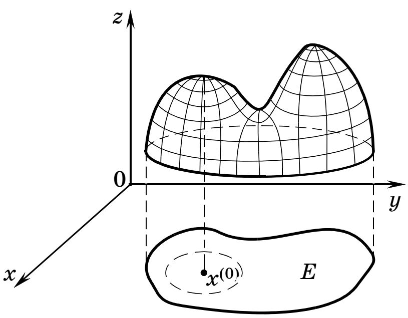


Рис. 30

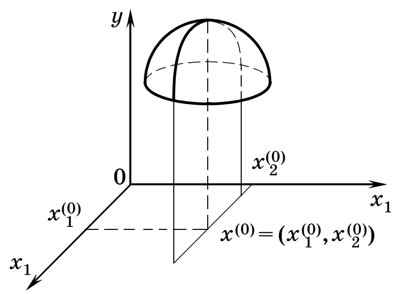


Рис. 31

точка $x_1^{(0)}$ является внутренней для области определения функции $f(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Поэтому если в этой точке существует производная $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, то по теореме Ферма (см. п. 11.1) она равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = \left.\frac{df(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{dx_1}\right|_{x_1 = x_1^{(0)}} = 0.$$

Аналогично обстоит дело в случае любой переменной x_j $(j = 2, \dots, n)$.

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке экстремума $x^{(0)}$, то в этой точке существуют все производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, и, согласно доказанному, все они равны нулю, поэтому и

$$df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i = 0. \square$$

Примеры. 1. Найдем точки экстремума функции $z = x^2 + y^2$. Точки экстремума, в силу доказанного, находятся среди тех, для которых $dz = 0$. Так как $dz = 2x\,dx + 2y\,dy$, то условие $dz = 0$ выполняется в единственной точке (0, 0). В этой точке $z = 0$, во всех же других точках $z = x^2 + y^2 > 0$. Поэтому точка (0, 0) является точкой строгого минимума для функции $z = x^2 + y^2$ (рис. 32).

2. Исследуем точки экстремума функции $z = x^2 - y^2$. Поступая аналогично предыдущему случаю, находим, что условие $dz = 0$ снова выполняется в точке (0, 0) и в этой точке $z = 0$. Однако здесь при $y = 0$ и любых $x \neq 0$ имеем $z > 0$, а при $x = 0$ и любом $y \neq 0$ имеем $z < 0$. Поэтому точка (0, 0) не является точкой экстремума, и, значит, функция $z = x^2 - y^2$ вообще не имеет экстремальных точек (рис. 33).

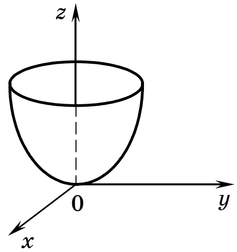


Рис. 32

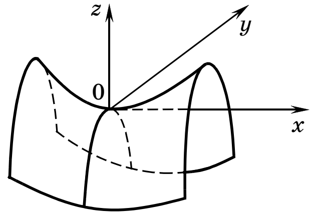


Рис. 33

40.2. Достаточные условия строгого экстремума

Напомним несколько определений из курса алгебры.

Определение 3. *Квадратичная форма* $A(x) = A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$, $a_{ji} = a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, *называется положительно* (*соответственно отрицательно*) *определенной, если* $A(x) > 0$ (*соответственно* $A(x) < 0$) *для любой точки* $x \in \boldsymbol{R}^n$, $x \neq 0$.

Квадратичная форма, являющаяся положительно или отрицательно определенной, называется также просто определенной (*или знакоопределенной*) *квадратичной формой.*

Определение 4. *Квадратичная форма, принимающая как положительные, так и отрицательные значения, называется неопределенной.*

ЛЕММА 1. *Пусть S — единичная сфера в $\boldsymbol{R}^n$:*

$$S = \{x\colon x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\},$$

и пусть $A(x)$ — определенная квадратичная форма; тогда

$$\inf_{x \in S} |A(x)| = \mu > 0.$$

Доказательство. Функция $A(x)$ является многочленом второй степени по переменным $x_1, \dots, x_n$, поэтому $A(x)$, следовательно, и $|A(x)|$ непрерывны во всем пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Отсюда вытекает, что функция $|A(x)|$ непрерывна на компакте S. Согласно теореме Вейерштрасса, функция $|A(x)|$ достигает на S своей нижней грани, т. е. существует такая точка $x^{(0)} \in S$, что

$$\mu \overset{\text{def}}{=} \inf_{x \in S} |A(x)| = |A(x^{(0)}|.$$

По определению знакоопределенной квадратичной формы $|A(x)| > 0$ для всех точек $x \in S$, следовательно, в частности, $\mu = |A(x^{(0)})| > 0$. □

Определение 5. *Пусть функция f дифференцируема в точке $x^{(0)} \in \boldsymbol{R}^n$. Если $df(x^{(0)}) = 0$, то $x^{(0)}$ называется стационарной точкой функции f.*

Очевидно, что точка $x^{(0)}$, в которой функция f дифференцируема, является стационарной в том и только в том случае, если

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{40.1}$$

Согласно следствию из теоремы 1, точка экстремума, в которой функция f дифференцируема, является стационарной; обратное, конечно, вообще говоря, неверно: не всякая стационарная точка, в которой функция дифференцируема, является точкой экстремума (см. пример 2 в конце п. 40.1).

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия строгого экстремума). *Пусть функция f определена и имеет непрерывные производные второго порядка в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Пусть $x^{(0)}$ является стационарной точкой функции f; тогда если квадратичная форма*

$$A(dx_1, \dots, dx_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j, \tag{40.2}$$

т. е. второй дифференциал функции f в точке $x^{(0)}$, положительно определенна (отрицательно определенна), то $x^{(0)}$ является точкой строгого минимума (соответственно строгого максимума); если же квадратичная форма (40.2) неопределенна, то в точке $x^{(0)}$ нет экстремума.

Доказательство. Пусть $U(x^{(0)}, \delta_0)$ — δ_0-окрестность стационарной для функции f точки $x^{(0)}$, в которой функция f имеет непрерывные вторые производные. Пусть точка

$$x^{(0)} + dx = (x_1^{(0)} + dx_1, \dots, x_n^{(0)} + dx_n)$$

принадлежит этой окрестности.

По формуле Тейлора (см. (39.23)), учитывая условия стационарности (40.1), получим

$$\Delta f = f(x^{(0)} + dx) - f(x^{(0)}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j + \varepsilon(dx)\rho^2,$$

где $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$, $\rho^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$, и

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon(dx) = 0, \tag{40.3}$$

или

$$\Delta f = \frac{\rho^2}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} \frac{dx_i}{\rho} \frac{dx_j}{\rho} + 2\varepsilon(dx)\right] =$$

$$= \frac{\rho^2}{2}\left[A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \dots, \frac{dx_n}{\rho}\right) + 2\varepsilon(dx)\right], \ \rho \neq 0. \tag{40.4}$$

Точка $\left(\frac{dx_1}{\rho}, \dots, \frac{dx_n}{\rho}\right)$ лежит на единичной сфере S (т. е. на сфере с центром в начале координат и радиусом, равным 1), так как $\left(\frac{dx_1}{\rho}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{\rho}\right)^2 = 1$.

Пусть квадратичная форма (40.2) знакоопределенна. Тогда, согласно лемме, $\inf\limits_{S} |A| = \mu > 0$. Выберем δ, $0 < \delta < \delta_0$, так, чтобы $2|\varepsilon(dx)| < \mu$ при $\rho < \delta$. Тогда при $\rho < \delta$, т. е. при $x^{(0)} + dx \in U(x^{(0)}, \delta)$ и $dx \neq 0$, все выражение в квадратных скобках в правой части формулы (40.4) будет иметь тот же знак, что и первое слагаемое $A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right)$:

$$\operatorname{sign} \Delta f = \operatorname{sign} A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right).$$

Поэтому если квадратичная форма (40.2) является положительно определенной, то $\Delta f > 0$, а если отрицательно определенной, то $\Delta f < 0$ при $x^{(0)} + dx \in \overset{\circ}{U}(x^{(0)}, \delta)$. Значит, в первом случае $x^{(0)}$ является точкой строгого минимума, а во втором — точкой строгого максимума.

Пусть теперь квадратичная форма (40.2) является неопределенной; это означает, что существуют две такие точки $dx' = (dx'_1, \ldots, dx'_n)$ и $dx'' = (dx''_1, \ldots, dx''_n)$, что $A(dx'_1, \ldots, dx'_n) > 0$, а $A(dx''_1, \ldots, dx''_n) < 0$. Мы не можем на основании этого сразу сказать, что приращение функции Δf меняет знак в любой окрестности точки $x^{(0)}$, так как точки $x^{(0)} + dx' = (x_1^{(0)} + dx'_1, \ldots$ $\ldots x_n^{(0)} + dx'_n)$ и $x^{(0)} + dx'' = (x_1^{(0)} + dx''_1, \ldots, x_n^{(0)} + dx''_n)$ могут, вообще говоря, даже и не принадлежать области определения функции f. Однако нужный нам результат будет следовать из того, что квадратичная форма $A(dx)$ сохраняет один и тот же знак или равенство нулю на каждой прямой, проходящей через точку $x^{(0)}$, из которой удалена сама эта точка, а значение $A\left(\frac{dx}{\rho}\right)$, $dx \neq 0$, вообще не зависит от выбора точки на этой прямой.

Рассмотрим точку $dx' = (dx'_1, \ldots, dx'_n)$, и пусть $\rho' = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} dx_i'^2}$. Проведем полупрямую, начинающуюся в точке $x^{(0)}$ и проходящую через точку $x^{(0)} + dx'$. Для любой точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ этой полупрямой положим $dx_i = x_i - x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $\rho = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} dx_i^2}$. Тогда (рис. 34)

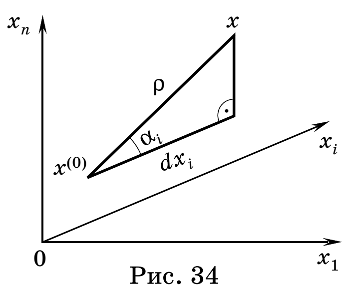


Рис. 34

$$\frac{dx_i}{\rho} = \cos \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad (40.5)$$

где $\cos\alpha_i$ суть направляющие косинусы рассматриваемой полупрямой. Поэтому точка

$$\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right) = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n), \tag{40.6}$$

лежащая, очевидно, на единичной сфере* S с центром $x^{(0)}$, будет одной и той же для всех точек x этой полупрямой, т. е. точка (40.6) не зависит от расстояния ρ между x и $x^{(0)}$ и

$$\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right) = \left(\frac{dx_1'}{\rho'}, \ldots, \frac{dx_n'}{\rho'}\right).$$

Следовательно, и значение квадратичной формы (40.2) в точке (40.6), т. е. $A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right)$, не зависит от ρ. Отсюда для любой точки (40.6) имеем

$$A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right) = A\left(\frac{dx_1'}{\rho'}, \ldots, \frac{dx_n'}{\rho'}\right) = \frac{1}{\rho'^2}A(dx_1', \ldots, dx_n') > 0.$$

Пусть $A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right) = \mu' > 0$. Выберем $\rho_0 > 0$ так, чтобы при $\rho < \rho_0$ имело место неравенство $2|\varepsilon(dx)| < \mu'$, что возможно в силу (40.3). Тогда для любой точки $x^{(0)} + dx$, лежащей на полупрямой (40.5) и такой, что $0 < \rho = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} dx_i^2} < \rho_0$, в формуле (40.4) выражение в квадратных скобках будет иметь знак первого члена, и поэтому $\Delta f > 0$. Итак, в любой окрестности точки $x^{(0)}$ имеются точки, для которых $\Delta f > 0$.

Аналогично, исходя из отрицательного значения квадратичной формы (40.2) в точке (dx_i''), доказывается, что в любой окрестности точки $x^{(0)}$ существуют точки, для которых $\Delta f < 0$. А это и означает, что в рассматриваемом случае $x^{(0)}$ не является точкой экстремума. □

При практическом применении этой теоремы возникает вопрос: как установить, будет ли квадратичная форма (40.2) положительно или отрицательно определенной. Для этой цели может служить, например, так называемый критерий Сильвестра** положительной определенности квадратич-

---

* Напомним, что для направляющих косинусов справедливо равенство $\cos^2\alpha_1 + \ldots + \cos^2\alpha_n = 1$.

**Д. Д. Сильвестр (1814—1897) — английский математик.

ной формы, доказываемый в курсах алгебры. Он состоит в следующем.

Для того чтобы квадратичная форма

$$A(x) = A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \qquad (40.7)$$

у которой $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, *была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Замечая, что квадратичная форма $A(x)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда квадратичная форма $-A(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} (-a_{ij})x_i x_j$ положительно определена, получаем, пользуясь известными свойствами определителя, следующий критерий отрицательной определенности.

Для того чтобы квадратичная форма (40.7) *была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \dots, (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Сформулируем теперь теорему 2 для случая двух переменных, выразив условия, накладываемые на квадратичную форму (40.2), в явном виде через вторые частные производные.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть функция* $f(x, y)$ *определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0), *которая является стационарной для* $f(x, y)$, *т. е. в ней*

$$f_x = f_y = 0. \qquad (40.8)$$

Тогда если в точке (x_0, y_0) *выполняется неравенство*

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0, \qquad (40.9)$$

то она является точкой строгого экстремума, а именно: строгого максимума, если в ней $f_{xx} < 0$*, *и строгого минимума, если* $f_{xx} > 0$. *Если же в точке* (x_0, y_0) *выполняется неравенство*

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0, \tag{40.10}$$

то экстремума в ней нет.

Наконец, когда в точке (x_0, y_0) *выполняется равенство*

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0, \tag{40.11}$$

то может случиться, что экстремум в ней есть, и может случиться, что экстремума нет.

Действительно, если $f_{xx} \neq 0$ в точке (x_0, y_0), то квадратичную форму (40.2) в нашем случае можно записать в виде

$$A(dx, dy) = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}\,dx\,dy + f_{yy}\,dy^2 =$$

$$= \frac{1}{f_{xx}}[(f_{xx}\,dx + f_{xy}\,dy)^2 + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)\,dy^2]. \tag{40.12}$$

Все частные производные здесь и ниже взяты в точке (x_0, y_0).

Мы непосредственно видим, что при выполнении условия (40.9) выражение в квадратных скобках в формуле (40.12) положительно при $dx^2 + dy^2 > 0$, т. е. $A(dx, dy)$ является определенной квадратичной формой, а именно положительно-определенной при $f_{xx} > 0$ и отрицательно-определенной при $f_{xx} < 0$. Это, конечно, следует и из приведенного выше критерия Сильвестра. В первом случае, согласно теореме 2, точка (x_0, y_0) является точкой строгого минимума, а во втором — точкой строгого максимума. Если же выполнено условие (40.10) и $f_{xx} \neq 0$, то при $dy = 0$, $dx \neq 0$, из (40.12) имеем $\operatorname{sign} A(dx, 0) = \operatorname{sign} f_{xx}$, а при $dx = f_{xy}$, $dy = -f_{xx}$ получим $\operatorname{sign} A(f_{xy}, -f_{xx}) = -\operatorname{sign} f_{xx}$, откуда следует, что квадратичная форма $A(dx, dy)$ при выполнении условия (40.10) является неопределенной.

Итак, полностью разобран случай $f_{xx} \neq 0$ и $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$. Случай $f_{xx} = 0$, $f_{yy} \neq 0$ и $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$ исследуется аналогично.

Если же $f_{xx} = f_{yy} = 0$, но по-прежнему $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$, то, очевидно, $f_{xy} \neq 0$, следовательно, в этом случае выполняется условие (40.10) и $A(dx, dy) = 2f_{xy}\,dx\,dy$. Отсюда сразу видно, что квадра-

---

[*] Очевидно, из условия (40.9) следует, что $f_{xx} \neq 0$ в точке (x_0, y_0).

тичная форма $A(dx, dy)$ при сделанных предположениях является неопределенной, так как $\operatorname{sign} A(dx, dy) = -\operatorname{sign} A(dx, -dy)$. Поэтому достаточно взять сначала dx и dy одного знака, а затем разных знаков, чтобы получить значения квадратичной формы разных знаков. По теореме 2 точка (x_0, y_0) не является в этом случае точкой экстремума.

Наконец, случай $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = 0$ несовместим с предположением $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$. Таким образом, разобраны все возможные случаи при выполнении неравенства $f_{xx}f_{xy} - f_{xy}^2 \neq 0$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать на примерах, что, когда имеет место соотношение (40.11), экстремум может быть, а может и не быть.

У функции $z = x^2 + 2xy + y^2$ точка (0, 0) является стационарной, и в ней $z_{xx} = z_{xy} = z_{yy} = 2$, и, значит, выполняется условие (40.11). Замечая, что $z = (x + y)^2$, видим, что всюду $z \geqslant 0$, причем $z = 0$ на прямой $x + y = 0$; поэтому точка (0, 0) является точкой экстремума, правда, нестрогого.

Для функции $z = xy^3$ точка (0, 0) также является стационарной, и в ней $z_{xx} = z_{yy} = z_{xy} = 0$, поэтому условие (40.11) также выполняется. Однако в силу того, что в формулу, задающую эту функцию, переменные x и y входят в нечетных степенях, функция меняет знак в любой окрестности нуля, значит, (0, 0) не является точкой экстремума. □

40.3. Замечания об экстремумах на множествах

Пусть функция f дифференцируема на открытом ограниченном множестве G и непрерывна на его замыкании $\overline{G}$. Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции f на множестве $\overline{G}$ (они существуют по теореме 3 п. 19.5). Для этого можно, например, найти все стационарные точки функции f в G, вычислить в них значения функции и выбрать, если, конечно, это возможно (а теоретически возможно это, например, когда число стационарных точек конечно), точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения из всех значений в стационарных точках. После этого следует сравнить эти значения со значениями, которые функция принимает на границе открытого множества G, например найдя, если это удается сделать, наибольшее и наименьшее значения функции f на границе области G. Сравнив наибольшее и наименьшее значения в стационарных точках с наибольшим и

наименьшим значениями на границе множества G, мы можем, очевидно, найти искомый максимум и минимум f на $\overline{G}$.

В том случае, когда G — плоская область и ее граница является кривой, заданной некоторым представлением $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, вопрос о нахождении экстремальных значений функции $f(x, y)$ на границе G сводится к исследованию на экстремум функции одного переменного $f(x(t), y(t))$, что делается уже известными методами.

Методы, которые можно применять в многомерном случае для отыскания экстремальных точек на границе области, будут рассмотрены в § 43.

§ 41

Неявные функции. Отображения

41.1. Неявные функции, определяемые одним уравнением

Выясним условия, при которых одно уравнение с несколькими переменными определяет однозначную функцию, т. е. определяет одну из этих переменных как функцию остальных. Начнем рассмотрение с изучения уравнения, содержащего два неизвестных, $F(x, y) = 0$.

Если функция двух переменных $F(x, y)$ задана на некотором подмножестве A плоскости $\boldsymbol{R}^2_{xy}$, $A \subset \boldsymbol{R}^2_{xy}$, и существует такая функция одной переменной $y = f(x)$, определенная на множестве $B \subset \boldsymbol{R}_x$, содержащемся в проекции множества A на ось Ox, что для всех $x \in B$ имеет место $(x, f(x)) \in A$ и справедливо равенство $F(x, f(x)) = 0$, то f называется неявной функцией, определяемой уравнением $F(x, y) = 0$.

Например, если задано уравнение $x^2 + y^2 = 1$, то функции $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, являются неявными функциями, задаваемыми этим уравнением. Кроме них существует бесчисленное множество других неявных функций, задаваемых этим уравнением. Например, для любого $x_0 \in [-1, 1]$ функция

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), \text{ если } x \neq x_0, \\ f_2(x), \text{ если } x = x_0, \end{cases}$$

также представляет собой неявную функцию, определяемую тем же уравнением.

Если потребовать, чтобы неявная функция удовлетворяла некоторым дополнительным условиям, то может случиться, что такая функция будет единственной. Так, если потребовать, чтобы значения неявной функции, определяемой уравнением $x^2 + y^2 = 1$ на отрезке $[-1, 1]$, были неотрицательны, то имеется только одна такая неявная функция, а именно

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Другой пример: если координаты точки (x_0, y_0), $y_0 \neq 0$, удовлетворяют этому же уравнению $x_0^2 + y_0^2 = 1$, и $U = U(x_0, y_0)$ — какая-либо ε-окрестность точки (x_0, y_0), не пересекающаяся с осью Ox (рис. 35), то снова существует единственная неявная функция f, определенная уравнением $x^2 + y^2 = 1$ на ортогональной проекции окрестности U на ось Ox и такая, что ее график содержится в окрестности U.

Сформулируем в виде леммы одно общее утверждение, представляющее собой условие, при котором существует единственная неявная функция, определяемая заданным уравнением.

ЛЕММА. *Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна на некоторой прямоугольной окрестности*

$$U(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| < \xi, |y - y_0) < \eta\}^*$$

точки (x_0, y_0) и при каждом фиксированном $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$ строго монотонна по y на интервале $(y - \eta, y_0 + \eta)$. Тогда, если

$$F(x_0, y_0) = 0,$$

то существуют окрестности $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 и $U(y_0) = (y - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ точки y_0 такие, что для каждого $x \in U(x_0)$ имеется, и притом единственное, решение $y \in U(y_0)$ уравнения $F(x, y) = 0$. Это решение, являющееся функцией от x и обозначаемое $y = f(x)$, непрерывно в точке x_0 и $f(x_0) = y_0$.

Таким образом, лемма, в частности, утверждает, что при сделанных предположениях неявная функция $y = f(x)$, определяемая уравнением $F(x, y) = 0$, существует и обладает тем свойством, что при условии $x \in U(x_0)$, $y \in U(y_0)$ равенства $F(x, y) = 0$ и $y = f(x)$ равносильны.

---

* В соответствии с принятыми в курсе обозначениями окрестность точки (x_0, y_0) правильнее было бы обозначать через $U((x_0, y_0))$, а не через $U(x_0, y_0)$. Для простоты обозначений мы будем опускать вторые скобки.

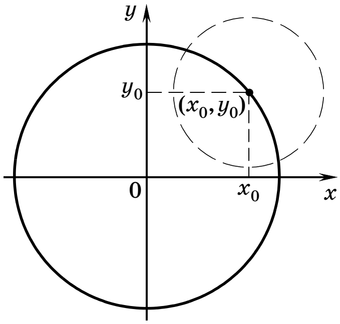


Рис. 35

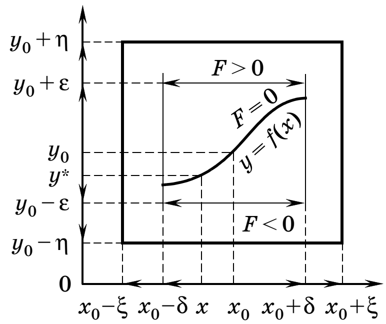


Рис. 36

Доказательство. По условиям леммы функция $F(x, y)$ при каждом фиксированном $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$ строго монотонна по переменной y на интервале $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$, в частности, на нем строго монотонна функция $F(x_0, y)$. Пусть для определенности она строго возрастает. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, подчиненное лишь условию $0 < \varepsilon < \eta$. Поскольку функция $F(x_0, y)$ переменной y строго возрастает на отрезке $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ и по условию $F(x_0, y_0) = 0$, то

$$F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0.$$

Но функция двух переменных $F(x, y)$ по предположению непрерывна на открытом множестве $U(x_0, y_0)$ и $(x_0, y_0 - \varepsilon) \in U(x_0, y_0)$, $(x_0, y_0 + \varepsilon) \in U(x_0, y_0)$, поэтому существует такое δ, $0 < \delta < \xi$, что в δ-окрестности точки $(x_0, y_0 - \varepsilon)$ выполняется неравенство $F(x, y) < 0$, а в δ-окрестности точки $(x_0, y_0 + \varepsilon)$ — неравенство $F(x, y) > 0$ (см. лемму 1 в п. 15.3). В частности, при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ будут справедливыми неравенства

$$F(x, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x, y_0 + \varepsilon) > 0. \tag{41.1}$$

Положим

$$U(x_0) \overset{\text{def}}{=} (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad U(y_0) \overset{\text{def}}{=} (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon).$$

Поскольку при фиксированном $x \in U(x_0)$ функция $F(x, y)$ переменной y непрерывна на отрезке $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$, из условия (41.1), согласно теореме Коши о промежуточных значениях непрерывной функции (см. теорему 2 в п. 6.2), следует, что существует такое $y^* \in U(y_0)$ (рис. 36), что $F(x, y^*) = 0$. В силу строгой монотонности функции $F(x, y)$ на отрезке $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ по переменной y, указанное y^* единственно.

Таким образом, получено однозначное соответствие (однозначная функция) $x \mapsto y^*$, $x \in U(x_0)$, $y^* \in U(y_0)$, которое будем обозначать через f: $y^* = f(x)$.

По определению этого соответствия, для любого $x \in U(x_0)$ и $y^* = f(x)$ имеем $F(x, y^*) = 0$, $y^* \in U(y_0)$, причем точка y^*, обладающая этим свойством, единственна. Тем самым нами доказаны существование и единственность искомой функции f. Далее, по условию леммы, $F(x_0, y_0) = 0$ и так как $x_0 \in U(x_0)$, $y_0 \in U(y_0)$, то, в силу единственности функции f, имеем $y_0 = f(x_0)$.

Наконец, заметим, что $\varepsilon > 0$ было фиксировано произвольным образом при условии, что $\varepsilon < \eta$, и что для него было найдено такое $\delta > 0$, что из $|x - x_0| < \delta$ (т. е. из условия $x \in U(x_0)$) вытекало включение $f(x) \in U(y_0)$, т. е. неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Это и означает непрерывность функции f в точке x_0. □

Удобные для приложения достаточные условия однозначной разрешимости уравнения $F(x, y) = 0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), для которой $F(x_0, y_0) = 0$, даются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна на некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и имеет в этой окрестности частную производную $F_y(x, y)$, которая непрерывна в точке (x_0, y_0). Тогда, если*

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

то найдутся такие окрестности $U(x_0)$ и $U(y_0)$ соответственно точек x_0 и y_0, что для каждого $x \in U(x_0)$ существует, и притом единственное, решение $y = f(x) \in U(y_0)$ уравнения $F(x, y) = 0$. Это решение непрерывно всюду в $U(x_0)$ и $y_0 = f(x_0)$.*

Если дополнительно предположить, что функция F имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) частную производную $F_x(x, y)$, непрерывную в точке (x_0, y_0), то функция $f(x)$ также имеет в точке x_0 производную и для нее справедлива формула

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

* В этом случае говорят также, что уравнение $F(x, y) = 0$ однозначно разрешимо в окрестности $U(x_0, y_0) = \{(x, y) : x \in U(x_0), y \in U(y_0)\}$ точки (x_0, y_0).

Доказательство. В силу непрерывности функции $F(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и непрерывности частной производной $F_y(x, y)$ в точке (x_0, y_0), существует прямоугольная окрестность $U(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| < \xi, |y - y_0| < \eta\}$ точки (x_0, y_0), в которой сама функция $F(x, y)$ непрерывна, а значения частной производной $F_y(x, y)$ имеют тот же знак, что и ее значение в точке (x_0, y_0). Поэтому при каждом фиксированном $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$ функция $\varphi(y) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, y)$ дифференцируема на интервале $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$, а ее производная $\varphi'(y) = F_y(x, y)$ сохраняет постоянный знак. Следовательно, функция $\varphi(y)$ строго монотонна на указанном интервале.

Таким образом все условия леммы для функции $F(x, y)$ в построенной прямоугольной окрестности $U(x_0, y_0)$ выполнены. Следовательно, существуют окрестности $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $U(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ и единственная функция $y = f(x)$, определенная на $U(x_0)$, такие, что при каждом $x \in U(x)$ имеют место включение $f(x) \in U(y_0)$ и равенство $F(x, f(x)) = 0$, причем функция f непрерывна в точке x_0.

Поскольку для каждой точки (x, y), для которой $x \in U(x_0)$, $y \in U(y_0)$, существует ее прямоугольная окрестность $U(x, y)$, содержащаяся в прямоугольной окрестности

$$U_0(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \varepsilon\}$$

(рис. 37), то для $U(x, y)$ также выполняются все условия леммы. Следовательно, в силу единственности решения $f(x)$ уравнения $F(x, y) = 0$ в окрестности $U_0(x_0, y_0)$, согласно той же лемме, функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке $x \in U(x_0)$.

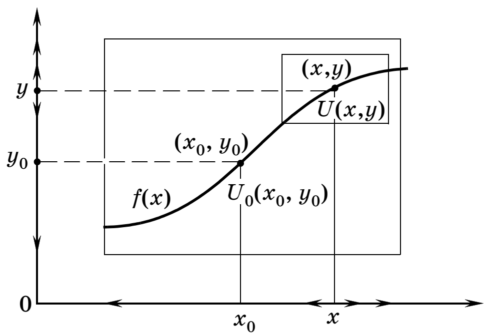


Рис. 37

Докажем теперь последнее утверждение теоремы. В силу непрерывности частных производных F_x и F_y в точке (x_0, y_0), функция F дифференцируема в этой точке:

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) =$$
$$= F_x(x_0, y_0)\Delta x + F_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y, \qquad (41.2)$$

где

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0, \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Возьмем в формуле (41.2)

$$x_0 + \Delta x \in U(x_0), \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Тогда, в силу условия $F(x, f(x)) = 0$, получим

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = F(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) = 0,$$

и так как $F(x_0, y_0) = 0$, то из (41.2) имеем

$$F_x(x_0, y_0)\Delta x + F_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1}{F_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2}. \qquad (41.3)$$

Пусть теперь $\Delta x \to 0$; тогда из непрерывности функции f следует, что $\Delta y \to 0$, а значит, при $\Delta x \to 0$ имеем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$. В силу этого в формуле (41.3) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon_2 = 0$. Поэтому при $\Delta x \to 0$ предел правой части равенства (41.3) существует и равен $-\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$ (напомним, что $F_y(x_0, y_0) \neq 0$), следовательно, при $\Delta x \to 0$ существует и предел левой части, т. е. существует производная

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}. \ \square \qquad (41.4)$$

З а м е ч а н и е. Если функции F_x и F_y непрерывны в окрестности $U_0(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0), то производная f' непрерывна на интервале $U(x_0)$. Действительно, применив формулу (41.4) к произвольной точке $x \in U(x_0)$, получим

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))},$$

откуда по теореме о композиции непрерывных функций вытекает непрерывность функции $f'(x)$ на $U(x_0)$.

Аналогичным образом вводится понятие неявной функции, определяемой уравнением

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = 0, \qquad (41.5)$$

а также формулируется и доказывается теорема, аналогичная теореме 1. Чтобы получить ее формулировку, достаточно в формулировке теоремы 1 под x понимать точку n-мерного пространства, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$, в частности $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$.

ТЕОРЕМА 1′. *Пусть функция $F(x, y) \equiv F(x_1, \dots, x_n, y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ и имеет в этой окрестности частную производную F_y, непрерывную в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$.*

Если $F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, а $F_y(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0$, то найдутся такие окрестности U_x и U_y соответственно точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$, что для каждого $x \in U(x)$ существует, и притом единственное, решение $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \in U_y$ уравнения $F(x, y) = 0$, причем это решение $y = f(x)$ непрерывно на U_x и $y^{(0)} = f(x^{(0)})$.*

Если, кроме того, в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ существуют все частные производные F_{x_i}, непрерывные в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$, то в точке $x^{(0)}$ существуют и частные производные f_{x_i}, $i = 1, 2, \dots, n$, причем если частные производные F_{x_i}, $i = 1, 2, \dots, n$, и F_y непрерывны в окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$, то частные производные f_{x_i} существуют и непрерывны в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$.

При этом формулы для частных производных неявной функции $y = f(x)$, определяемой уравнением (41.5), имеют вид

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

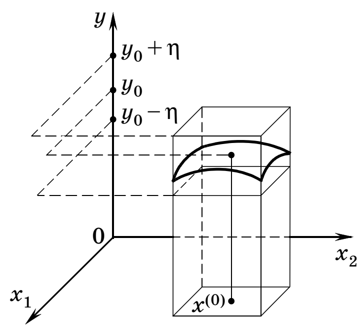


Рис. 38

---

* На рис. 38 изображен случай, когда $n = 2$ и окрестность U_x прямоугольная.

УПРАЖНЕНИЯ. 1. Сформулировать условия, при которых функция $f(x)$, определяемая уравнением $F(x, y) = 0$ (теорема 1), имеет в точке (x_0, y_0) непрерывные производные до n-го порядка включительно. Найти формулы для $f''(x_0)$ и $f'''(x_0)$.

2. С помощью теоремы 1 и ответа на предыдущие упражнения найти достаточные условия существования функции $x = \varphi(y)$, обратной к $y = f(x)$ и имеющей в точке y_0 непрерывные производные до n-го порядка включительно. Доказать, что

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}, \quad \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3[f''(x)]^2 - f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}.$$

41.2. Произведения множеств

Прежде чем рассмотреть вопрос о разрешимости систем уравнений, введем некоторые новые понятия.

Пусть $\boldsymbol{R}_x^n$ — n-мерное евклидово пространство, точки которого будем обозначать $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{R}_y^m$ — m-мерное евклидово пространство, точки которого будем обозначать $y = (y_1, \ldots, y_m)$, а $\boldsymbol{R}_{xy}^{n+m}$ — $(n + m)$-мерное евклидово пространство точек $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$.

Определение 1. *Пусть $A \subset \boldsymbol{R}_x^n$ и $B \subset \boldsymbol{R}_y^m$. Множество точек (x, y) пространства $\boldsymbol{R}_{xy}^{n+m}$ таких, что $x \in A$ и $y \in B$, называется произведением* множеств A и B и обозначается $A \times B$* (см. п. 1.2*). *Таким образом,*

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

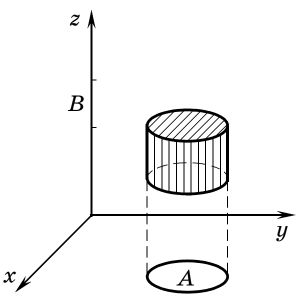


Рис. 39

Примеры. 1. Если $A = \boldsymbol{R}_x^n$, $B = \boldsymbol{R}_y^m$, то

$$A \times B = \boldsymbol{R}_x^n \times \boldsymbol{R}_y^m = \boldsymbol{R}_{xy}^{n+m}.$$

2. Пусть $n = 2$ и A — круг; $m = 1$ и B — отрезок. Тогда $A \times B$ — прямой круговой цилиндр (рис. 39).

3. Пусть $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in R_x^n$ и $A = P(x^{(0)}; \delta_1, \ldots, \delta_n) = \{x : |x_i - x_i^{(0)}| < \delta_i;$

* Применяется также термин *декартово произведение*.

$i = 1, 2, \ldots, n\}$ — прямоугольная окрестность точки $x^{(0)}$; пусть $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}) \in \boldsymbol{R}_y^m$ и $B = P(y^{(0)}; \eta_1, \ldots, \eta_m) = \{y : |y_j - y_j^{(0)}| < \eta_j,\ j = 1, 2, \ldots, m\}$ — прямоугольная окрестность точки $y^{(0)}$. Тогда

$$A \times B = \{(x, y) : |x_i - x_i^{(0)}| < \delta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$|y_j - y_j^{(0)}| < \eta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m\} =$$

$$= P((x^{(0)}, y^{(0)}); \delta_1, \ldots, \delta_n, \eta_1, \ldots, \eta_m) \qquad (41.6)$$

является прямоугольной окрестностью точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Очевидно и обратное: поскольку всякая прямоугольная окрестность точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ записывается формулой, стоящей в середине равенства (41.6), она всегда может быть представлена как произведение прямоугольных окрестностей точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Доказать, что если множества $A \subset R_x^n$ и $B \subset \boldsymbol{R}_y^m$ являются открытыми множествами соответственно в пространствах $\boldsymbol{R}_x^n$ и $\boldsymbol{R}_y^m$, то и их произведение $A \times B$ — открытое множество в пространстве $\boldsymbol{R}_{xy}^{n+m}$.

41.3. Неявные функции, определяемые системой уравнений

Рассмотрим условия, при которых система уравнений

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad x \in \boldsymbol{R}^n, \quad y \in \boldsymbol{R}^m, \qquad (41.7)$$

или, подробнее,

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ &F_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \end{aligned} \qquad (41.8)$$

однозначно разрешима относительно $y_1, \ldots, y_m$ в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$, в которой функция $F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Определение 2. *Пусть задана система функций $u_i = u_i(t_1, \ldots, t_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, имеющих в некоторой точке $t^{(0)}$ все частные*

производные первого порядка. Тогда матрица, составленная из частных производных этих функций в точке $t^{(0)}$,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} & \frac{\partial u_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t_1} & \frac{\partial u_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_m}{\partial t_1} & \frac{\partial u_m}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

или, короче,

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial t_j}\right), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

называется матрицей Якоби данной системы функций.*

Если $m = n$, то определитель матрицы Якоби называется *определителем Якоби*, или *якобианом*, системы функций $u_1, \dots, u_n$ по переменным $t_1, \dots, t_n$ и обозначается**: $\frac{\partial(u_1, \dots, u_n)}{\partial(t_1, \dots, t_n)}$.

Мы увидим в дальнейшем, что якобиан системы функций естественным образом возникает в различных вопросах теории функции многих переменных.

Прежде чем перейти к изложению основной теоремы, кратко поясним на простом примере (не оговаривая все детали) идею ее доказательства и покажем, каким образом в ее условиях возникает якобиан рассматриваемой системы. Пусть в какой-то окрестности точки (x_0, y_0, z_0) заданы непрерывно дифференцируемые функции F и Φ, причем $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $\Phi(x_0, y_0, z_0) = 0$. Допустим, что необходимо решить систему уравнений: $F(x, y, z) = 0$, $\Phi(x, y, z) = 0$ в некоторой окрестности указанной точки, найдя из нее переменные $y = \varphi(x)$ и $z = \psi(x)$, как такие непрерывные функции φ и ψ переменной x, что $\varphi(x_0) = y_0$, $\psi(x_0) = z_0$. Разрешив для этого, например, первое уравнение относительно z, получим $z = f(x, y)$. Подставив это выражение во второе уравнение и разрешив его относительно y, будем иметь $y = \varphi(x)$. Полагая $\psi(x) = f[x, \varphi(x)]$, получим искомое решение: $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$.

---

* К. Якоби (1804—1851) — немецкий математик.

**Применяется также обозначение $\frac{D(u_1, \dots, u_n)}{D(t_1, \dots, t_n)}$.

Возникает, конечно, вопрос о том, при выполнении каких условий возможно проделать указанные операции, или, точнее, когда существуют и однозначно определены все упомянутые выше функции. (Естественно, при этом надо выяснить, где, т. е. для каких значений переменных x и y, определены эти функции. Этот вопрос мы сейчас не будем подробно анализировать, чтобы не отвлекаться от основной идеи. Он будет рассмотрен при доказательстве теоремы 2 этого пункта.)

Для того чтобы одно из данных уравнений, например первое, было разрешимым в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) относительно переменной z, достаточно, чтобы (см. теорему 1′ в п. 41.1) $\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \neq 0$. Если $z = f(x, y)$ — соответствующее решение, то, для того чтобы уравнение, получающееся в результате подстановки этого решения во второе уравнение, $\Phi[x, y, f(x, y)] = 0$ было разрешимым относительно переменной y, достаточно, чтобы полная частная производная по y левой части получившегося равенства не обращалась в нуль в точке (x_0, y_0), т. е. чтобы в этой точке

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0.$$

Но, согласно п. 41.1,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

следовательно, подставляя это выражение в предыдущее неравенство, получим, что условие разрешимости можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial(F, \Phi)}{\partial(y, z)} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0 \quad \text{в точке } (x_0, y_0, z_0).$$

Из этого условия очевидно вытекает, что в точке (x_0, y_0, z_0) либо $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, либо $\frac{\partial \Phi}{\partial z} \neq 0$, т. е. одно из заданных уравнений разрешимо относительно z.

Таким образом, для заданной системы уравнений неравенство нулю в точке (x_0, y_0, z_0) якобиана $\frac{\partial(F, \Phi)}{\partial(y, z)}$ обеспечивает существование в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) решения вида $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$.

Рассмотрим теперь общий случай, т. е. решение системы уравнений (41.8).

Сформулируем условия, достаточные для того, чтобы эту систему можно было разрешить относительно переменных $y_1, \dots, y_n$, в результате чего получается система функций

$$\begin{aligned} &y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &y_m = f_m(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

задающая отображение $y = f(x)$ некоторой окрестности точки $x \in \boldsymbol{R}^n$ в m-мерном пространстве $\boldsymbol{R}^m$.

ТЕОРЕМА 2. *Если функции* $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, $i = 1, 2, \dots, m$, *непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$ *и*

$$F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\left.\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}\right|_{(x^{(0)},\, y^{(0)})} \neq 0,$$

то существуют такие окрестности U_x *и* U_y *точек* $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ *и* $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$ *соответственно в пространствах* $\boldsymbol{R}^n$ *и* $\boldsymbol{R}^m$, *что система уравнений* (41.8) *однозначно разрешима в окрестности* $U_x \times U_y$ *точки* $(x^{(0)}, y^{(0)})$ *относительно переменных* $y_1, \dots, y_m$. *Иначе говоря, для любого* $x \in U_x$ *существует, и притом единственное,* $y \in U_y$ *такое, что (см. обозначение* (41.7)) $F_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. *Если*

$$y = f(x) = \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_m), \end{cases} \quad x \in U_x,$$

— указанное решение, то все функции f_i, $i = 1, 2, \dots, m$, *непрерывно дифференцируемы на* U_x *и* $y^{(0)} = f(x^{(0)})$.

Таким образом, если выполняются предположения теоремы, то условие

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \ (x, y) \in U_x \times U_y$$

эквивалентно условию

$$y = f(x), \quad x \in U_x, \quad y \in U_y.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что утверждение: решение $y = f(x)$ системы уравнений (41.7) удовлетворяет условию $f(x^{(0)}) = y^{(0)}$, очевидно, непосредственно следует из утверждения о единственности решения $y = f(x) \in U_y$ при $x \in U_x$ и условий $F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ x^{(0)} \in U_x,\ y^{(0)} \in U_y$.

Для доказательства теоремы применим метод математической индукции. Для случая одного уравнения, т. е. когда $m = 1$, теорема была установлена нами в п. 41.1. Пусть теперь она верна для $m - 1$ уравнений ($m > 1$). Докажем, что тогда она имеет место и для m уравнений.

Покажем сначала, что каждое из уравнений (41.8), например $F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$, можно разрешить в окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ по крайней мере относительно одного переменного. Действительно, по условию теоремы, в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

поэтому в этой точке хотя бы один элемент последней строчки определителя Якоби отличен от нуля. Пусть для определенности это последний элемент:

$$\frac{\partial F_m(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y_m} \neq 0.$$

Отсюда, в силу теоремы 1′ п. 41.1, следует, что уравнение $F_m(x, y) = 0$ может быть разрешено относительно y_m в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Сформулируем это более точно. Обозначим через U окрестность точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$, в которой функции F_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемы, и положим $\tilde{y} \overset{\text{def}}{=} (y_1, \ldots, y_{m-1})$. Тогда найдутся прямоугольная окрестность U^{m+n-1} точки

$$(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)}) = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_{m-1}^{(0)}) \tag{41.9}$$

и окрестность U^1 точки $y_m^{(0)}$ такие, что $U^{m+n-1} \times U^1 \subset U$, и существует единственная определенная на U^{m+n-1} функция

$$y_m = \varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}), \tag{41.10}$$

удовлетворяющая следующим условиям: если

$$(x, \tilde{y}) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}) \in U^{m+n-1},$$

то

$$\varphi(x, \tilde{y}) = \varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}) \in U^1, \quad (41.11)$$

$$F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi(x, \tilde{y})) = 0. \quad (41.12)$$

Кроме того, согласно той же теореме 1′, функция $\varphi(x, \tilde{y})$ непрерывно дифференцируема на U^{m+n-1} и

$$\varphi(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)}) = y_m^{(0)}. \quad (41.13)$$

При этом если $(x, \tilde{y}) \in U^{m+n-1}$ и $y_m \in U^1$, то система (41.8) эквивалентна системе

$$F_j(x, y) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \quad (41.14)$$

$$y_m = \varphi(x, y).$$

Подставим в первые $m - 1$ уравнения системы (41.14) выражение (41.10). Тогда, введя обозначение

$$\Phi_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}) =$$

$$= F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1})),$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1, \quad (41.15)$$

получим следующую систему $m - 1$ уравнений с $m + n - 1$ неизвестными:

$$\Phi_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (41.16)$$

$$\Phi_{m-1}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}) = 0.$$

При этом для $(x, \tilde{y}) \in U^{m+n-1}$, $y_m \in U^1$ система уравнений

$$\Phi_j(x, \tilde{y}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$y_m = \varphi(x, \tilde{y}) \quad (41.17)$$

эквивалентна системе (41.14).

Покажем, что система (41.16) удовлетворяет условиям, отличающимся от тех, которым удовлетворяет система (41.8), только тем, что $m - 1$ заменено на m. Действительно, функции Φ_k, $k = 1, 2, \dots, m-1$, непрерывно дифференцируемы в окрестности U^{m+n-1} как композиции непрерывно дифференцируемых функций. Из условий $F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ и (41.15), (41.13) следует, что $\Phi_k(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)}) = 0$, $k = 1, 2, \dots, m-1$.

Докажем, что в точке $(x^{(0)}, \bar{y}^{(0)})$ (см. (41.9))

$$\frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_{m-1})}{\partial(y_1, \dots, y_{m-1})} \neq 0.$$

Для этого предварительно заметим, что из (41.15) следует, что

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_k} = \frac{\partial F_i}{\partial y_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}, \quad i, k = 1, 2, \dots, m-1, \tag{41.18}$$

а из (41.12) — что

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_k} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m-1. \tag{41.19}$$

Теперь в определителе $\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}$ к k-му столбцу прибавим последний столбец, умноженный на $\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}$, $k = 1, \dots, m-1$, от чего, как известно, значение определителя не изменится. Поэтому, использовав (41.18) и (41.19) и разложив получившийся определитель по элементам последней строки, получим

$$\left.\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}\right|_{(x^{(0)},\, y^{(0)})} =$$

$$= \left|\begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \\ \frac{\partial F_m}{d y_1} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{matrix}\right|_{(x^{(0)},\, y^{(0)})} =$$

$$= \left|\begin{matrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \\ \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{matrix}\right|_{(\bar{x}^{(0)},\, \bar{y}^{(0)})} =$$

$$= \frac{\partial F_m(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y_m} \left.\frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_{m-1})}{\partial(y_1, \dots, y_{m-1})}\right|_{(\bar{x}^{(0)},\, \bar{y}^{(0)})},$$

и так как левая часть равенства отлична от нуля, то отлична от нуля и правая, откуда

$$\left.\frac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{m-1})}\right|_{(x^{(0)},\, \bar{y}^{(0)})} \neq 0.$$

В силу выполнения для функций Φ_i, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, условий, аналогичных условиям для функций F_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, и согласно предположению индукции система уравнений (41.16) однозначно разрешима относительно переменных $y_1, \ldots, y_{m-1}$ в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, \bar{y}^{(0)})$. Точнее, пусть U^{m+n-1} — прямоугольная окрестность точки $(x^{(0)}, \bar{y}^{(0)})$, полученная при разрешении уравнения $F_m = 0$ относительно переменной y_m. Разложим ее в произведение прямоугольных окрестностей U'_x и $U'_{\bar{y}}$ точек $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ и $\bar{y}_1^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_{m-1}^{(0)})$ соответственно в пространствах $\boldsymbol{R}_x^n$ и $\boldsymbol{R}_{\bar{y}}^{m-1}$: $U^{m+n-1} = U'_x \times U'_{\bar{y}}$. Тогда существует окрестность $U_x \subset U'_x$ точки $x^{(0)}$, окрестность $U_{\bar{y}} \subset U'_{\bar{y}}$ точки $\bar{y}^{(0)}$ и единственная система функций

$$\begin{gathered} y_1 = f_1(x) = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{m-1} = f_{m-1}(x) = f_{m-1}(x_1, \ldots, x_n), \end{gathered} \tag{41.20}$$

определенных на множестве U_x и удовлетворяющих следующим условиям: если $x \in U_x$, то

$$(f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)) \in U_{\bar{y}} \tag{41.21}$$

и на U_x функции (41.20) непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют системе уравнений (41.16):

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_n, f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{41.22}$$

Важно заметить, что в силу единственности решения (41.20) системы (41.16) при $x \in U_x$, $\bar{y} \in U_{\bar{y}}$ и $y_m \in U^1$, система уравнений

$$y_k = f_k(x), \; k = 1, 2, \ldots, m-1, \;\; y_m = \varphi(x, \bar{y}) \tag{41.23}$$

эквивалентна системе (41.17).

Подставив выражения (41.20) в (41.10), получим функцию от x, определенную на U_x; обозначим ее через f_m:

$$\begin{aligned} y_m = \varphi(x_1, \ldots, x_n, f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)) = \\ = f_m(x_1, \ldots, x_n) = f_m(x). \end{aligned} \tag{41.24}$$

Покажем, что система функций

$$y_k = f_k(x_1, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, m \tag{41.25}$$

(см. (41.20) и (41.24)), и является искомой системой функций, удовлетворяющей требованиям, сформулированным в теореме. В самом деле, пусть $U_y = U_{\tilde{y}} \times U^1$; тогда если $x \in U_x$, то, в силу (41.21) и (41.11), $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in U_y$. Из (41.15), (41.22), (41.24) и (41.12) следует, что $F_i(x, f(x)) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, для всех $x \in U_x$. В силу теоремы 1′ и предположения индукции, функции (41.10) и (41.20), поэтому и функция (41.24) непрерывно дифференцируемы.

Таким образом, доказано, что отображение $f(x)$, задаваемое функциями (41.25), является непрерывно дифференцируемым решением системы уравнений (41.8) на множестве U_x, причем если $x \in U_x$, то $y = f(x) \in U_y$. Отметим еще, что если $x \in U_x$, то система (41.25) эквивалентна системе (41.23).

Остается доказать единственность решения системы уравнений (41.8). Для доказательства изобразим проделанные в процессе доказательства переходы от одних систем уравнений к другим, им эквивалентным, т. е. имеющим точно те же решения, системам в виде схемы следующим образом:

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

$$\Updownarrow$$

$$F_j(x, y) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m - 1,$$
$$y_m = \varphi(x, \tilde{y}).$$

$$\Updownarrow \quad \Phi_j(x, \tilde{y}) \equiv F_j(x, \tilde{y}, \varphi(x, \tilde{y})), \quad j = 1, 2, \dots, m - 1,$$

$$\Phi_j(x, \tilde{y}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m - 1,$$
$$y_m = \varphi(x, \tilde{y}).$$

$$\Updownarrow$$

$$y_j = f_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, m - 1,$$
$$y_m = \varphi(x, \tilde{y}).$$

$$\Updownarrow$$

$$f_m(x) \equiv \varphi(x, f_1(x), \dots, f_{m-1}(x)),$$
$$y_i = f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Двойные стрелки обозначают эквивалентность рассматриваемых систем уравнений, которая имеет место, во всяком случае, для $x \in U_x$, $y \in U_y$. Из этой эквивалентности и следует единственность решения (41.25) системы (41.8) в рассматриваемых окрестностях, откуда, как было отмечено выше, в силу условия $F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, вытекает, что $f(x^{(0)}) = y^{(0)}$. □

Доказанная теорема о неявных функциях является одной из основных теорем математического анализа и имеет много разнообразных приложений в различных его разделах. С некоторыми из них мы познакомимся в последующих частях нашего курса. Она является «чистой теоремой существования»: ни из ее формулировки, ни из приведенного ее доказательства не следует, вообще говоря, никакого конкретного метода для решения системы (41.8). Например, если все F_k, $k = 1, 2, \dots, m$, в указанной системе уравнений являются элементарными функциями, то, следуя схеме доказательства теоремы, вообще говоря, не удастся «найти в явном виде» все те функции, существование которых использовалось при проведении указанного доказательства, и получить решение системы так же в виде элементарных функций. И в действительности в этом случае решение системы уравнений (41.8), которое существует в силу указанной теоремы, не является, вообще говоря, набором элементарных функций (даже если эта система состоит из одного уравнения).

Конечно, если функции F_k элементарные и, следовательно, задаются некоторыми формулами, то решение системы (41.8) может быть найдено с любой степенью точности, т. е. принципиально с любой степенью точности можно составить таблицы значений этих решений. Фактическая же точность, с которой вычисляются решения, определяется, конечно, конкретной целью, для которой решается рассматриваемая система. Сама теорема 2 в этом случае дает объективную уверенность, что, проводя правильно соответствующие вычисления, мы действительно вычисляем искомое решение системы. Мы не будем останавливаться на численных методах решения систем уравнений; лишь некоторые вопросы численного решения уравнений рассмотрены в «Дополнении» в конце третьего тома.

Существенным является также то обстоятельство, что теорема 2, как и вообще теоремы подобного типа, дает качественные методы в данном случае для изучения свойств решений системы уравнений.

Интересно отметить, что частные производные решения системы (41.8) при выполнении условий теоремы 2 легко выражаются в явном виде через частные производные функций F_k, $k = 1, 2, \dots, m$. Действительно, чтобы найти частную производную $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, надо продифференцировать равенства (41. 8) по x_i, считая их тождествами по $x_1, \dots, x_n$, т. е. подставив в них их решения $y_j = y_j(x_1, \dots, x_n)$, $j = 1, \dots, m$. Тогда получим

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Эта система уравнений, линейных относительно $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, в силу того, что в рассматриваемой точке ее определитель не равен нулю:

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \neq 0,$$

имеет, и притом единственное, решение, которое может быть найдено, например, по правилу Крамера*.

В случае если нужно найти все производные $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$, целесообразно вычислить дифференциалы обеих частей указанных выше тождеств (41.8). Использовав инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_i}\, dx_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_j}\, dy_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Эта система линейных относительно $dy_1, \dots, dy_m$ уравнений, в силу того же условия $\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \neq 0$, имеет, и притом единственное, решение. Если его найти, то коэффициент при dx_i в выражении для dy_i и будет частной производной $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$.

Оба эти метода применимы и для вычисления производных высших порядков функций $y(x_1, \dots, x_n)$, являющихся решениями системы уравнений (41.8) (например, в предположении, что все функции F_k, $k = 1, 2, \dots, m$, имеют соответствую-

* Г. Крамер (1704—1752) — швейцарский математик.

щих порядков непрерывные производные). Применяя метод дифференциалов, следует, конечно, помнить, что дифференциалы порядка выше первого в случае, когда они выражаются через дифференциалы функций, имеют более сложный вид, чем когда они выражаются только через дифференциалы независимых переменных (см. п. 38.2).

Производные высших порядков функций $y_j(x_1, \ldots, x_n)$ можно получить последовательным дифференцированием и из выражений для первых производных $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, найденных по формулам Крамера из указанной ранее системы уравнений

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

в виде отношения двух определителей. Это отношение можно дифференцировать столько раз, сколько раз дифференцируемы функции F_k, $k = 1, \ldots, m$. При этом если все производные функций F_k, $k = 1, \ldots, m$, до порядка r включительно непрерывны, то будут непрерывными и все частные производные функций $y_j(x_1, \ldots, x_n)$, $j = 1, \ldots, m$, до того же порядка r.

Множество (называемое также часто классом) всех r раз непрерывно дифференцируемых в области G функций обозначается через $C^r(G)$. Таким образом, *если дополнительно к условиям теоремы 2* $F_k \in C^r(U)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, *где* U — *некоторая окрестность точки* $(x^{(0)}, y^{(0)})$, *то решения* $y_j = y_j(x_1, \ldots, x_n)$ *системы уравнений* (41.7) *также принадлежат классу* $C^r(U_x)$ *на некоторой окрестности* $U_x \subset U$ *точки* $x^{(0)}$.

41.4. Векторные отображения

При изучении дифференцируемых отображений (их определение будет дано ниже, в п. 41.6) пространство $\boldsymbol{R}^n$, в котором лежит отображаемое множество, и пространство $\boldsymbol{R}^m$, в которое происходит отображение, удобнее рассматривать как векторные евклидовы пространства (см. п. 35.4). Для простоты n-мерный вектор с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ будем обозначать тем же символом x, которым мы обозначали точку n-мерного точечного пространства с теми же координатами. Это, конечно, не приведет к недоразумениям, так как и точка n-мерного пространства и n-мерный вектор представляют собой упорядоченный набор n действительных чисел.

Пусть $X \subset \boldsymbol{R}^n$ и f: $X \to \boldsymbol{R}^m$, где теперь отображение f ставит в соответствие каждому вектору $x \in X$ некоторый вектор $y = f(x) \in \boldsymbol{R}^m$. Такие отображения будем называть *векторными*.

Если $e_1, \ldots, e_n$ — координатные векторы в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ (см. п. 35.4), $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ — координатные векторы в пространстве $\boldsymbol{R}^m$, $x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = (y_1, \ldots, y_m) = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j \varepsilon_j$ и $y = f(x)$, то каждая координата y_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, вектора y также является функцией от вектора $x \in X$ и, следовательно, функцией от его координат $x_1, \ldots, x_n$:

$$y_j = f_j(x) = f_j(x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, 2, \ldots, m. \qquad (41.30)$$

Как и в случае точечного пространства (см. (п. 36.2)), функции (41.30) называют *координатными функциями отображения* f и пишут $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Интерпретация n-мерных точек $(x_1, \ldots, x_n)$ как векторов не препятствует, конечно, рассмотрению таких свойств отображений, как их непрерывность и равномерная непрерывность. Поэтому все сказанное о непрерывных отображениях точечных множеств в п. 36.7 и 36.8 остается в силе при естественной интерпретации и для векторных отображений. Напомним еще, что для расстояния $\rho(x, y)$ между векторами x и y справедлива формула (см. формулу (35.53)) $\rho(x, y) = |x - y|$.

В качестве примера отметим, что длина $|x|$ вектора $x \in \boldsymbol{R}^n$ является непрерывной функцией в $\boldsymbol{R}^n$. Это следует из неравенства (35.52): поскольку для любых $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$ и $x \in \boldsymbol{R}^n$ справедливо неравенство

$$\big||x| - |x_0|\big| \leqslant |x - x_0|,$$

то

$$\lim_{x \to x_0} |x| = \lim_{|x - x_0| \to 0} |x| = |x_0|.$$

41.5. Линейные отображения

Рассмотрим специальный класс векторых отображений пространства $\boldsymbol{R}^n$ в $\boldsymbol{R}^m$, называемых линейными.

Определение 3. *Отображение* f: $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ *называется линейным* (*или, более полно, линейным однородным*), *если для любых двух векторов* $x' \in \boldsymbol{R}^n$, $x'' \in \boldsymbol{R}^n$ *и любых двух чисел* $\lambda' \in \boldsymbol{R}$, $\lambda'' \in \boldsymbol{R}$ *выполняется равенство*

$$f(\lambda' x' + \lambda'' x'') = \lambda' f(x') + \lambda'' f(x'').$$

Из этого определения по индукции следует, что при линейном отображении f любая конечная линейная комбинация векторов $x^{(j)} \in \boldsymbol{R}^n$ отображается в такую же линейную комбинацию образов $f(x^{(j)})$, $j = 1, 2, \ldots, k$, этих векторов

$$f\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f(x^{(j)}).$$

Обычно линейные однородные отображения называются *линейными операторами*. О линейном операторе $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ говорят, что он действует из $\boldsymbol{R}^n$ в $\boldsymbol{R}^m$.

Из определения линейного оператора непосредственно следует, что композиция $g \circ f$ линейных операторов $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ и $g: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^s$ также является линейным оператором $g \circ f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^s$.

Пусть $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ — линейный оператор. Образ каждого координатного вектора $e_j \in \boldsymbol{R}^n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, при отображении f является вектором пространства $\boldsymbol{R}^m$ и поэтому раскладывается по координатным векторам $\varepsilon_i \in \boldsymbol{R}^m$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим коэффициенты этого разложения через a_{ij}:

$$f(e_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \varepsilon_i.$$

Пусть $y = f(x)$, $x = \sum\limits_{j=1}^{m} x_j e_j$ и

$$y = \sum_{i=1}^{m} y_i \varepsilon_i. \tag{41.31}$$

Тогда, в силу линейности отображения f, получим

$$y = f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \varepsilon_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \varepsilon_i. \tag{41.32}$$

Сравнив коэффициенты разложения вектора y по координатным векторам $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ в (41.31) и (41.32), получим

$$y_1 = a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n \tag{41.33}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_m = a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n.$$

Наоборот, легко проверить, что всякое отображение $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$, координатные функции которого имеют вид (41.33), является линейным оператором.

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{41.34}$$

называется *матрицей линейного оператора f*.

Очевидно, что если (41.34) является матрицей линейного оператора f, то для любого $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$ имеет место (см. (41.32)) разложение

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \varepsilon_i. \tag{41.35}$$

Пример. Пусть π_i — оператор проектирования на i-ю координатную ось, т. е.

$$\pi_i(y) = \pi_i(y_1, \dots, y_m) = y_i \tag{41.36}$$

(i — фиксированное число среди чисел 1, 2, ..., m). Тогда π_i является линейным оператором с квадратной матрицей порядка m, состоящей из одних лишь нулей, кроме i-го элемента главной диагонали, равного единице:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

С помощью операторов проектирования π_i, $i = 1, 2, \dots, n$, легко устанавливается связь между произвольным векторным отображением $f\colon X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$ и его координатными функциями f_i (см. (41.30)):

$$f_i = \pi_i \circ f, \tag{41.37}$$

т. е. каждая координатная функция f_i, $i = 1, 2, \dots, m$, является композицией отображения f с оператором проектирования π_i.

Если $m = 1$, то линейный оператор $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ отображает пространство $\boldsymbol{R}^n$ во множество всех действительных чисел и называется обычно *линейным функционалом*.

В силу (41.33), всякий линейный функционал имеет вид

$$y = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n, \tag{41.38}$$

где $a_1, \dots, a_n$ — некоторые действительные числа.

Обозначив через a вектор с координатами $(a_1, \ldots, a_n)$, получим, что всякий линейный функционал $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ имеет вид $f(x) = (a, x)$, где через (a, x) обозначено скалярное произведение векторов a и x. Очевидно и обратное: каждое отображение вида $x \mapsto (a, x)$ является линейным функционалом $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$.

Напомним определения некоторых операций с матрицами (известных из алгебры). Если $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — прямоугольные матрицы с одинаковым числом строк и столбцов $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то их *сумма* $C = A + B$ определяется как матрица, элемент c_{ij} которой является суммой соответствующих элементов матриц A и B, т. е.

$$c_{ij} \overset{\text{def}}{=} a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Произведением $C = \lambda A$ *матрицы* A *на число* λ называется матрица, все элементы c_{ij} которой получаются из соответствующих элементов матрицы A умножением их на λ:

$$c_{ij} \overset{\text{def}}{=} \lambda a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Если число столбцов матрицы $A = (a_{ij})$ равно числу строк матрицы $B = (b_{jk})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, s$, то *произведение* $C = AB$ матриц A и B определяется как матрица, состоящая из элементов c_{ik}, которые определяются по формулам:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad k = 1, 2, \ldots, s.$$

Отметим два нужных нам для дальнейшего свойства линейных оператора.

1^0. *Если f и g — линейные операторы, $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$, $g\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$, а λ и μ — произвольные числа, то $\lambda f + \mu g$ также линейный оператор, действующий из $\boldsymbol{R}^n$ в $\boldsymbol{R}^m$, причем если A и B суть матрицы линейных операторов f и g, то $\lambda A + \mu B$ является матрицей оператора $\lambda f + \mu g$.*

Доказательство этого утверждения производится путем его непосредственной проверки: если

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

— координатные функции отображения f, а

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

— координатные функции отображения g, то для координатных функций отображения $\lambda f + \mu g$ будем иметь (при сложе-

нии и умножении на числа векторов их координаты складываются и умножаются на те же числа)

$$\lambda y_i + \mu z_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \mu \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})x_j,$$

т. е., во-первых, координатные функции отображения $\lambda f + \mu g$ являются линейными функциями, а во-вторых, элементами c_{ij} матрицы C отображения $\lambda f + \mu g$ являются числа $c_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$, т. е. элементы матрицы $C = \lambda A + \mu B$, где $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. □

2^0. *Если f и g — линейные операторы, f: $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$, g: $\boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^s$, то их композиция $g \circ f$ (или, короче, gf) также является линейным оператором $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^s$, а ее матрица равна произведению матриц отображений g и f.*

Снова выполним непосредственную проверку утверждения. Если

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

— координатные функции отображения f, а

$$z_k = \sum_{i=1}^{m} b_{ki}y_i, \quad k = 1, 2, \ldots, s,$$

— координатные функции отображения g, то

$$z_k = \sum_{i=1}^{m} b_{ki}y_i = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}\right)x_j,$$

т. е., во-первых, координатные функции композиции $g \circ f$ суть линейные функции, а во-вторых, элементы c_{kj} ее матрицы C получаются из элементов матриц a_{ij} и b_{ki} операторов f и g по правилу

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}. \tag{41.39}$$

Как было сказано, такая матрица $C = (c_{kj})$ и называется произведением матриц (b_{ki}) и (a_{ij}). □

Заметим, что каждый линейный оператор f: $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ является непрерывным отображением пространства $\boldsymbol{R}^n$, ибо все его координатные функции (41.33), будучи линейными, непрерывны.

Длина вектора $x \in \boldsymbol{R}^n$, как это отмечалось в п. 41.4, является непрерывной в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ функцией. Поэтому если f: $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ — линейный оператор, то функция $|f(x)|$, как композиция двух непрерывных функций, будет также непрерывной в $\boldsymbol{R}^n$.

Поскольку единичный шар $Q^n = \{x \in \boldsymbol{R}^n\colon |x| \leqslant 1\}$ является компактом, для всякого линейного оператора $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ сужение непрерывной функции $|f|\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ на шар Q^n, т. е. функция $|f|\colon Q^n \to \boldsymbol{R}$, ограничено:

$$\sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)| < +\infty. \qquad \textbf{(41.40)}$$

Определение 4. *Для линейного оператора (в частности, при $m = 1$ — для линейного функционала) $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ число $\sup\limits_{|x| \leqslant 1} |f(x)|$ называется его нормой* и обозначается через $\|f\|$:*

$$\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)|. \qquad \textbf{(41.41)}$$

В силу неравенства (41.40), норма любого линейного оператора конечна.

Оценим длину образа вектора $x \in \boldsymbol{R}^n$ через норму оператора f и длину x самого вектора. Для любого $x \neq 0$, $x \in \boldsymbol{R}^n$, вектор $\xi = \dfrac{x}{|x|}$ имеет длину $1 : |\xi| = \left|\dfrac{x}{|x|}\right| = \dfrac{1}{|x|}|x| = 1$. Поэтому, использовав линейность оператора f, свойство (35.50) длины вектора и определение (41.41), получим

$$|f(x)| = \left|f\left(|x|\,\frac{x}{|x|}\right)\right| = \left||x| f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| = |x|\left|f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \leqslant |x| \sup_{|\xi| \leqslant 1} |f(\xi)| = |x|\,\|f\|,$$

т. е.

$$|f(x)| \leqslant \|f\|\,|x|. \qquad \textbf{(41.42)}$$

Из этого неравенства следует, что при $|x| < 1$ справедливо неравенство $|f(x)| < \|f\|$. Вспомним, что непрерывная на компакте функция достигает на нем своего наибольшего значения (см. следствие теоремы 3 в п. 36.7). Поэтому функция $|f| : Q^n \to \boldsymbol{R}$, будучи непрерывной на компакте Q^n, достигает на нем своего наибольшего значения:

$$\|f\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)| = \max_{|x| \leqslant 1} |f(x)|,$$

а поскольку при $|x| < 1$ имеет место неравенство $|f(x)| < \|f\|$, то указанный максимум достигается при $|x| = 1$, т. е. на единичной сфере $S^{n-1} = \{x : |x| = 1\}$. Таким образом,

$$\|f\| = \max_{|x| = 1} |f(x)|. \qquad \textbf{(41.43)}$$

* Общее определение нормы будет дано в п. 58.2.

Отметим еще одно полезное выражение для нормы линейного оператора

$$\|f\| = \sup_{x \in \boldsymbol{R}^n,\ x \neq 0} \frac{|f(x)|}{|x|}. \qquad (41.44)$$

Докажем его. Используя снова свойство длины (35.50) вектора, линейность отображения f и формулу (41.41), получим

$$\sup_{x \in \boldsymbol{R}^n,\ x \neq 0} \frac{|f(x)|}{|x|} = \sup_{x \in \boldsymbol{R}^n,\ x \neq 0} \left| \frac{1}{|x|} f(x) \right| =$$

$$= \sup_{x \in \boldsymbol{R}^n,\ x \neq 0} \left| f\left(\frac{x}{|x|} \right) \right| = \sup_{|\xi| = 1} |f(\xi)| = \|f\|.$$

Нетрудно оценить норму $\|f\|$ линейного оператора f через элементы его матрицы (41.34). Замечая, что квадрат длины вектора равен сумме квадратов его координат, применяя формулу (41.35) и неравенство Коши—Шварца (35.2), будем иметь

$$|f(x)|^2 = \left| \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \varepsilon_i \right|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) |x|^2 .$$

Отсюда для каждого $x \neq 0$, $x \in \boldsymbol{R}^n$:

$$\frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Поэтому, в силу (41.44),

$$\|f\| = \sup_{x \in \boldsymbol{R}^n,\ x \neq 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}. \qquad (41.45)$$

Тем самым «алгебраическим путем» доказано неравенство, из которого еще раз следует неравенство (41.40).

41.6. Дифференцируемые отображения

Напомним определение символа «o малое» для отображений (см. п. 36.3) в специальном, нужном нам случае.

Пусть $X \subset \boldsymbol{R}^n$ и $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$.

Отображение α: $X \to \boldsymbol{R}^m$ называется бесконечно малым (или, что то же самое, «o малым») при $x \to x_0$ по сравнению с функцией $|x - x_0|^n$ ($|x - x_0|$ — длина вектора $x - x_0$):

$$\alpha(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

если существует такое отображение $\varepsilon\colon X \to \boldsymbol{R}^m$, что для всех точек $x \in X$, принадлежащих некоторой фиксированной окрестности точки x_0, определены отображения $\alpha(x)$ и $\varepsilon(x)$ (в частности, для $x = x_0$), имеет место равенство

$$\alpha(x) = \varepsilon(x)\,|x - x_0|^n$$

и

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0,$$

где 0 — нулевой элемент пространства $\boldsymbol{R}^m$.

Отображение $\alpha(x)$ определено в точке $x_0 \in X$, поэтому отображение $\varepsilon(x)$ также определено в этой точке, следовательно, согласно определению предела, и непрерывно в ней: $\varepsilon(x_0) = 0$.

Элементы n-мерных пространств будем рассматривать здесь как векторы. Для векторных выражений с символом «o малое» сохраняются обычные правила действий с ними, например $o(x) + o(x) = o(x)$ при $x \to x_0$ и т. п.

Перейдем теперь к определению дифференцируемых векторных отображений. Предварительно напомним, что функция n переменных $f\colon X \to \boldsymbol{R}$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$*, определенная в окрестности точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, называется *дифференцируемой* в этой точке, если существуют такие постоянные $a_1, \ldots, a_n$ $\left(\text{они являются частными производными функции } f \text{ в этой точке: } a_i = \frac{\partial f(x)}{dx_i}\right)$, что

$$f(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, \ldots, x_n) = \\ = a_1 h_1 + \ldots + a_n h_n + o(h), \quad h \to 0, \qquad (41.46)$$

где $h = (h_1, \ldots, h_n)$.

Линейное отображение (линейный функционал) $(h_1, \ldots, h_n) \mapsto$ $\mapsto a_1 h_1 + \ldots + a_n h_n$ в формуле (41.46) называется дифференциалом функции f в точке x. Обозначив его через $Df = Df(x)$, получим

$$Df(x)(h) = a_1 h_1 + \ldots + a_n h_n. \qquad (41.47)$$

Таким образом, определение дифференцируемости (41.46) можно представить в виде

$$f(x + h) = f(x) + Df(x)(h) + o(h), \quad h \to 0.$$

Аналогично определяется и дифференцируемость отображения в общем случае.

---

* Через $\boldsymbol{R}$, как всегда, обозначается множество всех действительных чисел.

Определение 5. *Отображение $f\colon X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, определенное в некоторой окрестности точки $x \in X$, называется дифференцируемым в этой точке, если существует такое линейное отображение (линейный оператор) $l = l(x)\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$, что*

$$f(x + h) = f(x) + l(x)(h) + o(h), \quad h \to 0, \quad h \in \boldsymbol{R}^n. \quad (41.48)$$

Линейный оператор $l(x)$ называется *дифференциалом отображения f в точке x и обозначается через $Df(x)$, или, более подробно, $(Df)(x)$.* Используя это обозначение, определение дифференцируемости (41.48) можно переписать в виде

$$f(x + h) = f(x) + Df(x)(h) + o(h), \quad h \to 0. \qquad (41.49)$$

Матрица дифференциала $Df(x)$ (см. (41.34)) *называется производной отображения f в точке x и обозначается через $f'(x)$.*

Отметим, что из формулы (41.49) сразу следует, что отображение, дифференцируемое в точке x, непрерывно в ней:

$$\lim_{h \to 0} f(x + h) = f(x).$$

ТЕОРЕМА 3. *Если отображение $f\colon X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, дифференцируемо в точке $x \in X$, то его дифференциал в этой точке определяется однозначно.*

СЛЕДСТВИЕ. *Дифференциал линейного отображения совпадает с самим отображением.*

Доказательство теоремы. Пусть наряду с равенством (41.48) (в котором для простоты записи вместо $l(x)$ будем писать только l) выполняется также равенство

$$f(x + h) = f(x) + l_1(h) + o(h), \quad h \to 0, \qquad (41.50)$$

где $l_1\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$, l_1 — линейный оператор. Вычитая одно из этих равенств из другого, получим

$$l(h) - l_1(h) = o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

т. е. существует такое отображение $\varepsilon(h)$ на некоторой окрестности V нуля пространства $\boldsymbol{R}^n$ в пространство $\boldsymbol{R}^m$, т. е. $\varepsilon\colon V \to \boldsymbol{R}^m$, что $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ и для всех $h \in V$ имеет место равенство

$$|l(h) - l_1(h)| = |\varepsilon(h)|\,|h|. \qquad (41.51)$$

Возьмем теперь произвольное $k \in \boldsymbol{R}^n$; тогда для всех достаточно малых чисел t будем иметь $tk \in V$. Поэтому в (41.51) для таких t можно взять $h = tk$:

$$|l(tk) - l_1(tk)| = |\varepsilon(tk)|\,|tk|.$$

Поскольку $|tk| = |t|\,|k|$ и отображения l и l_1 линейны, будем иметь

$$l(tk) - l_1(tk) = t[l(k) - l_1(k)],$$

поэтому

$$|l(k) - l_1(k)| = |\varepsilon(tk)|\,|k|. \tag{41.52}$$

Но $\lim\limits_{t \to 0} tk = 0$, следовательно, в силу свойства функции ε, имеем также $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(tk) = 0$. Переходя к пределу при $t \to 0$ в (41.52), получим $|l(k) - l_1(k)| = 0$, т. е. для любого $k \in \boldsymbol{R}^n$ получим

$$l(k) = l_1(k).$$

Это и означает, что $l = l_1$. □

Доказательство следствия. Пусть f: $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ — линейный оператор. Тогда в силу его линейности для любых $x \in \boldsymbol{R}_n$ и $h \in \boldsymbol{R}^n$

$$f(x + h) = f(x) + f(h),$$

т. е. равенство (41.48) выполняется при $l = f$ и $o(h) \equiv 0$. В силу единственности дифференциала $Df(x) = f$. □

ТЕОРЕМА 4 (линейность дифференциала относительно отображений). *Если отображения f: $X \to \boldsymbol{R}^m$ и g: $X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$ дифференцируемы в точке $x \in X$, то при любых числах λ и μ линейная комбинация $\lambda f + \mu g$ также дифференцируема в точке x и*

$$D(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda Df(x) + \mu Dg(x).$$

Доказательство. В силу дифференцируемости отображений f и g в точке x, имеем (см. (41.49))

$$f(x + h) = f(x) + Df(x)(h) + o(h), \quad h \to 0,$$

$$g(x + h) = g(x) + Dg(x)(h) + o(h), \quad h \to 0;$$

отсюда

$$\lambda f(x + h) + \mu g(x + h) =$$

$$= [\lambda f(x) + \mu g(x)] + [\lambda Df(x) + \mu Dg(x)](h) + o(h), \quad h \to 0.$$

Так как $\lambda Df(x) + \mu Dg(x)$ является линейным отображением (см. п. 41.5), то, в силу определения 5, оно является дифференциалом отображения $\lambda f + \mu g$. □

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $X \subset \boldsymbol{R}^n$, $Y \subset \boldsymbol{R}^m$, f: $X \to Y$, g: $Y \to \boldsymbol{R}^s$, *причем отображение* f *дифференцируемо в точке* $x \in X$, *а* g — *в точке* $f(x)$. *Тогда композиция* $g \circ f$ *дифференцируема в точке* x *и ее дифференциал в этой точке равен композиции дифференциалов отображений* f *и* g:

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x). \qquad (41.53)$$

СЛЕДСТВИЕ. *Если выполнены условия теоремы, то производная композиции отображений равна произведению производных*:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x). \qquad (41.54)$$

Как видно из приведенных формул, благодаря удачному выбору определений и символики в формулировках теорем имеет место полная аналогия с одномерным случаем.

Доказательство. В силу дифференцируемости отображения f, имеем

$$(g \circ f)(x + h) = g(f(x + h)) =$$
$$= g(f(x) + Df(x)(h) + o(h)), \;\; h \to 0. \qquad (41.55)$$

Таким образом, аргумент функции g в точке $y = f(x)$ получил приращение

$$k = Df(x)(h) + o(h). \qquad (41.56)$$

Поэтому из (41.55) в силу дифференцируемости функции g имеем

$$(g \circ f)(x + h) = g(y + k) = g(y) + Dg(y)(k) + o(k), \; k \to 0. \qquad (41.57)$$

Поскольку (см. неравенство (41.42))

$$|Df(x)(h)| \leqslant \|Df(x)\|\,|h|, \qquad (41.58)$$

где норма $\|Df(x)\|$ линейного оператора $Df(x)$ является неотрицательным числом, то для функции $k = k(h)$, определенной равенством (41.56), получим

$$\lim_{h \to 0} k = 0. \qquad (41.59)$$

Более того, справедлива оценка

$$|k| \leqslant \|Df(x)\|\,|h| + |o(h)|, \quad h \to 0,$$

а так как при достаточно малых h имеет место неравенство $|o(h)| < |h|$, то для таких h справедлива и оценка

$$|k| \leqslant (\|\mathrm{D}f(x)\| + 1)|h|. \qquad (41.60)$$

Далее, из определения $o(k)$ (см. (41.47) явствует, что существует такая функция $\varepsilon(k)$, что

$$\lim_{k \to 0} \varepsilon(k) = 0 \qquad (41.61)$$

и $o(k) = \varepsilon(k)|k|$. Поэтому, в силу (41.60), для указанных достаточно малых h выполняется неравенство

$$|o(k)| = |\varepsilon(k)|\,|k| \leqslant \varepsilon(k)(\|Df(x)\| + 1)|h|. \qquad (41.62)$$

А поскольку из (41.59) и (41.61) вытекает, что $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(k) = 0$ и, следовательно,

$$\varepsilon(k)(\|Df(x)\| + 1)|h| = o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

из (41.62) имеем

$$o(k) = o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Это означает, что формулу (41.57) можно переписать в виде

$$(g \circ f)(x + h) = g(y) + Dg(y)(k) + o(h), \quad h \to 0, \qquad (41.63)$$

где k задается по формуле (41.56).

Рассмотрим теперь среднее слагаемое в правой части равенства (41.63). В силу линейности отображения $Dg(y)$, имеем

$$Dg(y)(k) = Dg(y)(Df(x)(h)) + o(h)) =$$
$$= Dg(y)(Df(x)(h)) + Dg(y)o(h), \quad h \to 0. \qquad (41.64)$$

Вследствие неравенства (41.42) будем иметь $|Dg(y)o(h)| \leqslant \|Dg(y)\|\,|o(h)|$, поэтому

$$Dg(y)o(h) = o(h), \; h \to 0;$$

следовательно, из (41.64) получим

$$Dg(y)(k) = Dg(y)(Df(x)(h)) + o(h) =$$
$$= (Dg(y) \circ Df(x))(h) + o(h), \quad h \to 0.$$

Подставляя полученное для $Dg(y)$ выражение в (41.63) и принимая во внимание, что $y = f(x)$, будем окончательно иметь

$$(g \circ f)(x + h) = g(f(x)) + (Dg(f(x)) \circ Df(x))(h) + o(h), \quad h \to 0.$$

Композиция линейных операторов является линейным оператором, поэтому, в силу единственности дифференциала, оператор $Dg(f(x)) \circ Df(x)$ является дифференциалом композиции $f \circ g$, т. е. формула (41.53) доказана.

Формула (41.54) сразу следует из нее, поскольку при композиции линейных операторов их матрицы перемножаются. □

ТЕОРЕМА 6. *Отображение $f = (f_1, \dots, f_m)$: $X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, дифференцируемо в точке $x \in X$ в том и только в том случае, когда все его координатные функции f_i: $X \to \boldsymbol{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, дифференцируемы в этой точке. В этом случае элементы a_{ij} матрицы дифференциала $Df(x)$ являются соответствующими частными производными координатных функций*:

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Иначе говоря, производная $f'(x)$ является матрицей Якоби системы функции f_i (см. определение 2 п. 41.3)

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad (41.65)$$

и называется также *матрицей Якоби отображения* f в точке x.

Доказательство. 1. Координатные функции $f_i = \pi_i \circ f$ (см. (41.37)) являются композицией двух дифференцируемых отображений: отображения f, которое дифференцируемо в точке x по условию, и проекции π_i (см. (41.36)), которая, как всякий линейный оператор $\boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$, дифференцируема на всем пространстве $\boldsymbol{R}^m$. Следовательно, согласно теореме 5, функции f_i, $i = 1, 2, \dots, m$, дифференцируемы в точке x.

2. Пусть все координатные функции $f_i = \pi_i \circ f$ отображения дифференцируемы в точке x. В силу (41.46), это означает, что существуют такие постоянные a_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, что

$$f_i(x + h) = f_i(x) + a_{i1}h_1 + \dots + a_{in}h_n + o_i(h), \quad h \to 0, \qquad (41.66)$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Отсюда, как известно (см. (37.2)), следует, что коэффициенты a_{ij} при приращениях h_j аргументов x_j являются соответствующими частными производными функций f_i:

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \qquad (41.67)$$

Обозначим через l: $\boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ линейный оператор с матрицей (a_{ij}). Так как $(o_1(h), \dots, o(h)) = o_n(h))^*$, то равенства (41.66) можно записать в виде

$$f(x+h) = f(x) + l(h) + o(h), \quad h \to 0.$$

Это и означает дифференцируемость отображения f, причем из (41.67) следует справедливость формулы (41.65). □

З а м е ч а н и е 1. В силу формул (41.54) и (41.65), следствие из теоремы 5 означает, что матрица Якоби композиции отображений f и g равна произведению матриц Якоби этих отображений.

Это, впрочем, непосредственно следует и из формулы дифференцирования сложной функции: если $z_k = g_k(y_1, \dots, y_m)$, $k = 1, 2, \dots, s$, а $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, m$, то (см. (37.26))

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial z_k}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

что, согласно правилу умножения матриц (см. п. 41.6), и означает, что матрица $\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_j}\right)$ является произведением матриц $\left(\frac{\partial z_k}{\partial y_i}\right)$ и $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$,

$$\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial z_k}{\partial y_i}\right)\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right).$$

Определение 6. *В случае $m = n$ определитель* $\det\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)$ *матрицы Якоби* (41.65) *называется определителем Якоби или якобианом отображения f: $X \to \boldsymbol{R}^n$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$ в точке $x \in X$ и обозначается* (см. п. 41.3)

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \quad \textit{или} \quad \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}.$$

З а м е ч а н и е 2. Из алгебры известно, что при умножении квадратных матриц их определители перемножаются; по-

---

* Запись $(o_1(h), \dots, o_n(h)) = o(h)$ означает, что вектор, координаты которого являются бесконечно малыми более высокого порядка, чем h, сам является бесконечно малой более высокого порядка, чем h при $h \to 0$. Совпадение в данном случае обозначений вектора и его координат связано с тем, что мы, чтобы не усложнять символики, выбрали для n-мерного вектора обозначение x, в котором не отражена его размерность. Она делается ясной, когда вектор записан с помощью координат: $x = (x_1, \dots, x_n)$.

этому при выполнении условий теоремы 5 в случае $m = n = s$ якобиан композиции отображений f и g равен произведению якобианов отображений f и g:

$$\frac{\partial(z_1, \dots, z_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \frac{\partial(z_1, \dots, z_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}. \qquad (41.68)$$

Действительно,

$$\frac{\partial(z_1, \dots, z_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \det\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_j}\right) = \det\left(\frac{\partial z_k}{\partial y_i}\right)\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \det\left(\frac{\partial z_k}{\partial y_i}\right)\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial(z_1, \dots, z_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

З а м е ч а н и е 3. Пусть $X \subset \boldsymbol{R}^n$ и Id: $X \to X$ — тождественное отображение множества X на себя. В координатной форме оно записывается в виде условия равенства координат точек образа и прообраза при этом отображении, т. е. координатные функции имеют вид

$$f_i(x) = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (x_1, \dots, x_n) \in X.$$

Если $x^{(0)}$ — внутренняя точка множества X, то эти функции можно дифференцировать в этой точке, и поскольку $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 0$ при $i \neq j$ и $\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1$, матрица Якоби тождественного отображения является единичной матрицей

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $U \subset \boldsymbol{R}^n$, $V \subset \boldsymbol{R}^n$ и f: $U \to V$ — взаимно-однозначное (инъективное) отображение, а f^{-1}: $f(U) \to U$ — обратное ему. Тогда для любой точки $x \in U$ имеем $f^{-1}(f(x)) = x$, т. е. композиция $f^{-1} \circ f$ является тождественным отображением.

Пусть отображение f дифференцируемо в точке $x_0 \in U$ (следовательно, x_0 — внутренняя точка множества U, ибо только для таких точек определено понятие дифференцируемости), а обратное отображение f^{-1} дифференцируемо в точке $f(x_0)$. Поскольку $f^{-1} \circ f$ — тождественное отображение, то в силу формулы (41.54) имеем

$$(f^{-1})'f' = (f^{-1} \circ f)' = (\mathrm{Id})' = E. \qquad (41.69)$$

Перейдя от этого равенства матриц к их якобианам, получим

$$\det (f^{-1})' \det f' = 1, \tag{41.70}$$

так как $\det E = 1$.

Если отображение f задано координатными функциями (41.30), то формулу (41.70) можно переписать в виде

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = 1. \tag{41.71}$$

Из этой формулы следует, что при сделанных предположениях как якобиан отображения f в точке x, так и якобиан обратного отображения f^{-1} в точке $f(x)$ не обращаются в нуль и

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}}. \tag{41.72}$$

Эта формула является очевидным обобщением формулы для производной обратной функции одного переменного: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

41.7. Отображения с неравным нулю якобианом. Принцип сохранения области

Прежде всего рассмотрим вопрос о существовании отображения, обратного данному. Как мы знаем, в случае $n = 1$ для непрерывно дифференцируемой на некотором отрезке функции условие необращения в нуль ее производной (которое влечет за собой ее строгую монотонность) является достаточным для существования обратной ей однозначной непрерывно дифференцируемой функции. В случае же произвольного n дело существенно осложняется: соответствующие точечные условия, налагаемые на дифференциальные свойства отображения, позволяют утверждать лишь, что локально, т. е. в окрестности точки, существует обратное отображение.

Для простоты формулировок утверждений введем удобную для этих целей терминологию.

Определение 7. *Отображение f: $X \to \boldsymbol{R}^m$, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, дифференцируемое в каждой точке $x \in X$, называется дифференцируемым отображением множества X.*

Очевидно, если отображение дифференцируемо на множестве X, то, какова бы ни была точка $x \in X$, согласно определению 8, отображение f определено в некоторой ее окрестности, т. е. X — открытое множество.

Согласно теореме 6, отображение $f = (f_1, \ldots, f_n)$ дифференцируемо на множестве X тогда и только тогда, когда на этом множестве дифференцируемы все его координатные функции $f_1, \ldots, f_n$. Если все координатные функции непрерывно дифференцируемы на X, т. е. все их первые частные производные непрерывны на X, то отображение f называется *непрерывно дифференцируемым отображением множества* X.

Ясно, что из дифференцируемости непрерывно дифференцируемых функций (см. теорему 3 в п. 37.2) следует дифференцируемость непрерывно дифференцируемых отображений.

Напомним, что взаимно-однозначное непрерывное отображение, у которого обратное отображение также непрерывно, называется гомеоморфизмом (определение 5 в п. 36.7).

Определение 8. *Гомеоморфное отображение f множества G на множества D, где G и D — открытые множества пространства $\boldsymbol{R}^n$, называется диффеоморфным отображением или диффеоморфизмом, если как оно само, так и обратное ему отображение $f^{-1}\colon D \to G$ непрерывно дифференцируемы.*

Определение 9. *Отображение называется локально гомеоморфным (локально диффеоморфным) в некоторой точке, если у этой точки и у ее образа существуют окрестности гомеоморфно (диффеоморфно) отображающиеся друг на друга при данном отображении.*

ТЕОРЕМА 7. *Если у непрерывно дифференцируемого отображения его якобиан в некоторой точке не равен нулю, то в этой точке отображение локально диффеоморфно.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Непрерывно дифференцируемое отображение с якобианом, не равным нулю, отображает открытое множество на открытое.*

СЛЕДСТВИЕ 2 (принцип сохранения области). *Образ области при непрерывно дифференцируемом отображении с якобианом, не равным нулю, является областью.*

Доказательство. Пусть G — открытое множество в пространстве $\boldsymbol{R}_x^n$, $y = f(x)$ — непрерывно дифференцируемое отображение множества G в пространство $\boldsymbol{R}_y^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, пусть f_i — координатные функции этого отображения, $i = 1, 2, \dots, n$:

$$y = f(x) = \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \tag{41.73}$$

и

$$\left.\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0, \quad x^{(0)} \in G. \tag{41.74}$$

Введем обозначения

$$F_i(x, y) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{41.75}$$

$$y^{(0)} = f(x^{(0)}). \tag{41.76}$$

Функции F_i определены на множестве $G \times \boldsymbol{R}^n$ и $\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$, при этом выполняются следующие условия:

$$F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) \underset{\substack{(41.75)\\(41.76)}}{=} 0,$$

$$\left.\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \underset{\substack{(41.75)\\(41.76)}}{=} \left.\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0. \tag{41.77}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{41.78}$$

В силу формул (41.75), эта система равносильна системе

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - y_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и, следовательно, уравнению

$$y = f(x). \tag{41.79}$$

Из теоремы о неявных функциях (см. п. 41.3) следует, что систему уравнений (41.78) или, что то же самое, уравнение (41.79) можно разрешить относительно $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ (отметим, что в системе (41.79) роли переменных x и y по сравнению с системой (41.8) поменялись местами: там система разрешалась относительно y, а здесь — относительно x). Это означает, что существуют такие окрестности U и V соответственно точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$:

$$x^{(0)} \in U, \quad y^{(0)} \in V, \tag{41.80}$$

и для каждой точки $y \in V$ уравнение (41.79) имеет в окрестности U единственное решение, которое обозначим $x = g(y)$. Это решение непрерывно дифференцируемо.

Таким образом, для любой точки $y \in V$ существует, и при этом единственная, точка $x \in U$, а именно, $x = g(y)$ такая, что

$$f(g(y)) = y, \tag{41.81}$$

и, следовательно, $f(U) \supset V$.

Рассмотрим отображение f только на открытом множестве U, иначе говоря, рассмотрим сужение f_U отображения f на множество U. Обозначим через U_0 прообраз множества V при этом отображении:

$$U_0 = f_U^{-1}(V). \tag{41.82}$$

В силу формул (41.80) и (41.82),

$$f_U(U_0) = V, \quad x^{(0)} \in U_0.$$

Поскольку f — непрерывно дифференцируемое на U отображение, оно и непрерывно на U. Поэтому, согласно теореме 10 из п. 36.10, множество U_0, будучи прообразом открытого множества U при отображении f, является также открытым и, следовательно, окрестностью точки $x^{(0)}$.

Из того, что при отображении f_U для каждой точки $y \in V$ существует единственная точка $x = g(y) \in U$, отображающаяся в точку y, следует, что отображение f_{U_0}, являющееся сужением отображения f_U на множество U_0, взаимно-однозначно отображает множество U_0 на множество V и поэтому $f_{U_0}^{-1} = g$ на V.

Итак, отображение $f_{U_0}^{-1}$, обратное отображению f_{U_0}, однозначно и дифференцируемо на множестве V. Это и означает, что отображение f локально диффеоморфно в точке $x^{(0)}$. □

Первое следствие из теоремы вытекает из того, что при неравенстве нулю якобиана во всех точках открытого множества каждая точка образа этого множества, согласно доказанной теореме, имеет окрестность, на которую отображается некоторая окрестность прообраза этой точки. Таким образом, в этом случае каждая точка образа имеет окрестность, принадлежащую образу отображаемого открытого множества. Это и означает, что этот образ также является открытым множеством.

Поскольку область есть линейно связное открытое множество и непрерывный образ линейно связного множества также является линейно связным множеством (теорема 8 в п. 36.9), второе следствие вытекает из первого.

З а м е ч а н и я. 1. Условие того, что якобиан не равен нулю в рассматриваемой точке открытого множества, существенно для справедливости утверждения доказанной теоремы. Действительно, например, уже для случая $n = 1$ функция $f(x) = x^2$ отображает открытое множество $(-1, 1)$ в неоткрытое $[0, 1)$ (здесь якобианом является производная и $f'(0) = 0$).

2. Было доказано, что однозначное обратное отображение для отображения с неравным нулю якобианом существует только локально, т. е. в окрестности каждой точки. В целом отображение с неравным нулю якобианом не имеет, вообще говоря, однозначного обратного отображения.

Покажем это на примере отображения $w = z^2$, $z \in \boldsymbol{C}$, $w \in \boldsymbol{C}$, единичного круга с выколотым центром: $0 < |z| < 1$, которое отображает это множество на себя. Такое отображение не взаимно-однозначно, так как обратное отображение $z = \sqrt{w}$ двузначно: для любого w, $0 < |w| < 1$, существует два значения корня $z = \sqrt{w}$, $0 < |z| < 1$. Покажем, что якобиан этого отображения не равен нулю. Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$; тогда $u + iv = (x + iy)^2$, поэтому $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Отсюда

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix} = 4(x^2 + y^2) \neq 0 \quad \text{при} \quad z \neq 0.$$

41.8. Неявные функции, определяемые уравнением, в котором нарушаются условия единственности. Особые точки плоских кривых

Мы уже знаем, что если координаты некоторой точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ удовлетворяют уравнению

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0 \tag{41.83}$$

и в этой точке производная $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ не равна нулю, то при соответствующих условиях, налагаемых на непрерывность самой функции F и указанной производной, уравнение (41.83) разрешимо в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ относительно x_i и решение является непрерывно дифференцируемой функцией остальных координат.

Естественно, возникает вопрос: что будет в случае, когда в точке $x^{(0)}$ частные производные по всем аргументам обращаются в нуль — определяет в этом случае уравнение (41.83) какие-либо функции или нет? Остановимся на этом вопросе. Ввиду его сложности ограничимся рассмотрением двумерного случая. Итак, будем рассматривать уравнение

$$F(x, y) = 0, \tag{41.84}$$

где функция F определена и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) такой, что

$$F(x_0, y_0) = 0 \tag{41.85}$$

и

$$F_x(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0) = 0. \tag{41.86}$$

Покажем, что и при выполнении этих условий уравнение (41.84) иногда может быть разрешено в окрестности точки (x_0, y_0) относительно одной из переменных, так что получится непрерывно дифференцируемая функция; однако это можно сделать, вообще говоря, не единственным образом. Таким образом, условие

$$F_x^2(x_0, y_0) + F_y^2(x_0, y_0) \neq 0, \tag{41.87}$$

которое в нашем случае (см. (41.76)) не выполняется и которое позволяет применить теорему 1 о неявных функциях к одному из переменных, естественно назвать условием однозначной разрешимости уравнения (41.84).

Определение 10. *Точка* (x_0, y_0), *координаты которой удовлетворяют условиям* (41.85) *и* (41.86), *называется особой точкой уравнения* (41.84).

Особая точка называется изолированной, если существует ее окрестность, в которой она является единственной особой точкой.

Геометрически это означает, что если уравнение (41.84) является неявным представлением какой-либо кривой, то в окрестности особых точек уравнения кривая, вообще говоря, не является графиком некоторой гладкой однозначной функции (как это имеет место при выполнении условия (41.87)); здесь возможны разные особенности, которые мы сейчас и рассмотрим.

Введем для краткости записи обозначения

$$F_{xx}(x_0, y_0) = F^0_{xx}, \quad F_{xy}(x_0, y_0) = F^0_{xy}, \quad F_{yy}(x_0, y_0) = F^0_{yy}.$$

ТЕОРЕМА 8. *Пусть функция $F(x, y)$ определена и дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности изолированной особой точки (x_0, y_0) уравнения* (41.84) *и пусть*

$$F^0_{xx}F^0_{xy} - F^{0^2}_{xy} \neq 0.$$

Тогда если

$$F^0_{xx}F^0_{yy} - F^{0^2}_{xy} > 0, \tag{41.88}$$

то (x_0, y_0) является изолированным решением уравнения (41.84), *т. е. существует окрестность точки (x_0, y_0), никакая точка которой, кроме (x_0, y_0), не удовлетворяет уравнению* (41.84); *если же*

$$F^0_{xx}F^0_{yy} - F^{0^2}_{xy} < 0, \tag{41.89}$$

то уравнение (41.84) *разрешимо в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), но не однозначно: имеются две различные непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие уравнению* (41.77). *Точка (x_0, y_0) называется в этом случае двойной точкой.*

Например, если

$$F^0_{yy} \neq 0, \tag{41.90}$$

то существуют две дифференцируемые функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, определенные в некоторой окрестности точки x_0 и такие, что в этой окрестности $F(x, f_1(x)) = 0$, $F(x, f_2(x)) = 0$, причем $f_1(x_0) = f_2(x_0) = y_0$, а производные функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точке x_0 являются различными корнями уравнения

$$F^0_{xx} + 2F^0_{xy}\,k + F^0_{yy}k^2 = 0^* \tag{41.91}$$

и, следовательно, непрерывны.

---

* Корни этого уравнения вещественны и различны в силу условий (41.88) и (41.90).

Доказательство. Пусть выполнено условие (41.88). Вместе с (41.86) оно достаточно для наличия строгого экстремума функции $F(x, y)$ в точке (x_0, y_0) (см. теорему 3 в п. 40.2). Поэтому существует окрестность U точки (x_0, y_0) такая, что при $(x, y) \in U$ и $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ либо всегда $F(x, y) > F(x_0, y_0)$, либо всегда $F(x, y) < F(x_0, y_0)$, и так как $F(x_0, y_0) = 0$, то $F(x, y) \neq 0$ для всех $(x, y) \in U$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, т. е. (x_0, y_0) является изолированным решением уравнения (41.84).

Пусть теперь выполнено условие (41.89). Разложим функцию $F(x, y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки (x_0, y_0) до слагаемых второго порядка; тогда, приняв во внимание условия (41.85) и (41.86), получим

$$F(x, y) = \frac{1}{2}[F_{xx}^0(x - x_0)^2 + 2F_{xy}^0(x - x_0)(y - y_0) + \\ + F_{yy}^0(y - y_0)^2] + o(r^2), \qquad (41.92)$$

где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Положим $x - x_0 = r \cos \varphi$, $y - y_0 = r \sin \varphi$. Очевидно, (r, φ) — полярные координаты точки (x, y), причем в качестве начала полярной системы координат взята точка (x_0, y_0). В этих координатах

$$F(x, y) = \frac{r^2}{2}(F_{xx}^0\cos^2 \varphi + 2F_{xy}^0\cos \varphi \sin \varphi + F_{yy}^0\sin^2 \varphi) + o(r^2) = \\ = \frac{r^2}{2}P(\varphi) + o(r^2), \qquad (41.93)$$

где

$$P(\varphi) = F_{xx}^0\cos^2 \varphi + 2F_{xy}^0\cos \varphi \sin \varphi + F_{yy}^0\sin^2 \varphi. \qquad (41.94)$$

Предположим теперь, что выполнено также и условие (41.90).

Если $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, то $P(\varphi) = F_{yy}^0$ и

$$F(x, y) = \frac{r^2}{2}F_{yy}^0 + o(r^2), \quad r \to 0.$$

Следовательно, в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) при $r \neq 0$ и $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ имеем $F(x, y) \neq 0$*. Поэтому при отыскании решений уравнения $F(x, y) = 0$ в достаточно малой окрестности

* В дальнейшем будем предполагать, что окрестность точки (x_0, y_0) выбрана таким образом, что это условие выполняется.

точки (x_0, y_0) можно предположить, что $\varphi \neq \frac{\pi}{2}(2m + 1)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда

$$P(\varphi) = \cos^2 \varphi(F^0_{xx} + F^0_{xy}\operatorname{tg} \varphi + F^0_{yy}\operatorname{tg}^2 \varphi). \qquad (41.95)$$

Пусть k_1 и k_2 — корни уравнения (41.91) и пусть $\varphi_1 = \operatorname{arctg} k_1$ и $\varphi_2 = \operatorname{arctg} k_2$. Тогда

$$\varphi_1 \neq \pm\pi/2, \quad \varphi_2 \neq \pm\pi/2, \qquad (41.96)$$

и из (41.95) следует, что

$$P(\varphi) = \cos^2 \varphi(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_1)(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_2). \qquad (41.97)$$

Из формулы (41.97) видно, что $P(\varphi)$ при $\varphi \neq \frac{\pi}{2}(2m + 1)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, обращается в нуль только для $\varphi = \varphi_1 + m\pi$ и $\varphi = \varphi_2 + m\pi$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, причем при переходе аргумента через эти значения она меняет знак. Нам будет удобно интерпретировать $P(\varphi)$ как функцию точки окружности C с центром в точке (x_0, y_0) и радиуса, равного 1 (такой радиус выбирается для простоты, чтобы длины дуг совпадали с углами φ).

Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим через $U_1 = U_1(\varepsilon)$ открытый угол, определяемый неравенством $\varphi_1 - \varepsilon < \varphi < \varphi_1 + \varepsilon$, т. е.

$$U_1 = \{(r, \varphi) : \varphi_1 - \varepsilon < \varphi < \varphi_1 + \varepsilon\},$$

соответственно положим

$$U_2 = \{(r, \varphi) : \varphi_2 - \varepsilon < \varphi < \varphi_2 + \varepsilon\};$$

при этом выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы U_1 и U_2 не пересекались и не содержали в себе полуоси ординат, а значит, и вообще вертикальных полупрямых (последнее всегда можно выполнить вследствие условий (41.96)).

Пусть U_1^* и U_2^* — углы, центрально-симметричные с U_1 и U_2 относительно точки (x_0, y_0):

$$U_1^* = \{(r, \varphi) : \varphi_1 + \pi - \varepsilon < \varphi < \varphi_1 + \pi + \varepsilon\},$$

$$U_2^* = \{(r, \varphi) : \varphi_2 + \pi - \varepsilon < \varphi < \varphi_2 + \pi + \varepsilon\}.$$

В силу выбора числа ε множества U_1, U_2, U_1^* и U_2^* попарно не пересекаются (рис. 40).

Рассмотрим теперь $P(\varphi)$ как функцию точки указанной выше окружности C. Точку окружности C, которой соответствует полярный угол φ, будем для простоты также обозначать через φ. Удалим из указанной окружности интервалы с цент-

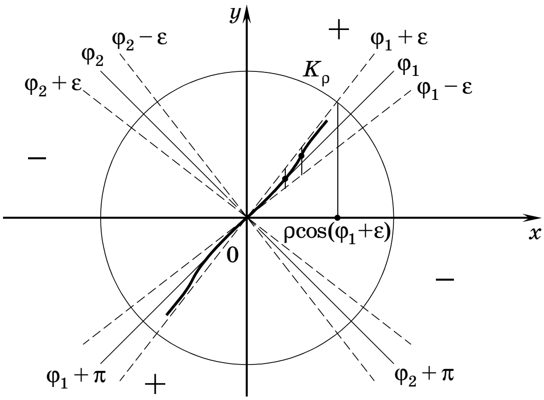


Рис. 40

рами в точках φ_1, φ_2, $\varphi_1 + \pi$ и $\varphi_2 + \pi$ длины $2\varepsilon^*$; в силу выбора $\varepsilon > 0$, эти интервалы не имеют общих точек. Оставшееся множество, которое обозначим через B, является ограниченным и замкнутым, а следовательно, компактом. На B функция $P(\varphi)$ непрерывна и не обращается в нуль, поэтому

$$\inf_{\varphi \in B} |P(\varphi)| = \mu > 0. \tag{41.98}$$

Обозначим через K_ρ замкнутый круг с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом ρ: $K_\rho = \{(r, \varphi) : 0 \leqslant r \leqslant \rho\}$, а через L_ρ обозначим множество, которое получается вычитанием (в теоретико-множественном смысле, см. п. 1.1) множеств U_1, U_2, U_1^* и U_2^* из круга K_ρ. Функция $P(\varphi)$ не зависит от r, поэтому на множестве L_ρ, в силу (41.98), имеем

$$\inf_{(r,\varphi) \in L_\rho} |P(\varphi)| = \mu > 0.$$

Теперь, замечая, что из (41.93) следует

$$F(x, y) = \frac{r^2}{2}\,[P(\varphi) + \alpha(r, \varphi)], \tag{41.99}$$

где $\lim\limits_{r \to 0} \alpha(r, \varphi) = 0$, выберем $\rho > 0$ так, чтобы при $r \leqslant \rho$ выполнялось неравенство

$$|\alpha(r, \varphi)| \leqslant \mu. \tag{41.100}$$

---

* Интегралом длины 2ε на окружности с центром в точке, полярный угол которой равен φ_0, называется множество ее точек, полярные углы φ которых удовлетворяют неравенству $\varphi_0 - \varepsilon < \varphi < \varphi_0 + \varepsilon$.

Тогда из (41.99) следует, что для всех точек $(r, \varphi) \in L_\rho$ выражение, стоящее в правой части формулы (41.99), имеет тот же знак, что и $P(\varphi)$.

Множество L_ρ состоит из четырех замкнутых секторов (см. рис. 40), на каждом из которых, за вычетом их центра, функция $P(\varphi)$, а значит, в силу выбора ρ, и функция $F(x, y)$ принимают значения одного и того же знака, а на соседних секторах — разных знаков. Отметим, что функция $F(x, y)$ в силу своей непрерывности не меняет знак и при переходе через прямую $x = x_0$, соответствующую исключенным из рассмотрения значениям $\varphi = \pm\, \pi/2$, так как была выбрана такая окрестность точки (x_0, y_0), что в этой окрестности на прямой $x = x_0$ функция $F(x, y)$ не обращается в нуль.

Рассмотрим теперь угол $U_1 = U_1(\varepsilon)$. Пусть для определенности $0 \leqslant \varphi_1 < \pi/2$. Пересечение замыкания $\overline{U}_1$ угла U_1 с вертикальной прямой $x = x^*$, $x_0 < x^* \leqslant x_0 + \rho\cos(\varphi_1 + \varepsilon)$, представляет собой отрезок, на верхнем и нижнем концах которого функция $F(x^*, y)$ принимает значения разного знака. Функция $F(x^*, y)$, рассматриваемая как функция одного переменного y при фиксированном x^*, будучи непрерывной на указанном отрезке, обращается в некоторой его точке y^* в нуль, т. е. для каждого x^*, где $x_0 < x^* \leqslant x_0 + \rho\cos(\varphi_1 + \varepsilon)$, существует по крайней мере одна точка y^* такая, что

$$F(x^*, y^*) = 0, \quad (x^*, y^*) \in U_1(\varepsilon) \cap K_\rho. \tag{41.101}$$

Определим $y = f_1(x)$ как функцию, ставящую в соответствие числу x^* число y^*:

$$f_1(x^*) = y^*, \quad x_0 < x^* \leqslant x_0 + \rho\cos(\varphi_1 + \varepsilon).$$

Покажем, что при достаточно малых ε и ρ функция f_1 определена однозначно, т. е. существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\rho > 0$, что при заданном x^* условия (41.101) однозначно определяют y^*. Допустим противное. Возьмем последовательности $\varepsilon_n \to 0$ и $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда существуют две последовательности точек с одинаковыми абсциссами x_n и разными ординатами y_n' и y_n'' такие, что

$$(x_n, y_n') \in U_1(\varepsilon_n) \cap K_{\rho_n}, \quad F(x_n, y_n') = 0,$$

$$(x_n, y_n'') \in U_1(\varepsilon_n) \cap K_{\rho_n}, \quad F(x_n, y_n'') = 0.$$

Тогда, в силу теоремы Ролля, на отрезке $[y_n', y_n'']$ прямой $x = x_n$ найдется точка y_n такая, что

$$F_y(x_n, y_n) = 0, \tag{41.102}$$

при этом, очевидно, $(x_n, y_n) \in U_1(\varepsilon_n) \cap K_{\rho_n}$; по условию (см. (41.86)) мы имели еще

$$F_y(x_0, y_0) = 0. \tag{41.103}$$

По формуле конечных приращений, примененной к функции $F_y(x, y)$,

$$F_y(x_n, y_n) - F_y(x_0, y_0) = F_{yx}(\xi_n, \eta_n)(x_n - x_0) + F_{yy}(\xi_n, \eta_n)(y_n - y_0),$$
$$(\xi_n, \eta_n) \in U_1(\varepsilon_n) \cap K_{\rho_n},$$

откуда, в силу (41.102) и (41.103),

$$F_{xy}(\xi_n, \eta_n) + F_{yy}(\xi_n, \eta_n)\frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = 0. \tag{41.104}$$

Пусть $(x_n, y_n) = (r_n, \psi_n)$. Очевидно, $|\psi_n - \varphi_1| < \varepsilon_n$; поэтому из условия $\varepsilon_n \to 0$ следует, что $\psi_n \to \varphi_1$ при $n \to \infty$, и так как $\operatorname{tg} \psi_n = \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}$, то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = \operatorname{tg} \varphi_1 = k_1. \tag{41.105}$$

Переходя к пределу в равенстве (41.104) при $n \to \infty$, в силу (41.105), имеем

$$F_{xy}^0 + F_{yy}^0 k_1 = 0, \quad \text{т. е.} \quad k_1 = -\frac{F_{xy}^0}{F_{yy}^0};$$

подставляя это значение корня в уравнение (41.91), получим

$$F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^{0^2} = 0,$$

что противоречит условию (41.89).

Итак, функция $y = f_1(x)$ действительно однозначно определяется при достаточно малых ε и ρ. В дальнейшем будем предполагать, что ε и ρ выбраны именно таким образом.

Доопределим функцию f_1 в точке x_0, положив $y_0 = f_1(x_0)$. Очевидно, по самому определению функции $f_1(x)$ имеем

$$F(x, f_1(x)) = 0, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \rho \cos(\varphi_1 + \varepsilon).$$

Покажем, что в точке x_0 у функции $f_1(x)$ существует правосторонняя производная и что она равна k_1. Пусть произвольно фиксировано $\varepsilon > 0$. Из изложенного выше следует существование такого $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$, что соответствующая часть графика функции $f_1(x)$ целиком лежит в $U_1(\varepsilon) \cap K_\rho$:

$$(x, f_1(x)) \in U_1(\varepsilon) \cap K_\rho, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \rho \cos(\varphi_1 + \varepsilon). \tag{41.106}$$

Возьмем $\delta = \rho \cos(\varphi_1 + \varepsilon)$, и пусть x таково, что $0 < x - x_0 < \delta$, $y = f_1(x)$ и $(x, y) = (r, \varphi)$. В силу (41.106), имеем $|\varphi - \varphi_1| < \varepsilon$. Это

означает, что $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \varphi = \varphi_1$ и поэтому $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_1$. Поскольку $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$, из доказанного следует, что

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \operatorname{tg} \varphi_1,$$

т. е. у функции $f_1(x)$ существует производная справа в точке x_0, равная $\operatorname{tg} \varphi_1 = k_1$.

Подобным же образом из рассмотрения поведения функции $F(x, y)$ в угле U_1^* доказывается, что при некотором $\delta' > 0$ на отрезке $[x_0 - \delta', x_0]$ существует функция $f_1(x)$ такая, что при $x_0 - \delta' \leqslant x < x_0$:

$$F(x, f_1(x)) = 0, \quad (x, f_1(x)) \in U_1^* \quad \text{и} \quad f_1(x_0) = y_0, \quad f_1'(x_0) = k_1$$

(под производной, естественно, в данном случае понимается левосторонняя производная).

Если число ρ взять столь малым, чтобы в круговой окрестности радиуса ρ точки (x_0, y_0) не содержалось других особых точек уравнения (41.84), кроме (x_0, y_0), то функция $f_1(x)$ будет дифференцируемой и во всех точках $x \neq x_0$. Это сразу следует из доказанной выше теоремы о неявных функциях (см. теорему 1 в п. 41.1). В результате мы и получили функцию $f_1(x)$, определенную в некоторой окрестности точки x_0 и обладающую всеми требуемыми свойствами.

Аналогично доказывается существование функции $f_2(x)$, также являющейся решением уравнения (41.84) и удовлетворяющей условиям теоремы, причем график этой функции проходит в углах U_2 и U_2^* и через точку (x_0, y_0).

Если $F_{yy}^0 = 0$, а $F_{xx}^0 \neq 0$, то все рассмотрения проводятся аналогичным образом; следует только поменять местами роль осей Ox и Oy, так что в результате получим решения уравнения (41.77) в виде функций от переменной y: $f_1(y)$ и $f_2(y)$.

Если, наконец, $F_{xx}^0 = F_{yy}^0 = 0$ и, значит, $F_{xy}^0 \neq 0$, то проще всего выполнить замену переменных: $x = \xi + \eta$, $y = \xi - \eta$ (повернуть оси координат на угол $\pi/4$). Тогда (как легко убедиться непосредственно дифференцированием) $F_{\xi\xi}^0 = -F_{\eta\eta}^0 = 2F_{xy}^0 \neq 0$, $F_{\xi\eta}^0 = 0$, т. е. в новой координатной системе получим уже изученный случай. В частности, уравнение (41.31) для угловых коэффициентов касательных в особой точке в координатной системе ξ, η имеет вид $k^2 - 1 = 0$, и, значит, $k_{1,2} = \pm 1$. Иначе говоря, биссектрисы координатных углов, являющиеся координатными осями в ста-

рой системе координат x, y, суть касательные к графикам двух функций, которые определяются уравнением (41.84) в некоторой окрестности рассматриваемой особой точки. □

Если уравнение $F(x, y) = 0$ является неявным представлением какой-либо кривой, то в особой точке (x_0, y_0) этого уравнения кривая может (хотя и не обязана) иметь какие-либо особенности, т. е. в окрестности особой точки этого уравнения кривая, вообще говоря, не является графиком некоторой гладкой однозначной функции.

Следует напомнить также, что множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (41.84), вообще говоря, не является всегда кривой в смысле данного ранее определения кривой (см. п. 16.2*), задаваемой параметрически.

Примеры. **1.** Пусть дано уравнение $y^2(x^2 + y^2 + 1) = 0$. Здесь $F(x, y) = y^2(x^2 + y^2 + 1)$, поэтому $F_x = 2xy^2$, $F_y = 2x^2y + 4y^3 + 2y$. Условия наличия особой точки (41.85) и (41.86) дают в этом случае

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0.$$

Таким образом, особой точкой является (0, 0). Однако в этой точке кривая, определяемая уравнением, не имеет особенности, так как оно (множитель $x^2 + y^2 + 1$ нигде не обращается в нуль) равносильно уравнению $y = 0$ и рассматриваемая кривая является графиком явной функции $y = f(x) \equiv 0$. Отметим, что, как легко убедиться, в этом случае в точке (0, 0)

$$F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 = 0. \qquad (41.107)$$

2. Для уравнения

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0 \qquad (41.108)$$

условия (41.86) превращаются в следующую систему уравнений:

$$2x^3 + 2xy^2 - x = 0,$$
$$2y^3 + 2x^2y - y = 0.$$

Сложив и вычтя эти уравнения, получим систему

$$(x + y)(2x^2 + 2y^2 - 1) = 0,$$
$$(x - y)(2x^2 + 2y^2 - 1) = 0.$$

Отсюда либо $x = y = 0$, либо $2x^2 + 2y^2 - 1 = 0$, однако точка (x, y), координаты которой удовлетворяют последнему соотношению, не является корнем уравнения (41.108) $\left(\text{для нее } x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\text{, и, значит, ни один из сомножителей левой части (41.108) не обращается в нуль}\right)$.

Таким образом, единственной особой точкой является (0, 0). Легко проверить, что здесь выполняется условие (41.88), и,

значит, точка (0, 0) является изолированным корнем уравнения (41.108). Геометрически, как это сразу видно: уравнение (41.108) задает единичную окружность и ее центр (0, 0) (это множество, очевидно, не является носителем никакой кривой, заданной параметрически в смысле п. 16.2*).

3. Для уравнения

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \tag{41.109}$$

условия (41.86) наличия особой точки приводят к системе уравнений

$$x^2 - ay = 0,$$
$$y^2 - ax = 0,$$

откуда либо $x = y = 0$ и эта точка удовлетворяет уравнению (41.109), либо $x = a$, $y = a$, но координаты этой точки не являются решением уравнения (41.109). Снова здесь (0, 0) — единственная особая точка. Нетрудно убедиться, что при этом выполняются условия (41.89), и, значит, (0, 0) является двойной точкой.

Геометрически для кривой, неявным представлением которой является уравнение (41.109) (она называется «декартов лист», и мы с ней уже встречались в п. 14.5); точка (0, 0) является точкой *самопересечения* (см. рис. 73 в первом томе).

4. Для уравнения

$$y^2 - x^3 = 0 \tag{41.110}$$

(0, 0) является особой точкой; в ней выполняется уже условие (41.107), и тем самым в этом случае не выполняются условия теоремы 6. Геометрически кривая, выражаемая уравнением (41.110) и называемая полукубической параболой $y = \pm x^{3/2}$, имеет в точке (0, 0) касательную и расположена в окрестности этой точки по одну сторону от нормали.

Точки такого типа называются *точками возврата* (рис. 41).

5. Для уравнения

$$y^2 - x^4 = 0 \tag{41.111}$$

(0, 0) также является особой точкой, и снова здесь выполняется условие (41.107). Уравнение (41.111), очевидно, распадается на два уравнения: $y = x^2$ и $y = -x^2$, которые задают две параболы, имеющие в точке (0, 0) общую касательную.

Особые точки, в некоторой окрестности которых уравнение (41.84) задает две непрерывно дифференцируемые кривые, имеющие в точке (x_0, y_0) общую касательную, называются *точками самоприкосновения* (рис. 42) этих двух кривых.

Может случиться, что при выполнении условия (41.107) особая точка окажется изолированным решением уравнения (41.84), или его двойной точкой.

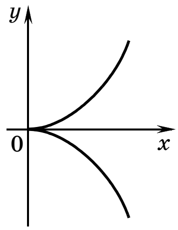


Рис. 41

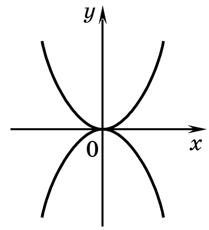


Рис. 42

В заключение дадим некоторые пояснения к уравнению (41.91). Если (x_0, y_0) — особая точка уравнения (41.84), то после параллельного переноса начала координат в точку (x_0, y_0) уравнение (41.84) примет вид

$$F^0_{xx}x^2 + 2F^0_{xy}xy + F^0_{yy}y^2 + o(x^2 + y^2) = 0 \qquad (41.112)$$

(здесь через x и y обозначены координаты точки в новой системе координат, а индексом 0 наверху обозначены значения частных производных в точке (0, 0) этой системы), откуда с точностью до бесконечно малых более высокого порядка наше уравнение можно записать следующим образом:

$$F^0_{xx}x^2 + 2F^0_{xy}xy + F^0_{yy}y^2 = 0. \qquad (41.113)$$

В случае выполнения условия (41.89) левая часть уравнения (41.113) распадается на два действительных множителя, каждый из которых, приравненный нулю, и дает касательные к двум ветвям кривой в точке (0, 0) (см. (41.91)). В случае же выполнения условия (41.88) левая часть уравнения (41.113) распадается на два комплексных множителя: «касательные мнимы». Это естественно, так как здесь говорить о касательной не имеет смысла, ибо в этом случае особая точка является изолированной.

Это замечание особенно удобно использовать для определения характера особой точки в случае алгебраической кривой, т. е. кривой, заданной уравнением

$$P(x, y) = 0, \qquad (41.114)$$

где $P(x, y)$ — многочлен от двух переменных x и y. Если (0, 0) — особая точка этого уравнения, то из условий (41.85) и (41.86) следует, что этот многочлен не содержит ни свободного члена, ни членов первого порядка, т. е. уравнение (41.114) имеет вид

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + Q(x, y) = 0,$$

где $Q(x, y)$ — многочлен, все члены которого по крайней мере третьего порядка. Характер поведения решений этого уравне-

ния вблизи нуля определяется его главной частью, т. е. уравнением
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$
которое является уравнением (41.113) для данного случая, ибо, как легко видеть, здесь $a = F^0_{xx}$, $b = F^0_{xy}$ и $c = F^0_{yy}$.

Если же точка (0, 0) удовлетворяет уравнению (41.114), но не является особой, то (41.114) имеет вид
$$Ax + By + R(x, y) = 0, \quad A^2 + B^2 > 0,$$
где $R(x, y)$ — многочлен, все члены которого имеют порядок не ниже второго. Из теоремы о неявных функциях (см. теорему 1 в п. 41.1) следует, что уравнение $Ax + By = 0$ является в этом случае уравнением касательной в точке (0, 0) к графику единственного в некоторой окрестности этой точки решения уравнения (41.114).

41.9. Замена переменных

Часто в различных вопросах математического анализа и в его приложениях при изучении той или иной формулы, содержащей какие-либо функции и их производные (обыкновенные или частные), оказывается целесообразным перейти к другим независимым переменным, а иногда и к другим функциям, которые связаны с функциями, входящими в рассматриваемую формулу, определенными соотношениями. Все эти преобразования делаются на основании правил дифференцирования сложных и неявных функций. Рассмотрим несколько примеров.

Пусть $u = u(x, y)$. Преобразуем выражения $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ к полярным координатам r и φ. Первое из этих выражений является квадратом длины градиента ∇u функции u, т. е. равно $|\nabla u|^2$, а второе имеет специальное обозначение Δu:
$$|\Delta u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \tag{41.115}$$
$$\Delta u \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{41.116}$$

Символ Δ, указывающий на применение к функции u операции (41.116), называется оператором Лапласа*.

Из формул, связывающих декартовы координаты с полярными,
$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \tag{41.117}$$

* П. Лаплас (1749—1827) — французский механик и математик.

находим

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi. \quad (41.118)$$

Применим к функции $u(x, y)$ формулы дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi.$$

Разрешим эти равенства относительно $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r} \quad (41.119)$$

и подставим получившиеся выражения в (41.115)

$$|\nabla u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2.$$

Теперь перейдем к вычислению выражения (41.116). Продифференцируем формулы (41.117) сначала по x, затем по y

$$\begin{cases} 1 = \cos\varphi\dfrac{\partial r}{\partial x} - r\sin\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ 0 = \sin\varphi\dfrac{\partial r}{\partial x} + r\cos\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = \cos\varphi\dfrac{\partial r}{\partial y} - r\sin\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ 1 = \sin\varphi\dfrac{\partial r}{\partial y} + r\cos\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{cases}$$

Разрешим получившиеся системы относительно $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}. \quad (41.120)$$

Продифференцируем теперь формулы (41.119) по x и y; тогда, использовав (41.120), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\varphi - \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\varphi + \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Подставив получившиеся выражения в (41.116), будем иметь

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

В случае, когда в преобразуемое выражение входит не одна, а несколько производных данного порядка, удобно применять метод вычисления не производных, а дифференциалов. Например, считая независимыми переменными x и y, найдем выражения для дифференциалов dr и $d\varphi$. Из формул (41.117) имеем

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi, \quad dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi,$$

отсюда

$$dr = \cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy, \;\; d\varphi = -\frac{\sin\varphi}{r}\, dx + \frac{\cos\varphi}{r}\, dy \qquad (41.121)$$

(отметим, что из этих формул также сразу получаются формулы (41.120)).

Для функции $u = u(x, y)$ имеем

$$du = \frac{\partial u}{\partial r}\, dr + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\, d\varphi =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right) dy. \qquad (41.122)$$

В выражении для дифференциала du коэффициенты у dx и dy являются производными $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, поэтому из (41.122) сразу получаются обе формулы (41.119). Найдем далее вторые дифференциалы d^2r и $d^2\varphi$ из (41.121)

$$d^2r = -\sin\varphi\, d\varphi\, dx + \cos\varphi\, d\varphi\, dy =$$

$$= \frac{\sin^2\varphi dx^2 - 2\cos\varphi\sin\varphi dx dy + \cos^2\varphi dy^2}{r},$$

$$d^2\varphi = -\left(\frac{\cos\varphi}{r}\, dx + \frac{\sin\varphi}{r}\, dy\right) d\varphi + \left(\frac{\sin\varphi}{r^2}\, dx - \frac{\cos\varphi}{r^2}\, dy\right) dr =$$

$$= \frac{2\cos\varphi\sin\varphi dx^2 - 2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) dx dy - 2\cos\varphi\sin\varphi dy^2}{r^2}.$$

Теперь из (41.122) для d^2u получим

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\, dr^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\, dr\, d\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\, d\varphi^2 + \frac{\partial u}{\partial r}\, d^2r + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\, d^2\varphi =$$

$$= \left(\cos^2\varphi\, \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) dx^2 + 2(\ldots)\, dx\, dy + (\ldots)\, dy^2.$$

Отсюда и получаются выражения для $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ как соответственно коэффициенты при dx^2, $2dx\,dy$ и dy^2.

Аналогичные методы применимы, конечно, и в случае, когда производится какая-либо другая замена переменных $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, когда имеются производные высших порядков, а также когда речь идет о функциях большего числа переменных.

УПРАЖНЕНИЕ 6. Преобразовать выражение $|\nabla u|^2$, где $u = u(x, y)$, к ортогональным координатам ξ, η, т. е. таким координатам, что

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} = 0.$$

Задача 9. В n-мерном пространстве преобразовать выражение $|\nabla u|^2$, где $u = u(x_1, \dots, x_n)$, к ортогональным координатам $\xi_1, \dots, \xi_n$, т. е. таким координатам, что при $i \neq k$ выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} = 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, n.$$

§ 42
Зависимость функций

42.1. Понятие зависимости функций. Необходимое условие зависимости функций

Определение 1. *Пусть на открытом множестве $G \subset \boldsymbol{R}^n$ заданы непрерывно дифференцируемые функции*

$$y_i = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in G. \qquad (42.1)$$

Если существуют открытое множество D в пространстве $\boldsymbol{R}^{m-1}_{y_1, \dots, y_{m-1}}$ и непрерывно дифференцируемая на D функция $\Phi(y_1, \dots, y_{m-1})$ такие, что в любой точке $x \in G$ выполняются условия $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)) \in D$ и $\Phi(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)) = \varphi_m(x)$, то функция φ_m называется зависимой на множестве G от функций $\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$.

Определение 2. *Если среди функций системы* (42.1) *есть функция, зависимая от остальных на множестве G, то эта система называется зависимой на множестве G.*

Если ни одна функция системы (42.1) *не зависит от остальных на множестве G, то эта система называется независимой на G.*

Иногда для краткости вместо выражения «зависимая (независимая) система функций» будем просто говорить «зависимые (соответственно независимые) функции».

В вопросе зависимости системы функций (42.1) фундаментальную роль играет матрица Якоби этой системы

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{42.2}$$

где i — номер строки, j — номер столбца.

ТЕОРЕМА 1 (необходимое условие зависимости функций). *Пусть $m \leqslant n$ и система функций* (42.1) *зависима на открытом множестве G. Тогда в любой точке этого множества ранг матрицы Якоби* (42.2)* *этой системы меньше m.*

Доказательство. По условию, система функций (42.1) зависима на G, т. е. по крайней мере одна из этих функций зависит от остальных. Пусть для определенности φ_m зависит от $\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$:

$$\varphi_m(x) = \Phi(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)), \quad x \in G,$$

где Φ — непрерывно дифференцируемая функция от $(m - 1)$ аргументов $y_1, \dots, y_{m-1}$. Отсюда

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \quad \text{для всех} \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Эта формула показывает, что m-я строка матрицы Якоби (42.2) в каждой точке $x \in G$ является линейной комбинацией остальных строк этой матрицы, и, значит, ранг матрицы Якоби (42.2) меньше m в каждой точке $x \in G$. □

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $m = n$ и система функций* (42.1) *зависима на открытом множестве G. Тогда ее якобиан $\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ равен нулю во всех точках множества G.*

СЛЕДСТВИЕ 2 (достаточные условия независимости функций). *Пусть $m \leqslant n$ и пусть ранг матрицы Якоби* (42.2) *хоть в одной точке открытого множества G равен m. Тогда система* (42.1) *независима на множестве G.*

---

* Напомним, что рангом матрицы называется максимальное число ее линейно независимых строк. Это число совпадает с максимальным порядком минора этой матрицы, не равного нулю.

Следствие 1 получается сразу из доказанной теоремы при $m = n$.

Следствие 2 легко доказывается от противного.

Поскольку строки матрицы Якоби (42.2) являются координатами градиентов функций (42.1), теорему 1 можно перефразировать следующим образом.

Если система функций (42.1) *зависима в области* G, *то градиенты* $\nabla_{\varphi_1}, \ldots, \nabla_{\varphi_m}$ *этих функций линейно зависимы в каждой точке* G.

42.2. Достаточные условия зависимости функций

В этом пункте сохраним обозначения предыдущего пункта и будем, как и раньше, предполагать, что функции (42.1) непрерывно дифференцируемы на открытом множестве $G \subset \boldsymbol{R}^n$.

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия зависимости функций). *Пусть ранг матрицы Якоби* (42.2) *системы функций* (42.1) *в каждой точке открытого множества* G *не превышает числа* r, $r < m \leqslant n$, *а в некоторой точке* $x^{(0)} \in G$ *равен* r, *иначе говоря, существуют такие переменные* $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ *и функции* $y_{i_1} = \varphi_{i_1}(x), \ldots, y_{i_r} = \varphi_{i_r}(x)$, *что*

$$\left.\frac{\partial(y_{i_1}, \ldots, y_{i_r})}{\partial(x_{j_1}, \ldots, x_{j_r})}\right|_{x^{(0)}} \neq 0. \tag{42.3}$$

Тогда все r *функций, входящих в условие* (42.3), *независимы на множестве* G *и существует окрестность точки* $x^{(0)}$ *такая, что любая из оставшихся* $m - r$ *функций зависит на этой окрестности от указанных* r *функций.*

Доказательство. Пусть для простоты записи условие (42.3) имеет вид

$$\left.\frac{\partial(y_1, \ldots, y_r)}{\partial(x_1, \ldots, x_r)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0 \tag{42.4}$$

(этого всегда можно добиться, перенумеровав в случае необходимости функции и аргументы системы (42.1) в нужном порядке). Согласно следствию 2 из теоремы 1 п. 42.1, функции $y_1, \ldots, y_r$ независимы в G.

Покажем теперь, что каждая из остальных зависит от них в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Пусть

$y_i^{(0)} = \varphi_i(x^{(0)})$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Рассмотрим систему первых r функций системы (42.1):

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_r &= \varphi_r(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{42.5}$$

Прежде всего выберем такое η_0, чтобы всякая точка $x = (x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащая η_0-кубической окрестности точки $x^{(0)}$, т. е. всякая точка x, для которой $|x_i - x_i^{(0)}| < \eta_0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, принадлежала множеству G: $x \in G$. Это всегда возможно в силу его открытости.

Далее, в силу условия (42.4) и теоремы о неявных функциях (см. п. 41.3), система (42.5) разрешима относительно переменных $x_1, \ldots, x_r$ в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= f_r(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{42.6}$$

При этом функции $f_1, \ldots, f_r$ определены и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки

$$(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, x_{r+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}).$$

Более подробно (если в качестве окрестностей брать кубические окрестности) это означает следующее: можно выбрать такие числа $\delta > 0$ и $\eta > 0$, причем для удобства взять их меньшими η_0: $\delta < \eta_0$, $\eta < \eta_0$, что если через U обозначить кубическую окрестность точки $(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, x_{r+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, задаваемую неравенствами

$$|y_i - y_i^{(0)}| < \delta, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \ |x_j - x_j^{(0)}| < \delta, \quad j = r+1, \ldots, n,$$

то:

1) на окрестности U функции f_k, $k = 1, 2, \ldots, r$, определены и непрерывно дифференцируемы;

2) для всех точек $(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) \in U$ справедливы неравенства

$$|f_k(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) - x_k^{(0)}| < \eta, \quad k = 1, 2, \ldots, r;$$

3) на окрестности U выполняются равенства

$$\varphi_i(f_1, \ldots, f_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

где под f_k, $k = 1, \ldots, r$, понимаются правые части равенств (42.6).

Рассмотрим композицию функций (42.6) и $\varphi_{r+1}(x_1, \dots, x_n)$, т. е. функцию

$$y_{r+1} = \varphi_{r+1}(f_1, \dots, f_r, x_{r+1}, \dots, x_n), \tag{42.7}$$

где $f_k = f_k(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$, $k = 1, \dots, r$. Эта сложная функция заведомо определена и непрерывно дифференцируема на указанной выше кубической окрестности U точки

$$(y_1^{(0)}, \dots, y_r^{(0)}, x_{r+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}).$$

Покажем, что на самом деле функция (42.7) в этой окрестности U не зависит от переменных $x_{r+1}, \dots, x_n$, т. е. не меняется при их изменении, и тем самым является фактически лишь функцией переменных $y_1, \dots, y_r$. Для этого достаточно показать, что для функции (42.7) на окрестности U выполняется равенство

$$\frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j} = 0, \quad j = r+1, \dots, n \tag{42.8}$$

(см. п. 37.4 или формулу конечных приращений Лагранжа в п. 39.2, из которой сразу следует достаточность условия (42.8) для независимости функции от переменных $x_{r+1}, \dots, x_n$ в выпуклой области, а следовательно, и в кубической окрестности).

Для доказательства равенства (42.8) зафиксируем одно из значений j ($j = r+1, \dots, n$) и координаты x_k с индексами k, принимающими значения $r+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$, обозначив их через x_k^*, причем выберем x_k^* так, чтобы $|x_k^* - x_k^{(0)}| < \delta$, $k = r+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$.

Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1, \\ &\dots\dots\dots \\ y_r &= y_r, \end{aligned} \tag{42.9}$$

$$y_{r+1} = \varphi_{r+1}(f_1^*, \dots, f_r^*, x_{r+1}^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*),$$

где $f_k^* = f_k(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*)$, $(r+1)$-мерной кубической окрестности $U^{(j)}$ точки $(y_1^{(0)}, \dots, y_r^{(0)}, x_j^{(0)})$, задаваемой равенствами

$$|y_k - y_k^{(0)}| < \delta, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad |x_j - x_j^{(0)}| < \delta.$$

Символически, чтобы подчеркнуть, какие именно переменные меняются, изобразим отображение (42.9) в виде

$(y_1, \dots, y_r, x_j) \to (y_1, \dots, y_r, y_{r+1})$. Это отображение непрерывно дифференцируемо на $U^{(j)}$; его матрица Якоби имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial y_{r+1}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial y_{r-1}}{\partial y_2} & \dfrac{\partial y_{r+1}}{\partial y_r} & \dfrac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j} \end{pmatrix},$$

и поэтому

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_r, y_{r+1})}{\partial(y_1, \dots, y_r, x_j)} = \frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j}, \qquad (42.10)$$

т. е. якобиан рассматриваемого отображения равен интересующей нас производной.

На окрестности $U^{(j)}$ это отображение можно представить в виде композиции двух отображений: непрерывно дифференцируемого отображения

$$x_1 = f_1(y_1, \dots, y_r, x^*_{r+1}, \dots, x^*_{j-1}, x_j, x^*_{j+1}, \dots, x^*_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_r = f_r(y_1, \dots, y_r, x^*_{r+1}, \dots, x^*_{j-1}, x_j, x^*_{j+1}, \dots, x^*_n),$$
$$x_j = x_j$$

окрестности $U^{(j)}$ и непрерывно дифференцируемого отображения

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_r, x^*_{r+1}, \dots, x^*_{j-1}, x_j, x^*_{j+1}, \dots, x^*_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_r = \varphi_r(x_1, \dots, x_r, x^*_{r+1}, \dots, x^*_{j-1}, x_j, x^*_{j+1}, \dots, x^*_n),$$
$$y_{r+1} = \varphi_{r+1}(x_1, \dots, x_r, x^*_{r+1}, \dots, x^*_{j-1}, x_j, x^*_{j+1}, \dots, x^*_n)$$

окрестности точки $(x_1^{(0)}, \dots, x_r^{(0)}, x_j^{(0)})$, задаваемой неравенствами $|x_i - x_i^{(0)}| < \eta$, $i = 1, 2, \dots, r$, $|x_j - x_j^{(0)}| < \delta$.

В силу выбора чисел δ и η, композиция этих отображений, которую для наглядности можно символически изобразить в виде $(y_1, \dots, y_r, x_j) \to (x_1, \dots, x_r, x_j) \to (y_1, \dots, y_r, y_{r+1})$, определена и непрерывно дифференцируема на окрестности $U^{(j)}$. Первое из этих отображений непрерывно дифференцируемо в окрестности $U^{(j)}$ точки $(y_1^{(0)}, \dots, y_r^{(0)}, y_j^{(0)})$, а второе непрерывно дифференцируемо в соответствующей окрестности точки $(x_1^{(0)}, \dots, x_r^{(0)}, x_j^{(0)})$.

Поэтому из (42.10) и из свойств якобианов отображений (см. п. 41.7) имеем

$$\frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j} = \frac{\partial(y_1, \ldots, y_r, y_{r+1})}{\partial(y_1, \ldots, y_r, x_j)} = \frac{\partial(y_1, \ldots, y_r, y_{r+1})}{\partial(x_1, \ldots, x_r, x_j)} \frac{\partial(x_1, \ldots, x_r, x_j)}{\partial(y_1, \ldots, y_r, x_j)}. \quad (42.11)$$

В силу условия теоремы, ранг матрицы Якоби на множестве G меньше или равен r, следовательно,

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_r, y_{r+1})}{\partial(x_1, \ldots, x_r, x_j)} = 0$$

всюду на G. Поэтому из (42.11) сразу следует, что для любой точки $(y_1, \ldots, y_r, x_j) \in U^{(j)}$ и, следовательно, для любой точки $(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}^*, \ldots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \ldots, x_n^*) \in U$ справедливо равенство (42.8). Поскольку координаты x_k^* были фиксированы произвольным образом, лишь бы $|x_k^* - x_k^{(0)}| < \delta$; $k = r + 1, \ldots$ $\ldots, j - 1, j + 1, \ldots, n$, то это означает справедливость равенства (42.8) на окрестности U.

Таким образом, функция (42.7) зависит только от переменных $y_1, \ldots, y_r$. Обозначив ее символом Φ, получим

$$\varphi_{r+1}(f_1, \ldots, f_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) = \Phi(y_1, \ldots, y_r).$$

Выберем теперь таким образом δ_0, $\delta_0 < \delta$ и $\delta_0 < \eta$, чтобы при $|x_i - x_i^{(0)}| < \delta_0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, выполнялись неравенства

$$|y_i - y_i^{(0)}| < \delta, \quad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Это возможно в силу непрерывности функций $y_j = \varphi_j(x_1, \ldots x_n)$, $j = 1, 2, \ldots, r$, системы (42.5) в точке $x^{(0)}$.

В силу доказанного, для любой точки x из δ_0-кубической окрестности точки $x^{(0)}$, т. е. для любой такой точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$, что $|x_i - x_i^{(0)}| < \delta_0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, справедливо тождество $\varphi_{r+1}(x) =$ $= \Phi(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x))$, т. е. в указанной окрестности точки $x^{(0)}$ функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varphi_{r+1}$ зависимы.

Подобным же образом доказывается зависимость каждой из функций $\varphi_{r+2}, \ldots, \varphi_m$ от $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. □

Аналогично необходимому условию зависимости функций достаточные условия также можно сформулировать в терминах градиентов. Для простоты ограничимся случаем $r = m - 1$.

Если во всех точках области G градиенты $\nabla\varphi_1, \dots, \nabla\varphi_m$ линейно зависимы, то у каждой точки $x \in G$ существует ее окрестность, в которой функции $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ зависимы. При этом, если, например, градиенты $\nabla\varphi_1, \dots, \nabla\varphi_{m-1}$ линейно независимы в некоторой точке, и, следовательно, градиент $\nabla\varphi_m$ в этой точке является их линейной комбинацией, то в окрестности рассматриваемой точки функция φ_m зависит от функций $\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$.

Следует обратить внимание на то, что достаточные условия зависимости функций, установленные в этом пункте, имеют локальный характер в отличие от результатов предшествующего пункта, имеющих глобальный характер. Это означает следующее: если система m непрерывно дифференцируемых функций (42.1) зависима на открытом множестве $G \subset \boldsymbol{R}^n$, то, согласно теореме 1 п. 42.1, в каждой точке этого множества ранг матрицы Якоби этой системы меньше m (соответственно если хотя бы в одной точке множества G ранг рассматриваемой матрицы равен m, то система независима на всем множестве G). Что же касается теоремы 2 настоящего пункта, то она утверждает лишь, что если в какой-то точке $x^{(0)} \in G$ выполняются условия этой теоремы, то только на некоторой окрестности этой точки (а не на всем множестве G) данная система функций является зависимой системой. Таким образом, действительно, утверждение теоремы 2 имеет локальный характер.

Добавим еще, что если в каждой точке $x^{(0)}$ открытого множества G выполняются условия теоремы 2, то, конечно, в этом случае в некоторой окрестности каждой точки рассматриваемая система функций будет зависимой. Однако теорема 2 не гарантирует, что эта зависимость будет одной и той же во всех указанных окрестностях, т. е. из теоремы 2 не следует, что в разных точках одни и те же функции будут зависимыми от других и что функции Φ, «осуществляющие» зависимости одних и тех же функций, рассматриваемых на разных окрестностях, будут совпадать в точках пересечения этих окрестностей. Следовательно, из теоремы 2 не следует, что система функций, удовлетворяющая условиям этой теоремы во всех точках $x^{(0)}$ множества G, будет зависимой на всем множестве G в целом, т. е. в смысле определения 1. Это и означает, что теорема 2 не имеет глобального характера.

Заметим, что существует несколько более общий подход к понятию зависимости функций, позволяющий построить глобальную теорию этого вопроса, однако не будем на этом останавливаться.

Пример. Рассмотрим систему функций

$$\begin{cases} u = \sin(x + y), \\ v = \cos(x + y). \end{cases} \qquad (42.12)$$

Якобиан этой системы равен нулю на всей плоскости

$$\begin{vmatrix} \cos(x + y) & \cos(x + y) \\ -\sin(x + y) & -\sin(x + y) \end{vmatrix} = 0,$$

и, как легко видеть, ранг матрицы Якоби этой системы равен единице во всех точках плоскости.

Согласно теореме 2, функции (42.12) зависимы в окрестности каждой точки плоскости. В данном случае зависимость функций легко находится в явном виде, например на открытом множестве точек (x, y), для которых $\cos(x + y) > 0$, она может быть задана формулой $v = \sqrt{1 - u^2}$.

УПРАЖНЕНИЯ. 1. Пусть $u = x^2 + y^2 + z^2$, $v = xy + yz + zx$, $w = x + y + z$. Доказать, что функции u, v, w зависимы, и найти уравнение, выражающее их зависимость.

2. Исследовать вопрос о зависимости функций $u = \xi^3 + \eta^3 + \zeta^3$, $v = \xi\eta\zeta$, $w = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, $z = \xi\eta + \eta\zeta + \zeta\xi$.

Задача 10. Функция $u = u(x, y)$ называется гармонической в плоской области, если во всех точках этой области она удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ (см. (41.109)). Доказать, что две гармонические функции зависимы в плоской области тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

§ 43
Условный экстремум

43.1. Понятие условного экстремума

Пусть на открытом множестве $G \subset \boldsymbol{R}^n$ заданы функции

$$y_i = f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (43.1)$$

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$. Обозначим через E множество точек $x \in G$, в которых все функции f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, обращаются в нуль:

$$E = \{x\colon f_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad x \in G\}. \qquad (43.2)$$

Уравнения

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (43.3)$$

будем называть *уравнениями связи*.

Определение 1. *Пусть на G задана функция $y = f_0(x)$. Точка $x^{(0)} \in E$ называется точкой условного экстремума* функции $f_0(x)$ относительно (или при выполнении) уравнений связи* (43.3), *если она является точкой обычного экстремума этой функции, рассматриваемой только на множестве E* (см. п. 40.1).

Иначе говоря, здесь значение функции $f_0(x)$ в точке $x^{(0)}$ сравнивается не со всеми ее значениями в достаточно малой окрестности этой точки, а только со значениями в точках, принадлежащих одновременно указанной достаточно малой окрестности и множеству E. Как и в случае обычных экстремумов, можно, естественно, рассматривать точки просто условного экстремума и точки строгого условного экстремума. Точка условного экстремума может быть либо точкой условного (строгого) максимума, либо точкой условного (строгого) минимума.

Примеры. 1. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \tag{43.4}$$

и уравнение связи

$$x + y - 1 = 0. \tag{43.5}$$

Найдем условный экстремум функции (43.4) при выполнении уравнения связи (43.5). Из (43.5) имеем $y = 1 - x$, откуда

$$f(x, 1 - x) = 2x^2 - 2x + 1.$$

Таким образом, при выполнении условия связи функция (43.4) является функцией одного переменного. Ее экстремум находится элементарно: приравнивая нулю ее производную (необходимое условие экстремума), получим $2x - 1 = 0$, откуда $x = 1/2$. В этой точке рассматриваемая функция, очевидно, имеет минимум (она является многочленом второй степени с положительным коэффициентом при старшем члене). Значению $x = 1/2$, согласно уравнению связи (43.5), соответствует $y = 1/2$.

Следовательно, в точке $(1/2, 1/2)$ функция (43.4) достигает минимума относительно уравнения связи (43.5). Геометрически это означает, что точка параболоида $z = x^2 + y^2$, проектирующаяся в точку $(1/2, 1/2)$, является самой низкой из всех

* Принят также термин «относительный экстремум».

его точек, лежащих над прямой (43.5) (рис. 43). Этот пример показывает, что точка, в которой функция достигает условного экстремума, не является, вообще говоря, точкой экстремума этой функции.

2. Рассмотрим функцию $f(x, y) = y^2 - x^2$ и уравнение связи $y = 2x$. Имеем $f(x, 2x) = 3x^2$, т. е. при выполнении уравнений связи рассматриваемая функция также является функцией одного переменного и, очевидно, достигает минимума при $x = 0$ (рис. 44). Значению $x = 0$, согласно уравнению связи, соответствует значение $y = 0$, а поэтому функция $f(x, y) = y^2 - x^2$ имеет в точке (0, 0) условный минимум относительно уравнения связи $y = 2x$.

Следует заметить, что в этом случае сама функция $f(x, y)$ не имеет ни максимума, ни минимума ни в какой точке плоскости. Таким образом, рассмотренный пример показывает, что функция может не иметь экстремума, но при определенных уравнениях связи может иметь условный экстремум.

В дальнейшем будем предполагать, что:

1) все функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$ непрерывно дифференцируемы на открытом множестве G;

2) в рассматриваемой точке $x^{(0)}$ векторы $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ линейно независимы, т. е. ранг матрицы Якоби

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, m, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

равен m — числу ее строк (строки матрицы Якоби являются компонентами градиентов $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$).

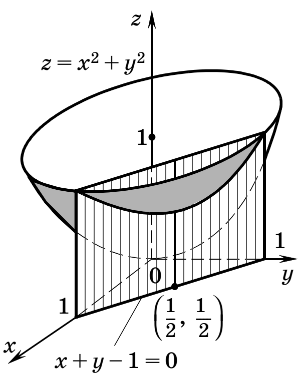


Рис. 43

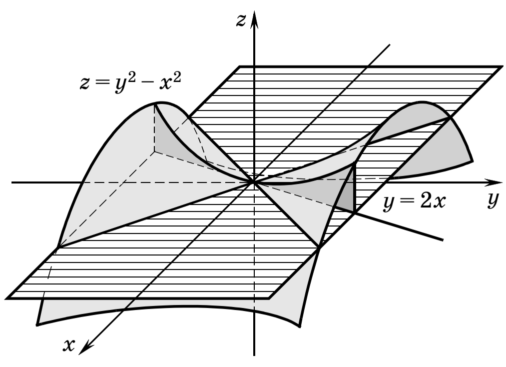


Рис. 44

Согласно результатам предыдущего параграфа, это означает, что функции системы (43.1) независимы в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Поскольку ранг матрицы не может быть больше числа столбцов, то из условия 2) следует, что $m \leqslant n$.

Отметим, что в случае $m = n$, когда точка $x^{(0)}$ удовлетворяет уравнениям связи (43.3), в некоторой окрестности этой точки нет больше точек, удовлетворяющих уравнениям связи. Это следует из того, что отображение

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots , f_m(x)), \quad x = (x_1, \dots , x_n) \in G,$$

в силу неравенства нулю якобиана $\left.\frac{\partial(f_1, \dots , f_n)}{\partial(x_1, \dots , x_n)}\right|_{x = x^0}$, локально гомеоморфно (см. п. 41.7) в точке $x^{(0)}$. Поэтому вопрос об условном экстремуме в точке $x^{(0)}$ сводится к вопросу об экстремуме функции в изолированной точке ее множества определения, т. е. вопросу, имеющему правильное решение. Поэтому в дальнейшем будем всегда предполагать, что $m < n$.

Согласно условию 2), в точке $x^{(0)}$ хотя бы один из определителей вида $\frac{\partial(f_1, \dots , f_m)}{\partial(x_{i_1}, \dots , x_{i_m})}$ отличен от нуля. Пусть для определенности в точке $x^{(0)}$

$$\frac{\partial(f_1, \dots , f_m)}{\partial(x_1, \dots , x_m)} \neq 0. \tag{43.6}$$

Тогда при $n > m$, по теореме о неявных функциях (см. п. 41.3), систему уравнений (43.3) в некоторой окрестности точки

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots , x_n^{(0)})$$

можно разрешить относительно переменных $x_1, \dots , x_m$:

$$\begin{gathered} x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, \dots , x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = \varphi_m(x_{m+1}, \dots , x_n). \end{gathered} \tag{43.7}$$

Иначе говоря, существуют такие окрестности $U = U(x^{(0)})$ и $\tilde{U} = \tilde{U}(\bar{x}^{(0)})$ точек $x^{(0)}$ и $\bar{x}^{(0)} = (x_{m+1}^{(0)}, x_{m+2}^{(0)}, \dots , x_n^{(0)})$ соответственно в пространствах $\boldsymbol{R}^n$ и $\boldsymbol{R}^{n-m}$, что точка $x = (x_1, x_2, \dots , x_n) \in U$ удовлетворяет уравнениям связи (43.3) тогда и только тогда, когда она имеет вид: $x = (\varphi_1(\bar{x}), \varphi_2(\bar{x}), \dots \varphi_m(\bar{x}), \bar{x})$, $\bar{x} = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots , x_n) \in \tilde{U}$.

Подставив значения $x_1, \dots, x_m$, заданные формулами (43.7) в $y = f_0(x)$, т. е. рассмотрев композицию функции f_0 и $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, получим функцию

$$y = f_0(\varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} g(x_{m+1}, \dots, x_n) \qquad (43.8)$$

от $n - m$ переменных $x_{m+1}, \dots, x_n$, определенную и непрерывно дифференцируемую в указанной выше окрестности $\tilde{U}$ точки $\tilde{x}^{(0)}$.

Поскольку, согласно теореме о неявных функциях, условия (43.3) и (43.7) равносильны, справедливо следующее утверждение.

Точка $x^{(0)}$ является точкой (строгого) условного экстремума для функции $f_0(x)$ относительно уравнений связи (43.3) *в том и только в том случае, когда $x^{(0)}$ является точкой обычного (строгого) экстремума функций* (43.8).

Если $x^{(0)}$ — точка обычного экстремума функции g, то она является стационарной точкой этой функции (см. п. 40.1):

$$dg(\tilde{x}^{(0)}) = 0. \qquad (43.9)$$

Напомним, что дифференциал — линейная однородная функция и его равенство нулю означает равенство нулю этой функции при любых значениях ее аргументов, в данном случае — при любых $dx_{m+1}, \dots, dx_n$. Это возможно, очевидно, в том и только в том случае, когда все коэффициенты при этих аргументах, т. е. производные $\frac{\partial g}{\partial x_{m+k}}$, $k = 1, 2, \dots, n - m$, обращаются в нуль в точке $x^{(0)}$. Условие (43.9) необходимо для условного экстремума в точке $x^{(0)}$.

Таким образом, метод, основанный на решении системы уравнений (43.3), позволяет свести вопрос о нахождении условного экстремума к уже изученному вопросу об обычном экстремуме. Именно таким образом мы и поступали в рассмотренных выше примерах. Однако найти решение системы (43.3) в явном виде часто невозможно или весьма затруднительно; поэтому желательно располагать методом, позволяющим находить условный экстремум, не решая системы (43.3). Этот способ изложен ниже.

43.2. Метод множителей Лагранжа для нахождения точек условного экстремума

В п. 43.2 предполагается, что все функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$ непрерывно дифференцируемы на открытом множестве $G \subset \boldsymbol{R}^n$, $n > m$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $x^{(0)}$ — точка условного экстремума функции f_0 при выполнении уравнений связи* (43.3). *Тогда в этой точке градиенты $\nabla f_0, \nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ линейно зависимы, т. е. существуют такие, не все равные нулю, числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, что*

$$\lambda_0 \nabla f_0 + \lambda_1 \nabla f_1 + \ldots + \lambda_m \nabla f_m = 0. \qquad (43.10)$$

СЛЕДСТВИЕ. *Если в точке $x^{(0)}$ условного экстремума функции f_0 относительно уравнений связи* (43.3) *градиенты $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ линейно независимы, т. е. ранг матрицы Якоби*

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, \quad m, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

равен m, то существуют такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, что в этой точке

$$\nabla f_0 + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla f_j = 0, \qquad (43.11)$$

т. е. градиент ∇f_0 является линейной комбинацией градиентов $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$.

В координатной форме условие (43.11) имеет вид: для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ в точке $x^{(0)}$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0. \qquad (43.12)$$

Функция

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} f_0(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x), \qquad (43.13)$$

где числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ удовлетворяют условию (43.12), называется *функцией Лагранжа* рассматриваемой задачи, а сами числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — *множителями Лагранжа.*

Условие (43.12) означает, что если $x^{(0)}$ является точкой условного экстремума функции f_0 относительно уравнений свя-

зи (43.3), то она является стационарной точкой для функции Лагранжа, т. е.

$$\frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{43.14}$$

Иначе говоря,

$$dF(x^{(0)}) = 0.$$

Прежде чем доказать теорему, разъясним ее смысл и покажем, как ее использовать для нахождения точек условного экстремума. Прежде всего обратим внимание на то, что у функции вида (43.13) при произвольных числах $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ каждая точка ее условного экстремума является и точкой условного экстремума исходной функции f_0, и наоборот. Мы выбираем такие значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, чтобы выполнялись условия (43.12), т. е. чтобы данная точка условного экстремума оказалась и стационарной точкой функции (43.13).

Для отыскания точек условного экстремума следует рассмотреть систему $n + m$ уравнений (43.3) и (43.12) относительно неизвестных $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и решить ее (если это окажется возможным), найдя $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ и по возможности исключив $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Сформулированная теорема утверждает, что все точки условного экстремума будут находиться среди найденных таким образом точек $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Вопрос о том, какие же из них фактически будут точками условного экстремума, требует дополнительного исследования; оно будет проведено в пункте 43.5*.

Доказательство теоремы. Докажем утверждение, равносильное теореме: если в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, удовлетворяющей уравнениям связи

$$f_k(x^{(0)}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{43.15}$$

градиенты $\nabla f_0, \nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ линейно независимы, то $x^{(0)}$ не является точкой условного экстремума.

Итак, пусть $\nabla f_0, \nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ линейно независимы и, следовательно, ранг матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)$, $j = 0, 1, \ldots, m$, $i = 1, 2, \ldots, n$, равен $m + 1$. Тогда в этой матрице существует минор порядка $m + 1$, не равный нулю. Для определенности будем считать, что он образован первыми $m + 1$ столбцами, т. е.

$$\left.\frac{\partial(f_0, f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})}\right|_{x = x^{(0)}} \neq 0. \tag{43.16}$$

Множество G — открыто, а поэтому существует такое $\delta_0 > 0$, что при всех δ, $0 < \delta < \delta_0$, куб $Q_\delta^n = \{x : |x_i - x_i^{(0)}| < \delta,\ i = 1, 2, \dots, n\}$ лежит в G, и, следовательно, на нем определены все функции $f_0, f_1, \dots, f_m$.

Зафиксируем $x_{m+2} = x_{m+2}^{(0)}, \dots, x_n = x_n^{(0)}$ и введем следующие обозначения:

$$x^* = (x_1, \dots, x_{m+1}),$$

$$Q_\delta^{m+1} = \{x^*: |x_i - x_i^{(0)}| < \delta,\ i = 1, 2, \dots, m+1\}.$$

Очевидно, функции $f_j(x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, $j = 0, 1, \dots, m$, определены и непрерывно дифференцируемы всюду в Q_δ^{m+1}. Рассмотрим отображение Φ: $Q_\delta^{m+1} \to \boldsymbol{R}^{m+1}$, задаваемое формулами

$$\begin{aligned} y_1 &= f_0(x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}),\\ y_2 &= f_1(x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y_{m+1} &= f_m(x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}). \end{aligned} \qquad (43.17)$$

В силу (43.16), для точки $x^{*(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_{m+1}^{(0)})$ имеем

$$\left.\frac{\partial(y_1, \dots, y_{m+1})}{\partial(x_1, \dots, x_{m+1})}\right|_{x^* = x^{*(0)}} = \left.\frac{\partial(f_0, f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{m+1})}\right|_{x = x^{(0)}} \neq 0.$$

Поскольку точка $x^{(0)}$ является точкой условного экстремума, она удовлетворяет уравнениям связи (43.3). Таким образом, для точки $x^{(0)}$ имеем $\Phi(x^{*(0)}) = (f_0(x^{(0)}), 0, \dots, 0)$. Поэтому (см. теорему 7 в п. 41.7 о локальной обратимости непрерывно дифференцируемого отображения в точке, в которой его якобиан не равен нулю) существует такое $\varepsilon > 0$, что на окрестности

$$V = \{y = (y_1, \dots, y_{m+1}): |y_1 - f_0(x^{(0)})| < \varepsilon,\ |y_j| < \varepsilon,\ j = 2, 3, \dots, m+1\}$$

(рис. 45, $m = 1$, $n = 2$) определено обратное к Φ отображение, и, следовательно, в любую точку этой окрестности отображается какая-то точка из Q_δ^{m+1}.

В частности, поскольку при любом η, $0 < \eta < \varepsilon$, имеет место включение $(f(x^{(0)}) \pm \eta, 0, \dots, 0) \in V$, то в кубе Q_δ^{m+1} найдутся точки $x'^* = (x_1', \dots, x_{m+1}')$ и $x''^* = (x_1'', \dots, x_{m+1}'')$, отображающиеся при отображении Φ в указанные точки окрестности V:

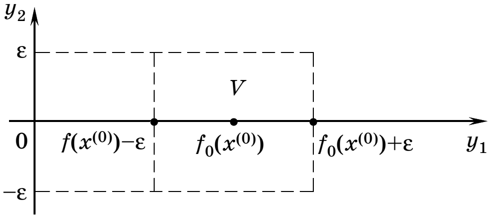


Рис. 45

$\Phi(x'^*) = (f(x^{(0)}) + \eta, 0, \ldots, 0)$, $\Phi(x''^*) = (f(x^{(0)}) - \eta, 0, \ldots, 0)$. Если положим для краткости $x' = (x'_1, \ldots, x'_{m+1}, x^{(0)}_{m+2}, \ldots, x^{(0)}_n)$ и $x'' = (x''_1, \ldots, x''_{m+1}, x^{(0)}_{m+2}, \ldots, x^{(0)}_n)$, то в координатной записи (см. (43.17)) получим

$$f_0(x') = f_0(x^{(0)}) + \eta > f(x^{(0)}),$$

$$f_k(x') = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \ \ x' \in Q^n_\delta$$

и

$$f_0(x'') = f_0(x^{(0)}) - \eta < f(x^{(0)}),$$

$$f_k(x'') = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \ \ x \in Q^n_\delta .$$

Поскольку число δ, $0 < \delta < \delta_0$, может быть сколь угодно мало, указанные выше точки x' и x'' могут быть выбраны сколь угодно близко от точки $x^{(0)}$, и, таким образом, сколь угодно близко от точки $x^{(0)}$ имеются точки, удовлетворяющие уравнениям связи, в которых функция f_0 принимает значения как большие, так и меньшие значения $f_0(x^{(0)})$. Это означает, что точка $x^{(0)}$ не является точкой условного экстремума. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Доказательство следствия. Если векторы $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ линейно независимы, то в равенстве (43.10) имеем $\lambda_0 \neq 0$, так как в случае $\lambda_0 = 0$ указанные векторы, в силу (43.10), оказались бы линейно зависимыми. Разделив обе части (43.10) на λ_0, получим равенство вида (43.11). □

43.3*. Геометрическая интерпретация метода Лагранжа

Дадим теперь некоторые геометрические пояснения к теореме 1. Рассмотрим для простоты случай условного экстремума функции двух переменных $z = f(x, y)$ при выполнении уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$.

Пусть функции f и φ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки (x_0, y_0), $\nabla\varphi(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial\varphi(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial\varphi(x_0, y_0)}{\partial y}\right) \neq 0$ и $\varphi(x_0, y_0) = 0$. В силу условия $\nabla\varphi(x_0, y_0) \neq 0$, согласно теореме о неявных функциях, уравнение $\varphi(x, y) = 0$ в окрестности точки (x_0, y_0) задает некоторую гладкую кривую, обладающую явным представлением либо вида $y = y(x)$, либо вида $x = x(y)$. Поскольку нас интересуют только достаточно близкие к (x_0, y_0) точки, то указанную кривую будем называть просто кривой $\varphi(x, y) = 0$ (т. е., попросту говоря, всюду в дальнейшем будем рассматривать сужение функции f и φ на указанную окрестность точки (x_0, y_0)).

Градиент $\nabla\varphi(x_0, y_0)$ является нормалью к кривой $\varphi(x, y) = 0$ в точке (x_0, y_0) (п. 20.6). Обозначим через τ единичный касательный вектор к кривой $\varphi(x, y)$ в точке (x_0, y_0). Пусть для определенности рассматриваемая кривая задается уравнением $y = y(x)$. Если (x_0, y_0) — точка условного экстремума, то x_0 является точкой обычного экстремума для функции $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, y(x))$ (см. п. 43.1), и поэтому $g'(x) = 0$, т. е. производная функции f в точке (x_0, y_0) в направлении кривой $\varphi(x, y) = 0$, или, что то же (см. п. 20.7), в направлении вектора τ равна нулю:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \tau} = (\nabla f(x_0, y_0), \tau) = 0.$$

Это означает ортогональность градиента $\nabla f(x_0, y_0)$ и касательного вектора τ, что равносильно коллинеарности векторов $\nabla f(x_0, y_0)$ и $\nabla\varphi(x_0, y_0)$: $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda\nabla\varphi(x_0, y_0)$, т. е. выполняется условие (43.11). Выполнение этого условия в точке условного экстремума можно пояснить и другим путем. Пусть $f(x_0, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} c$. Если в точке (x_0, y_0) не выполняется условие (43.11), т. е. градиенты ∇f и $\nabla\varphi$ не коллинеарны, то это означает, что в этой точке $\nabla f \neq 0$ и линия уровня $f(x, y) = c$ и кривая $\varphi(x, y) = 0$ пересекаются в этой точке под некоторым углом α, отличным от 0 и π (рис. 46). Поэтому в любой достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) часть кривой $\varphi(x, y) = 0$ окажется расположенной в области $f < c$ (в «области меньших значений»), а часть — в области $f > c$ (в «области больших значений»).

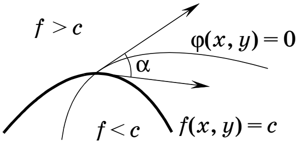


Рис. 46

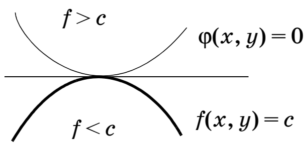


Рис. 47

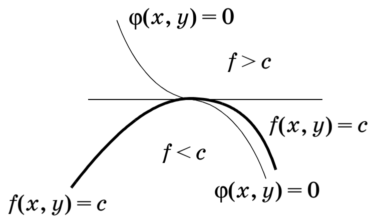


Рис. 48

Это означает, что в точке (x_0, y_0) нет рассматриваемого условного экстремума.

В случае же, когда векторы ∇f и $\nabla \varphi$ коллинеарны, $\nabla f = \lambda \Delta \varphi$ часть кривой $\varphi(x, y) = 0$ может принадлежать некоторой окрестности точки (x_0, y_0), целиком лежащей в области меньших значений $f < c$ (рис. 47) или в области больших значений $f > c$. В этом случае в точке (x_0, y_0) достигается условный экстремум.

Однако в случае коллинеарности векторов ∇f и $\nabla \varphi$ кривая $\varphi(x, y) = 0$ также может оказаться расположенной в любой достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) частично в области меньших, а частично в области больших значений функции f (рис. 48) — тогда в точке (x_0, y_0) снова не будет условного экстремума. Подобная ситуация возникает, например, когда кривые $f(x, y) = c$ и $\varphi(x, y) = 0$ имеют в точке (x_0, y_0) общую касательную, причем кривая $f(x, y) = c$ расположена в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) по одну сторону от этой касательной, а кривая $\varphi(x, y) = 0$ имеет в этой точке перегиб, переходя с одной стороны касательной на другую.

Сказанное поясняет то обстоятельство, что (43.10) является необходимым, но не достаточным условием для условного экстремума.

Приведенные геометрические рассмотрения вопроса об условном экстремуме распространяются и на многомерный случай.

43.4*. Стационарные точки функции Лагранжа

В этом пункте будет дано описание стационарных точек функции Лагранжа (43.13) посредством функции $g(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, введенной в п. 43.1 (см. (43.8)). Предварительно докажем одну простую лемму из линейной алгебры.

Пусть задана система линейных однородных уравнений

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{43.18}$$

и еще одно линейное однородное уравнение

$$b_1x_1 + \ldots + b_nx_n = 0. \tag{43.19}$$

Систему уравнений, получаемую присоединением к системе (43.18) уравнения (43.19), будем называть *расширенной системой* (43.18)—(43.19).

ЛЕММА. *Для того чтобы расширенная система* (43.18)—(43.19) *была равносильна основной системе* (43.18), *необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (43.19) *являлось линейной комбинацией уравнений системы* (43.18).

СЛЕДСТВИЕ. *Для того чтобы уравнение* (43.19) *было линейной комбинацией уравнений* (43.18) *или, что то же, чтобы вектор*

$$b \overset{\text{def}}{=} (b_1, \ldots, b_n) \tag{43.20}$$

был линейной комбинацией векторов

$$a_i \overset{\text{def}}{=} (a_{i1}, \ldots, a_{in}), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{43.21}$$

необходимо и достаточно, чтобы каждое решение системы (43.18) *являлось решением уравнения* (43.19).

Доказательство леммы. Пусть ранг матрицы (a_{ij}) коэффициентов системы (43.18) равен m_0. Очевидно, что $m_0 \leqslant m$. Если $m_0 < m$, то $m - m_0$ уравнений системы (43.18) являются линейными комбинациями остальных. Отбросив те $m - m_0$ линейные уравнения, которые являются линейными комбинациями оставшихся, получим систему из m_0 линейно независимых уравнений, равносильную системе (43.18), причем уравнение (43.19) является линейной комбинацией уравнений системы (43.18) тогда и только тогда, когда оно является линейной комбинацией указанной системы из оставшихся m_0 уравнений. Поэтому будем с самого начала считать, что $m = m_0$, т. е. что ранг матрицы (a_{ij}) коэффициентов системы (43.18) равен m — числу уравнений этой системы.

Пусть системы (43.18) и (43.18)—(43.19) равносильны. Это означает, что пространства их решений совпадают. Поскольку все уравнения основной системы (43.18) входят в расширенную систему (43.18)—(43.19), то каждое решение расширенной системы является и решением основной системы, т. е. пространство решений расширенной системы содержится в пространстве

решений основной системы. Следовательно, совпадение этих пространств равносильно равенству их размерностей.

Размерность s пространства решений системы линейных однородных уравнений равна, как известно, числу неизвестных n этой системы, из которого вычтен ранг r матрицы коэффициентов системы: $s = n - r$. Отсюда следует, что равносильность систем (43.18) и (43.18)—(43.19) означает равенство рангов их матриц. Ранг матрицы коэффициентов системы (43.18) по условию равен m, т. е. векторы (43.21) линейно независимы.

Ранг матрицы коэффициентов расширенной системы (43.18)—(43.19), согласно сказанному в наших условиях, также равен m. Поэтому векторы (см. (43.20) и (43.21))

$$b, a_1, \dots, a_m \tag{43.22}$$

линейно зависимы. Это означает, что b является линейной комбинацией векторов $a_1, \dots, a_m$.

В самом деле, линейная зависимость векторов (43.22) означает, что существуют такие числа $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m$, не все равные нулю, что

$$\mu_0 b + \mu_1 a_1 + \dots + \mu_m a_m = 0. \tag{43.23}$$

Здесь заведомо $\mu_0 \neq 0$, так как в противном случае векторы $a_1, \dots, a_m$ оказались бы линейно зависимыми. Поделив равенство (43.23) на μ_0, получим, что b является линейной комбинацией векторов $a_1, \dots, a_m$.

Обратно, если b является линейной комбинацией векторов (43.21), то в системах векторов (43.21) и (43.22) имеется в точности по m линейно независимых векторов, т. е. ранги матриц коэффициентов систем уравнений (43.18) и (43.18)—(43.19) равны.

Итак, условие, что вектор b является линейной комбинацией векторов (43.21):

$$b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m,$$

эквивалентно равенству рангов матриц коэффициентов рассматриваемых основной и расширенной системы уравнений, следовательно, эквивалентно их равносильности. □

Утверждение следствия сразу следует из леммы, поскольку системы (43.18) и (43.18)—(43.19), очевидно, равносильны тогда и только тогда, когда каждое решение системы (43.18) является и решением уравнения (43.19) — остальные уравнения этих систем просто совпадают. □

З а м е ч а н и е 1. Доказанная лемма и ее следствия имеют простую геометрическую интерпретацию в n-мерном е в к л и д о в о м векторном пространстве $\boldsymbol{R}^n$, т. е. в n-мерном пространстве со скалярным произведением. Используя обозначение скалярного произведения, систему (43.18) можно записать в виде

$$(a_i, x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{43.24}$$

а уравнение (43.19) — в виде

$$(b, x) = 0, \tag{43.25}$$

где векторы $a_1, \dots, a_m$ и b определены формулами (43.20) и (43.21), а $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Множество всевозможных линейных комбинаций векторов $a_1, \dots, a_m$ образует подпространство пространства $\boldsymbol{R}^n$ и называется *подпространством, натянутым* на эти *векторы*. Обозначим его через $L(a_1, \dots, a_m)$.

Множество решений системы (43.24) состоит из всех векторов x, ортогональных подпространству $L(a_1, \dots, a_m)$. Обозначим это множество решений через T. Оно также является подпространством пространства $\boldsymbol{R}^n$.

Подпространства $L \overset{\text{def}}{=} L(a_1, \dots, a_m)$ и T называются *ортогональными дополнениями* друг к другу в *пространстве* $\boldsymbol{R}^n$.

Представимость вектора b в виде линейной комбинации векторов $a_1, \dots, a_m$ равносильна его принадлежности подпространству $L = L(a_1, \dots, a_m)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$: $b \in L$. Это условие, в свою очередь, равносильно ортогональности вектора b подпространству T: $b \perp T$, которая означает, что для всех $x \in T$ имеет место равенство $(b, x) = 0$, т. е. что любое решение x системы (43.24) является решением уравнения (43.25). Это и является утверждением следствия леммы.

З а м е ч а н и е 2. Напомним метод, которым можно получить все решения однородной системы линейных уравнений. Пусть система (43.18) состоит из линейно независимых уравнений. Тогда ранг матрицы его коэффициентов равен m. Это означает, что существует минор этой матрицы порядка m, не равный нулю. Пусть для определенности

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{43.26}$$

В этом случае все решения системы (43.18) можно получить, задавая произвольно последние $n—m$ координаты вектора $(x_1, \dots, x_n)$. Остальные координаты однозначно находятся из системы уравнений (43.18). В самом деле, возьмем произвольное решение $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ системы (43.18). После подстановки $x_{m+1} = x_{m+1}^{(0)}, \dots, x_n = x_n^{(0)}$ в (43.18) получится система из m линейных уравнений (с m неизвестными $x_1, \dots, x_m$), матрица коэффициентов которой, в силу условия (43.26), невырожденная. Поэтому существуют единственные значения $x_1, \dots, x_m$, удовлетворяющие получившейся системе. Поскольку $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ также было решением системы (43.18), то $x_1 = x_1^{(0)}, \dots, x_m = x_m^{(0)}$.

Перейдем теперь к анализу стационарных точек функции Лагранжа.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функции $f_0, f_1, \dots, f_m$ непрерывно дифференцируемы в области $G \subset \boldsymbol{R}^n$, $x^{(0)} \in G$, $f_i(x^{(0)}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, и ранг матрицы Якоби функций $f_1, \dots, f_m$ в точке $x^{(0)}$ равен m. Для того чтобы в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ градиент ∇f_0 являлся линейной комбинацией градиентов $\nabla f_1, \dots, \nabla f_m$, необходимо и достаточно, чтобы точка $x^{(0)} = (x_{m+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ была стационарной точкой для функции $g(x) = g(x_{m+1}, \dots, x_n)$* (см. (43.8)).

Напомним, что если в точке $x^{(0)}$ градиент ∇f_0 является линейной комбинацией

$$\nabla f_0 = \lambda_1 \nabla f_1 + \dots + \lambda_m \nabla f_m \tag{43.27}$$

градиентов $\nabla f_1, \dots, \nabla f_m$, то это равносильно тому, что существует функция Лагранжа

$$F = f_0 - \lambda_1 f_1 - \dots - \lambda_m f_m, \tag{43.28}$$

для которой точка $x^{(0)}$ является стационарной:

$$\frac{\partial F(x_0)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{43.29}$$

Это просто координатная запись условия (43.27), так как, в силу (43.28),

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} - \dots - \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Доказательство. По условию ранг матрицы Якоби системы функций $f_1, \ldots, f_m$ в точке $x^{(0)}$ равен m. Будем считать для определенности, как и в п. 43.1, что

$$\left.\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0. \tag{43.30}$$

Подставим в уравнение связи (43.3) функции (43.7), являющиеся решением этих уравнений, и продифференцируем получившиеся относительно переменных $x_{m+1}, \ldots, x_n$ тождества.

Получим для точки ($\tilde{x}^{(0)}$) равенства $df_1(\tilde{x}^{(0)}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, справедливые для любых приращений $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ независимых переменных $x_{m+1}, \ldots, x_n$ (напомним, что дифференциал является линейной функцией, определенной на всем пространстве). Использовав инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных, получим, что в точке $x^{(0)}$ выполняются равенства

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_m}dx_m + \frac{df_i}{\partial x_{m+1}}dx_{m+1} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}dx_n = 0, \tag{43.31}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

где $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ произвольны, а $dx_1, \ldots, dx_m$ находятся из формул (43.7). Таким образом, вектор

$$dx = (dx_1, \ldots, dx_m, dx_{m+1}, \ldots, dx_n) \tag{43.32}$$

является решением линейной однородной системы (43.31).

Отметим, что в силу условия (43.30) значения $dx_1, \ldots, dx_m$ при заданных $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ однозначно находятся и из системы (43.31). Из замечания 2 следует также, что указанным способом получаются все решения системы (43.31).

Стационарность точки $\tilde{x}^{(0)}$ для функции $g(\tilde{x}) = g(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ означает, что $dg(\tilde{x}^{(0)}) = 0$. Это равенство, в силу инвариантности формы первого дифференциала, можно более подробно записать в виде

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_0}{\partial x_m}dx_m + \frac{\partial f_0}{\partial x_{m+1}}dx_{m+1} + \ldots + \frac{\partial f_0}{\partial x_n}dx_n = 0, \tag{43.33}$$

где $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ можно задавать произвольно, а $dx_1, \ldots$ $\ldots, dx_m$ следует находить из формул (43.7) или, что дает тот же результат, из формул (43.31). Иначе говоря, любое реше-

ние системы уравнений (43.31) является и решением уравнения (43.33). Согласно следствию из леммы, это возможно тогда и только тогда, когда уравнение (43.33) является линейной комбинацией уравнений системы (43.31), т. е. когда существуют такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, что

$$\nabla f_0 = \lambda_1 \nabla f_1 + \dots + \lambda_m \nabla f_m. \square$$

З а м е ч а н и е 3. Согласно замечанию 2, совокупность всех решений системы уравнений (43.31) образует подпространство T пространства $\boldsymbol{R}^n$, являющееся ортогональным дополнением к подпространству $L = L(\nabla f_1, \dots, \nabla f_m)$. Любой вектор $y \in T$ ортогонален каждому градиенту ∇f_i, а поэтому его естественно назвать *касательным вектором* в точке $x^{(0)}$ к гиперповерхности $f_i(x) = 0$, являющейся множеством уровня (см. § 19) функции f_i, $i = 1, \dots, m$.

Таким образом, пространство решений T системы (43.31) состоит из векторов, касательных одновременно ко всем гиперповерхностям $f_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, m$, и поэтому его называют касательным пространством пересечения всех гиперповерхностей $f_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Напомним, что векторы касательного пространства T, т. е. решения системы (43.31), были обозначены через dx (см. (43.32)).

Поскольку в точке условного экстремума, согласно теореме 2, имеет место включение

$$\nabla f_0 \in L = L(\nabla f_1, \dots, \nabla f_m), \quad \text{то} \quad \nabla f_0 \perp T.$$

Иначе говоря, градиент ∇f_0 одновременно ортогонален всем касательным dx к гиперповерхностям $f_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$:

$$(\nabla f_0, dx) = 0$$

(это другая запись уравнения (43.33)), т. е. градиент ∇f_0 перпендикулярен касательному пространству T в точке $x^{(0)}$. Но множество всех векторов, ортогональных к ∇f_0, образует $(n-1)$-мерное подпространство T_0, называемое касательным пространством к гиперповерхности $f_0(x) = f_0(x^{(0)})$. В силу сказанного выше, каждый вектор из T, будучи ортогонален градиенту ∇f_0, принадлежит к T_0, т. е. $T \subset T_0$.

Итак, *если $x^{(0)}$ — точка условного экстремума, то $T \subset T_0$, т. е. касательное пространство в точке $x^{(0)}$ пересечения всех гиперповерхностей, задаваемых уравнениями связи, содержится в касательном пространстве в той же точке гиперповерхности $f_0(x) = f_0(x^{(0)})$.*

З а м е ч а н и е 4. Из теоремы 2 еще раз вытекает следствие теоремы 1. В самом деле, если $x^{(0)}$ является точкой условного экстремума, то $x^{(0)}$ является точкой обычного экстремума для функции g (см. п. 43.1) и, следовательно, ее стационарной точкой. Поэтому, согласно теореме 2, точка $x^{(0)}$ является стационарной точкой для функции Лагранжа, т. е. выполняется условие (43.14) или, что то же самое, условие (43.11).

43.5*. Достаточные условия для точек условного экстремума

В этом пункте также будем предполагать выполненными все предположения, наложенные на функции f_0 и f_i, $i = 1, 2, \dots, m$, в п. 43.1. Пусть

$$F = f_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i$$

— функция Лагранжа (см. (43.13)) для функции f_0 и уравнений связи (43.3). Пусть $x^{(0)} \in G$ удовлетворяет уравнениям связи (43.3) и является стационарной точкой функции Лагранжа, т. е. точкой, координаты которой удовлетворяют системе уравнений (43.12) и (43.3). Нашей целью является получение метода, с помощью которого можно установить условия, достаточные для того, чтобы $x^{(0)}$ являлась точкой условного экстремума рассматриваемой задачи.

Заметим прежде всего, что если точка $x \in G$ удовлетворяет уравнениям связи (43.3), то

$$\Delta f = f(x) - f(x^{(0)}) = F(x) - F(x^{(0)}) = \Delta F. \qquad (43.34)$$

Отсюда сразу видно, что если $x^{(0)}$ является точкой обычного экстремума для функции F, т. е. ΔF не меняет знака в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$, то $x^{(0)}$ является точкой условного экстремума для функции f_0. Действительно, из (43.34) следует в этом случае, что приращение Δf_0 для допустимых значений x, т. е. удовлетворяющих уравнениям связи, также не меняет знака.

Это достаточное условие, однако, накладывает слишком сильное ограничение на поведение функции Лагранжа $F(x)$ в рассматриваемой точке — она должна иметь обычный экстремум, что сильно сужает область возможного применения указанного условия при решении задач. Поэтому целесообразно получить более общий достаточный признак условного экстремума.

Пусть функции $f_0, f_1, \dots, f_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $x^{(0)}$ и градиенты $\nabla f_1, \nabla f_2, \dots, \nabla f_m$ линейно независимы в этой точке.

ТЕОРЕМА 3 (достаточные условия для условного экстремума). *Пусть точка $x^{(0)}$ удовлетворяет уравнениям связи и является стационарной точкой функции Лагранжа, т. е.*

$$\frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{43.35}$$

Если второй дифференциал

$$d^2F(x^{(0)}) = \sum_{i,\, j = 1}^{n} \frac{\partial^2 F(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i\, dx_j$$

функции Лагранжа в точке $x^{(0)}$ принимает только положительные (отрицательные) значения при всех значениях dx_1, dx_2, ..., dx_n, не равных одновременно нулю и удовлетворяющих продифференцированным уравнениям связи (43.3), *т. е. уравнениям*

$$\frac{\partial f_k(x^{(0)})}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f_k(x^{(0)})}{\partial x_2}\, dx_2 + \dots + \frac{\partial f_k(x^{(0)})}{\partial x_n}\, dx_n = 0,$$
$$k = 1, 2, \dots, n, \tag{43.36}$$

то точка $x^{(0)}$ является точкой строгого условного минимума (максимума). Если при тех же ограничениях на значения дифференциалов dx_1, dx_2, ..., dx_n второй дифференциал функции Лагранжа принимает как положительные, так и отрицательные значения, то в точке $x^{(0)}$ условного экстремума нет.

Доказательство. Из линейной независимости градиентов $\nabla f_1, \nabla f_2, \dots, \nabla f_m$ следует, что ранг матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ равен m, т. е. у этой матрицы существует не равный нулю минор порядка m. Пусть для определенности

$$\left.\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_m)}\right|_{x = x^{(0)}} \neq 0. \tag{43.37}$$

Тогда в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ переменные $x_1, x_2, \dots$ ..., x_m, в силу уравнений связи

$$f_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \tag{43.38}$$

являются функциями переменных $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$:

$$x_k = \varphi_k(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, m, \tag{43.39}$$

т. е. являются решениями системы уравнений (43.38).

Воспользуемся тем, что точка $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ является точкой строгого условного экстремума функции при выполнении уравнений связи (43.38) тогда и только тогда,

когда точка $\tilde{x}^{(0)} = (x_{m+1}^{(0)}, x_{m+2}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ является точкой обычного строгого локального экстремума для функции

$$\tilde{f}_0(\tilde{x}) = f_0(\varphi_1(\tilde{x}), \varphi_2(\tilde{x}), \dots, \varphi_m(\tilde{x}), \tilde{x}),$$
$$\tilde{x} = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \tag{43.40}$$

для этого, согласно теореме 2 п. 40.2, достаточно, чтобы

$$d\tilde{f}_0(x^{(0)}) = 0, \tag{43.41}$$

а второй дифференциал $d^2\tilde{f}_0(\tilde{x}^{(0)})$ был знакоопределенной квадратичной формой. Вычислим эти дифференциалы. Для удобства функции f_k, $k = 1, 2, \dots, m$, в которых переменные $x_1, x_2, \dots, x_m$ являются функциями (43.39) переменных $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, будем обозначать $\tilde{f}_k$:

$$\tilde{f}_k = f_k\,(\varphi_1(\tilde{x}), (\varphi_2(\tilde{x}), \dots, \varphi_m(\tilde{x}), x_{m+1}, \dots, x_n), \; k = 1, 2, \dots, m.$$

Пусть

$$F = f_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k \tag{43.42}$$

— функция Лагранжа для точки $x^{(0)}$, т. е. координаты $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ этой точки и числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ являются решением системы уравнений (43.3) и (43.12), и пусть $\tilde{F} = \tilde{f}_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \tilde{f}_k$.

Подставив (43.39) в (43.38), получим тождества $\tilde{f}_k \equiv 0$, $k = 1, 2, \dots, m$, продифференцировав которые в точке $\tilde{x}^{(0)}$, получим

$$d\tilde{f}_k \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \tag{43.43}$$

т. е., в силу независимости формы записи первого дифференциала от выбора переменных,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\, dx_i \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \tag{43.44}$$

Здесь $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \dots, dx_n$ являются дифференциалами (приращениями) независимых переменных, а $dx_1 = d\varphi_1(\tilde{x})$, $dx_2 = d\varphi_2(\tilde{x}), \dots, dx_m = d\varphi_m(\tilde{x})$ — дифференциалами функций.

Вычислим первый дифференциал функции $\tilde{f}_0$ в точке $x^{(0)}$:

$$d\tilde{f}_0 \underset{(43.43)}{=} d\tilde{f}_0 + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, d\tilde{f}_k = d\Big(\tilde{f}_0 + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \tilde{f}_k\Big) \underset{(43.42)}{=} dF =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial x_i}\, dx_i \underset{(43.35)}{=} 0. \tag{43.45}$$

(В конце проведенной выкладки была снова использована независимость формы записи первого дифференциала от выбора переменных.)

Дифференцируя тождества (43.43), получим

$$d^2\tilde{f}_k \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \tag{43.46}$$

где по-прежнему дифференциалы $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ связаны соотношениями (43.44). Теперь для второго дифференциала функции (43.40) имеем

$$d^2\tilde{f}_0 \underset{(43.46)}{=} d^2\tilde{f}_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, d^2\tilde{f}_k = d^2\Big(\tilde{f}_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \tilde{f}_k\Big) \underset{(43.42)}{=} d^2\tilde{F} =$$

$$= d(d\tilde{F}) = d\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\, dx_i\Big) = \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i\, dx_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\, d^2 x_i \underset{(43.35)}{=}$$

$$\underset{(43.35)}{=} \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i\, dx_j.$$

Итак,

$$d^2\tilde{f}_0(\tilde{x}^{(0)}) = \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F x^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i\, dx_j, \tag{43.47}$$

где дифференциалы $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ удовлетворяют соотношениям (43.44).

Поэтому если дифференциалы $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, не все равные нулю, связаны соотношениями (43.44) и для них

$$d^2F(x^{(0)}) = \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F x^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i\, dx_j > 0,$$

то, в силу (43.47), для дифференциалов $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \dots, dx_n$ будем иметь $d^2\tilde{f}_0(\tilde{x}^{(0)}) > 0$. При этом не все эти дифференциалы равны нулю. В самом деле, условие (43.37) означает, что определитель системы линейных относительно дифференциалов $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ уравнений (43.44) не равен нулю, поэтому указанная система однозначно разрешима относительно дифференциалов $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ и, следовательно, эти дифференциалы являются линейными комбинациями дифференциалов $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \dots, dx_n$. Отсюда и вытекает, что в случае равенства нулю всех дифференциалов $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \dots, dx_n$ были бы равны нулю вообще все дифференциалы $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$.

Из сказанного следует, что точка $\tilde{x}^{(0)}$ является точкой строгого локального минимума для функции $\tilde{f}_0$, поэтому точка $x^{(0)}$ — точка строгого условного минимума для функции f при выполнении уравнений связи (43.38).

Аналогично с помощью той же теоремы 2 п. 40.2 получаются достаточные условия для точки строгого условного максимума и для отсутствия условного экстремума. □

Таким образом, чтобы исследовать стационарную точку функции Лагранжа (43.13) на условный экстремум, надо исследовать на определенность квадратичную форму (43.39), т. е. второй дифференциал функции Лагранжа в этой точке при выполнении условий связи (43.3) (когда дифференциалы dx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, связаны соотношениями (43.31)). При этом следует иметь в виду, что если второй дифференциал функции Лагранжа в рассматриваемой точке окажется положительно (отрицательно) определенным и без выполнения условий связи, то он будет таковым, конечно, и при их выполнении.

Пусть, например, требуется найти точки экстремума функции $f(x, y) = xy$, когда точка (x, y) лежит на прямой $x - y = 0$. Функцией Лагранжа в данном случае является функция $F(x, y) = xy - \lambda(x - y)$, и так как $\frac{\partial F}{\partial x} = y - \lambda$, $\frac{\partial F}{\partial y} = x + \lambda$, то для определения стационарных точек функции $F(x, y)$, удовлетворяющих условиям связи, имеем систему уравнений

$$x - y = 0, \ \ y - \lambda = 0, \ \ x + \lambda = 0,$$

из которых следует, что $x = y = \lambda = 0$.

Исследуем в точке (0, 0) второй дифференциал функции $F(x, y)$ при выполнении условий связи, т. е. когда $dx - dy = 0$. Имеем

$$d^2F = 2dx\,dy, \tag{43.48}$$

и, значит, при выполнении условий связи

$$d^2F = 2dx^2 \geqslant 0, \tag{43.49}$$

т. е. второй дифференциал (43.48), являясь неопределенной квадратичной формой, при выполнении условий связи превращается в положительно определенную квадратичную форму (43.49). Поэтому (0, 0) является точкой строго условного минимума для рассмотренной задачи. Впрочем, в данном случае это легко усмотреть и сразу: вдоль прямой $x - y = 0$ функция $f(x, y) = xy$ примет вид $f(x, x) = x^2$, имея, очевидно, в точке $x = 0$ строгий минимум.

Глава 5

Интегральное исчисление функций многих переменных

§ 44

Кратные интегралы

44.1. Понятие объема в n-мерном пространстве (мера Жордана). Измеримые множества

Напомним кратко основные понятия, связанные с определением n-мерного объема (площади в случае $n = 2$), и дадим новое определение понятия объема (меры) множества, которое будет отличаться от введенного ранее (см. п. 27.1).

Пусть $\boldsymbol{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — координаты точки x в некоторой фиксированной системе координат ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Множество точек $x \in \boldsymbol{R}^n$, координаты x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, которых удовлетворяют линейному уравнению вида

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_0 = 0, \quad a_1^2 + \ldots + a_n^2 > 0$$

(a_i — фиксированные числа, $i = 1, 2, \ldots, n$), называется *гиперплоскостью* в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. При $n = 3$ понятие гиперплоскости совпадает с понятием обычной плоскости в пространстве $\boldsymbol{R}^3$.

Семейство всевозможных гиперплоскостей

$$x_i = \frac{m}{10^k}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

(k — фиксировано, $k = 0, 1, 2, \ldots$), «разбивает» пространство $\boldsymbol{R}^n$ на n-мерные замкнутые кубы вида

$$Q^n = \left\{x : \frac{m_i}{10^k} \leqslant x_i \leqslant \frac{m_i + 1}{10^k}, i = 1, 2, \ldots, n\right\}, \qquad (44.1)$$

где m_i при $i = 1, 2, \ldots, n$ пробегают независимо друг от друга множество всех целых чисел.

Кубы (44.1) называются *кубами ранга* k, и их совокупность обозначается через T_k, $k = 0, 1, \ldots$.

Множество всех кубов ранга k, очевидно, покрывает все пространство, т. е.

$$\boldsymbol{R}^n = \bigcup_{Q^n \in T^k} \boldsymbol{Q}^n.$$

Два куба одного ранга могут иметь в качестве общих точек лишь некоторые свои граничные точки. В случае $n = 1$ куб (44.1) является, очевидно, отрезком, а в случае $n = 2$ — квадратом.

Число $\frac{1}{10^{kn}}$ называется n-мерным объемом (n-мерной мерой) куба (44.1) и обозначается через $\mu \boldsymbol{Q}^n$:

$$\mu \boldsymbol{Q}^n \stackrel{\text{def}}{=} 10^{-kn}.$$

Для множества S, представляющего собой объединение конечного или счетного числа различных кубов $\boldsymbol{Q}_j^n$ данного ранга k, $j = 1, 2, \ldots$:

$$S = \bigcup_j \boldsymbol{Q}_j^n, \quad \boldsymbol{Q}_j^n \in T_k,$$

его n-мерный объем (n-мерная мера) μS определяется равенством

$$\mu S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \mu\, \boldsymbol{Q}_j^n. \tag{44.2}$$

Очевидно, μS — неотрицательное число или $+\infty$.

Мера μ пустого множества $\varnothing$ по определению полагается равной нулю: $\mu\varnothing = 0$.

Пусть теперь E — произвольное множество в $\boldsymbol{R}^n$. Обозначим через $s_k = s_k(E)$ множество точек всех n-мерных кубов ранга k, целиком лежащих в E, а через $S_k = S_k(E)$ — множество точек всех n-мерных кубов ранга k, каждый из которых пересекается с множеством E по непустому множеству ($k = 0, 1, 2, \ldots$):

$$\begin{aligned} s_k(E) &= \bigcup_{Q^n \subset E} \boldsymbol{Q}^n, \\ S_k(E) &= \bigcup_{Q^n \cap E \neq \varnothing} \boldsymbol{Q}^n, \ \ \boldsymbol{Q}^n \in T_k. \end{aligned} \tag{44.3}$$

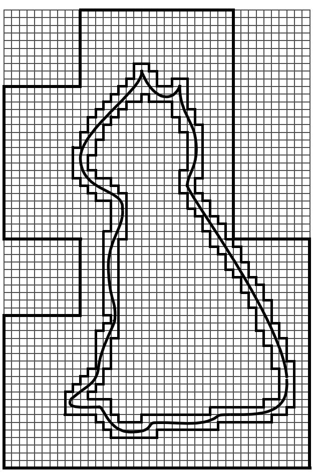


Рис. 49

Таким образом, все кубы ранга k, содержащиеся в s_k, лежат во множестве E, а кубы ранга k, содержащиеся в S_k, образуют покрытие множества E (рис. 49), т. е.

$$s_k(E) \subset E \subset S_k(E).$$

При этом множество E лежит «строго внутри» многогранника $S_k = S_k(E)$, т. е. не пересекается с его границей ∂S_k. Действительно, точка $x \in E \cap \partial S_k$ не может существовать, так как, будучи граничной для S_k, она принадлежала бы грани некоторого куба ранга k. Поскольку рассматриваемые кубы замкнуты, по определению многогранника S_k к нему принадлежали бы и все кубы ранга k, содержащие указанную грань, ибо она содержит точку $x \in E$. Тем самым эта точка не была бы граничной для S_k.

Очевидно,

$$s_0 \subset s_1 \subset \ldots \subset s_k \subset s_{k+1} \subset \ldots, \quad S_0 \supset S_1 \supset \ldots \supset S_k \supset S_{k+1} \supset \ldots$$

и, следовательно, в силу определения (44.2),

$$\mu s_0 \leqslant \mu s_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu s_k \leqslant \mu s_{k+1} \leqslant \ldots,$$

$$\mu S_0 \geqslant \mu S_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu S_k \geqslant \mu S_{k+1} \geqslant \ldots .$$

Для дальнейшего существенно, что, в силу включения $s_k \subset S_k$, для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства $\mu s_k \leqslant \mu S_k$.

Таким образом, получились две монотонные последовательности, членами которых являются элементы расширенного множества действительных чисел $\overline{\boldsymbol{R}}$ (см. п. 2.5), а именно, либо неотрицательные действительные числа, либо $+\infty$. Поэтому для любого множества $E \subset \boldsymbol{R}^n$ всегда существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{k \to \infty} \mu s_k(E) \text{ и } \lim_{k \to \infty} \mu S_k(E),$$

при этом, в силу неравенств $\mu s_k \leqslant \mu S_k$, выполняется неравенство

$$\lim_{k \to \infty} \mu s_k(E) \leqslant \lim_{k \to \infty} \mu S_k(E).$$

Определение 1. *Конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{k \to \infty} \mu s_k(E)$ *называется нижней или внутренней n-мерной мерой Жордана множества E и обозначается через* $\mu_* E$:

$$\mu_* E \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \to \infty} \mu s_k(E), \tag{44.4}$$

а предел $\lim\limits_{k \to \infty} \mu S_k(E)$ *называется верхней или внешней n-мерной мерой Жордана множества E и обозначается через* $\mu^* E$:

$$\mu^* E \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \to \infty} \mu S_k(E). \tag{44.5}$$

Ясно, что
$$0 \leqslant \mu_* E \leqslant \mu^* E.$$

Если нижняя $\mu_* E$ *и верхняя* $\mu^* E$ *меры множества* E *конечны и совпадают, то оно называется измеримым по Жордану. Общее значение нижней и верхней меры Жордана измеримого множества* E *обозначается через* μE *и называется* n*-мерной мерой Жордана или* n*-мерным объемом множества* E:
$$\mu E = \mu_* E = \mu^* E. \tag{44.6}$$

Иногда вместо μE будем писать $\mu_n E$, для того чтобы подчеркнуть, что речь идет о мере множества E, рассматриваемого как подмножество именно n-мерного пространства.

В дальнейшем для простоты меру Жордана будем часто называть просто *мерой*, а множество, измеримое по Жордану, просто *измеримым*.

Под измеримым множеством, как это показывает сам смысл слова «измеримый», в математике подразумевается такое точечное множество в $\boldsymbol{R}^n$, которое можно каким-то образом измерить, т. е. сопоставить ему, по определенным правилам, некоторое неотрицательное число, являющееся объемом в трехмерном случае, площадью в двумерном и длиной в одномерном. Если размерность пространства $n \geqslant 3$, то множество, измеримое по Жордану в этом пространстве, называется также *кубируемым*, а в случае $n = 2$ — *квадрируемым*. Термины «кубируемое и квадрируемое множество» отражают тот факт, что указанное выше измерение множества осуществляется посредством кубов, соответственно квадратов.

Простым вычислением нетрудно проверить, что если множество E представляет собой объединение конечного числа различных n-мерных кубов ($n = 1, 2, \ldots$) данного ранга, то оно измеримо и его мера Жордана совпадает с мерой, определенной равенством (44.2).

Отметим еще, что легко также устанавливается измеримость открытых и полуоткрытых n-мерных кубов с ребрами длины h, т. е. кубов, задаваемых при каждом $i = 1, 2, \ldots, n$ одним из неравенств вида $x_i^{(0)} < x_i < x_i^{(0)} + h$, или $x_i^{(0)} \leqslant x_i < x_i^{(0)} + h$, или $x_i^{(0)} < x_i \leqslant x_i^{(0)} + h$ и равенство $\mu Q = h^n$.

Для любого множества E при каждом $k = 0, 1, 2, \ldots$, очевидно,
$$\mu s_k(E) \geqslant 0, \ \ \mu S_k(E) \geqslant 0.$$

Перейдя к пределу при $k \to \infty$, получим $\mu_* E \geqslant 0$, $\mu^* E \geqslant 0$. Отсюда вытекает следующее свойство меры Жордана.

1^0. *Для всякого измеримого множества* $\mu E \geqslant 0$.

Далее заметим, что в силу определений (44.4) и (44.5) для любого множества E определена конечная или бесконечная нижняя и верхняя меры Жордана, при этом

$$0 \leqslant \mu_* E \leqslant \mu^* E.$$

Отсюда очевидным образом следует, что если верхняя мера множества E равна нулю, $\mu^* E = 0$, то множество E измеримо и $\mu E = 0$.

Если у множества E имеется внутренняя точка, то найдется такой номер k_0, что множество $s_{k_0}(E)$ будет непустым; следовательно, $\mu s_{k_0}(E) > 0$, откуда, в силу (44.3), (44.4) и (44.6), будет следовать, что $\mu_* E > 0$. В самом деле, если x — внутренняя точка множества E, то существует такое $\varepsilon > 0$, что сферическая окрестность $U(x, \varepsilon)$ содержится в E. Поэтому достаточно взять такой ранг k_0, чтобы длина диагонали куба* ранга k_0 была меньше ε:

$$10^{-k_0}\sqrt{n} < \varepsilon.$$

Тогда куб Q^n ранга k, содержащий точку x (такой куб, по крайней мере один, всегда существует) будет целиком лежать во множестве $s_{k_0}(E)$ (рис. 50). Поэтому $\mu s_{k_0}(E) \geqslant \mu Q^n > 0$.

Таким образом, если у множества E имеется внутренняя точка, то его нижняя мера положительна: $\mu_* E \geqslant \mu s_{k_0}(E) > 0$. В частности, *нижняя мера Жордана* любого *открытого множества* G всегда *положительна*: $\mu_* G > 0$.

Верно и обратное утверждение: если $\mu_* E > 0$, то у множества E существуют внутренние точки. В самом деле, в этом случае $\lim\limits_{k \to \infty} \mu s_k(E) = \mu_* E > 0$; следовательно, существует такой номер k_0, что $\mu s_{k_0}(E) > 0$. Это означает, в частности, что множество $s_{k_0}(E)$ не пусто, а так как оно, состоя из n-мерных кубов, имеет внутренние точки и $s_{k_0}(E) \subset E$, то и множество E имеет внутренние точки.

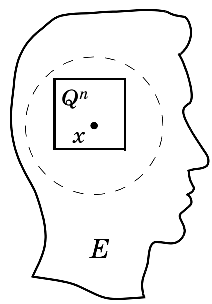


Рис. 50

* Напомним, что диагональ n-мерного куба с ребром длины a равна $a\sqrt{n}$.

Отметим, что определенный нами ранее в п. 27.1 объем открытого множества совпадает с его нижней мерой Жордана. Однако для построения достаточно общего аналога интеграла Римана в случае функций многих переменных понятие только нижней меры Жордана оказывается недостаточным. Для этой цели очень удобно понятие измеримого по Жордану множества.

Если множество E ограничено, то $\mu_* E$ и $\mu^* E$ всегда конечны. Действительно, из ограниченности множества E следует, что оно пересекается только с конечным множеством кубов нулевого ранга и, следовательно, $S_0(E)$ состоит из конечного числа кубов. Поэтому, согласно (44.2), $\mu S_0(E) < +\infty$. Но при любом $k = 0, 1, \ldots$

$$s_k(E) \subset S_k(E) \subset S_0(E).$$

Поэтому

$$0 \leqslant \mu s_k(E) \leqslant \mu S_k(E) \leqslant \mu S_0(E).$$

Отсюда, перейдя к пределу при $k \to +\infty$, получим

$$0 \leqslant \mu_*(E) \leqslant \mu^*(E) \leqslant \mu S_0(E) < +\infty,$$

т. е. меры $\mu_* E$ и $\mu^* E$ конечны.

Если же множество E неограничено, то для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ множество $S_k(E)$ состоит из бесконечного количества кубов ранга k. Поэтому, в силу формулы (44.2), для всех k имеем $\mu S_k(E) = +\infty$, следовательно, и $\mu^* E = +\infty$, т. е. множество E заведомо не измеримо. Отсюда: *если множество измеримо по Жордану, то оно ограничено.*

Как было отмечено выше, в п. 27.1, при определении площади плоских множеств мы ограничились лишь внутренней мерой открытых множеств. Для случая измеримых и, следовательно, ограниченных множеств внутренняя мера совпадает с мерой. Однако внутренняя мера может быть конечной и для неограниченных множеств (это обстоятельство использовалось при выяснении геометрического смысла несобственных интегралов) и, конечно, в этом случае внутренняя мера не является мерой Жордана.

Как нижняя, так и верхняя меры Жордана обладают так называемым свойством монотонности. Сформулируем его в виде леммы.

ЛЕММА 1. *Если* $E_1 \subset E_2$, *то*

$$\mu_* E_1 \leqslant \mu_* E_2, \quad \mu^* E_1 \leqslant \mu^* E_2. \tag{44.7}$$

Это вытекает непосредственно из того, что при всех $k = 0, 1, 2, \dots$ справедливы включения

$$s_k(E_1) \subset s_k(E_1), \quad S_k(E_1) \subset S_k(E_2), \tag{44.8}$$

так как первое из них означает, что куб ранга k, лежащий в E_1, лежит и в E_2, а второе — что куб ранга k, пересекающийся со множеством E_1, пересекается и с E_2. И то, и другое утверждение следует из включения $E_1 \subset E_2$. Из (44.8), в силу (44.2), вытекает справедливость неравенств

$$\mu s_k(E_1) \leqslant \mu s_k(E_2), \quad \mu S_k(E_1) \leqslant \mu S_k(E_2).$$

Устремив здесь k к $+\infty$, получим в пределе (44.7). □

СЛЕДСТВИЕ. *Если* $\mathrm{E}_1 \subset E_2$ *и* $\mu E_2 = 0$, *то* $\mu E_1 = 0$.

Действительно, в силу леммы 1,

$$0 \leqslant \mu^* E_1 \leqslant \mu^* E_2 = \mu E_2 = 0.$$

Следовательно, $\mu^* E_1 = 0$, откуда $\mu E_1 = 0$. □

Из леммы 1 для измеримых множеств вытекает следующее свойство.

2^0 **(монотонность меры).** *Если E_1 и E_2 — измеримые по Жордану множества и $E_1 \subset E_2$, то*

$$\mu E_1 \leqslant \mu E_2. \tag{44.9}$$

ЛЕММА 2 (полуаддитивность верхней меры). *Для любой конечной совокупности множеств $E_1, E_2, \dots, E_m$ имеет место неравенство*

$$\mu^* \bigcup_{j=1}^{m} E_j \leqslant \sum_{j=1}^{m} \mu^* E. \tag{44.10}$$

Доказательство. Для любого ранга $k = 0, 1, 2, \dots$ справедливо равенство

$$S_k\left(\bigcup_{j=1}^{m} E_j\right) = \bigcup_{j=1}^{m} S_k(E_j).$$

В самом деле, каждый куб ранга k, который пересекается с множеством $\bigcup\limits_{j=1}^{m} E_j$, пересекается хотя бы с одним из множеств E_j, и наоборот. Поэтому, в силу (44.2),

$$\mu S_k\left(\bigcup_{j=1}^{m} E_j\right) = \mu \bigcup_{j=1}^{m} S_k(E_j) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \mu S_k(E_j).$$

Перейдя здесь к пределу при $k \to +\infty$, получим (44.10). □

СЛЕДСТВИЕ. *Объединение конечного числа множеств меры нуль имеет меру нуль.*

Действительно, если $\mu E_i = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, то в силу (44.10),

$$\mu^* \bigcup_{j=1}^{m} E_j \leqslant \bigcup_{j=1}^{m} \mu^* E_j = \bigcup_{j=1}^{m} \mu E_j = 0.$$

Следовательно, множество $\bigcup_{j=1}^{m} E_j$ измеримо и его верхняя мера, поэтому и мера равны нулю:

$$\mu \bigcup_{j=1}^{m} E_j = 0. \ \square$$

УПРАЖНЕНИЯ. 1. Показать, что объединение счетной совокупности множеств жордановой меры нуль может не иметь меру нуль.

2. Доказать, что если E_1 и E_2 — открытые множества, то

$$\mu_* (E_1 \cup E_2) \leqslant \mu_* E_1 + \mu_* E_2.$$

(Указание. Полезно воспользоваться теоремой 5 из п. 35.3.)

Будет ли это неравенство всегда справедливым, т. е. без предположения об открытости множеств E_1 и E_2?

3. Привести пример таких непересекающихся множеств E_1 и E_2, что

$$\mu^* (E_1 \cup E_2) \neq \mu^* E_1 + \mu^* E_2.$$

Рассмотрим теперь связь между измеримостью множества и мерой его границы. Предварительно сделаем несколько замечаний.

Замечание 1. Любое объединение конечного или бесконечного множества кубов данного ранга является замкнутым множеством.

Действительно, пусть $\{Q_i\}$ — конечное или бесконечное множество кубов данного ранга k,

$$E = \bigcup_{j} Q_i \tag{44.11}$$

и $x \in \overline{E}$ (как всегда, $\overline{E}$ обозначает замыкание множества E). Любая ограниченная окрестность точки x (как и вообще любой точки пространства $\boldsymbol{R}^n$) пересекается лишь с конечным множеством кубов ранга k и, следовательно, с конечным множеством слагаемых Q_{i_j}, $j = 1, 2, \ldots, m$, суммы $\bigcup_{i} Q_i$. Поэтому

$$x \in \overline{\bigcup_{j=1}^{m} Q_{i_j}}. \tag{44.12}$$

Поскольку кубы Q_i являются замкнутыми множествами и объединение конечного множества замкнутых множеств снова есть замкнутое множество, то

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{m} Q_{i_j}} = \bigcup_{j=1}^{m} Q_{i_j}. \qquad (44.13)$$

Таким образом,

$$x \in \bigcup_{j=1}^{m} Q_{i_j} \subset \bigcup_{i} Q_i = E.$$

Итак, из включения $x \in \overline{E}$ следует, что $x \in E$. Это означает, что $\overline{E} = E$, т. е. что E — замкнутое множество. □

Для всякого множества $E \subset R^n$ обозначим через $\sigma_k = \sigma_k(E)$ объединение кубов ранга k, содержащихся в множестве $S_k = S_k(E)$, но не содержащихся в множестве $s_k = s_k(E)$:

$$\sigma_k = \sigma_k(E) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{Q \in T_k \\ Q \in S_k,\ Q \notin s_k}} Q. \qquad (44.14)$$

Из этого определения следует, что множество S_k состоит из кубов ранга k, каждый из которых принадлежит либо множеству $s_k(E)$, либо множеству $\sigma_k(E)$:

$$S_k = s_k \cup \sigma_k, \qquad (44.15)$$

причем никакой куб ранга k не принадлежит одновременно множествам s_k и σ_k. Поэтому, согласно определению (44.2),

$$\mu S_k = \mu s_k + \mu\sigma_k^{*}. \qquad (44.16)$$

В силу определения (44.14), множество σ_k, так же как и множества s_k и S_k, является объединением кубов одного ранга, поэтому все эти множества являются замкнутыми множествами (см. замечание 1):

$$\bar{s}_k = s_k, \quad \overline{S}_k = S_k, \quad \bar{\sigma}_k = \sigma_k. \qquad (44.17)$$

Напомним, что для любого множества $E \subset \boldsymbol{R}^n$ имеют место (см. п. 35.2) равенства

$$\overline{E} = E_{\text{int}} \cup \partial E, \quad E_{\text{int}} \cap \partial E = \varnothing, \qquad (44.18)$$

где E_{int} — множество внутренних точек множества E, а ∂E — его граница.

---

* Меры μs_k, μS_k и $\mu\sigma_k$ могут быть как конечными, так и бесконечными, причем, как обычно, для любого действительного числа a считается, что $+\infty + a = a + (+\infty) = +\infty$ и $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

Замечание 2. Для любого многогранника S, состоящего из конечного или бесконечного множества кубов одного и того же ранга k, его точка x имеет окрестность, содержащуюся в S, тогда и только тогда, когда все кубы ранга k, содержащие точку x, содержатся в многограннике S. Отсюда следует, что точка пространства $\boldsymbol{R}^n$ принадлежит множеству $(s_k)_{\text{int}}$ тогда и только тогда, когда все кубы ранга k, к которым она принадлежит, содержатся в множестве $s_k = s_k(E)$.

Замечание 3. Наряду с равенством (44.15) имеет место более точное равенство

$$S_k = (s_k)_{\text{int}} \cup \sigma_k, \tag{44.19}$$

в котором слагаемые не пересекаются:

$$(s_k)_{\text{int}} \cap \sigma_k = \varnothing. \tag{44.20}$$

В самом деле, в силу формул (44.15) и (44.18), имеем

$$S_k = (s_k)_{\text{int}} \cup \partial s_k \cup \sigma_k. \tag{44.21}$$

Докажем, что

$$\partial s_k \subset \sigma_k. \tag{44.22}$$

Пусть $x \in \partial s_k$. Так как

$$\partial s_k \subset \bar{s}_k \underset{(42.33)}{=} s_k \subset E,$$

то $x \in E$ и, следовательно, любой куб ранга k, содержащий точку x, содержится в множестве S_k. Согласно замечанию 2, хотя бы один куб Q из этих кубов не содержится в s_k (в противном случае точка x являлась бы внутренней точкой множества s_k, т. е. $x \in (s_k)_{\text{int}}$, следовательно, не принадлежала бы его границе ∂s_k). Таким образом, $x \in Q \subset S_k \notin s_k$.

В силу определения множества σ_k, куб Q, поэтому и точка x, содержатся в σ_k, что и означает справедливость включения (44.22). Из этого включения следует, что в равенстве (44.21) можно отбросить слагаемое ∂s_k (оно входит в другое слагаемое), т. е. имеет место равенство (44.19).

Докажем теперь равенство (44.20). Если $x \in (s_k)_{\text{int}}$, то, согласно замечанию 2, любой куб Q ранга k, содержащий точку $x : Q \ni x$, содержится в s_k и, следовательно, не содержится в $\sigma_k : Q \not\subset \sigma_k$. Это означает, что $x \notin \sigma_k$, т. е. имеет место равенство (44.20). □

ЛЕММА 3. *Для любого множества $E \subset \boldsymbol{R}^n$ справедливы включения*

$$\partial E \subset \sigma_k(E) \subset S_k(\partial E). \tag{44.23}$$

Доказательство. Сначала докажем включение

$$\partial E \subset \sigma_k(E). \tag{44.24}$$

Пусть $x \in \partial E$. Заметив, что из включения $E \subset S_k(E)$ следует аналогичное включение для замыканий этих множеств:

$$\overline{E} \subset \overline{S_k(E)} \underset{(42.31)}{=} S_k(E),$$

получим

$$x \in \partial E \underset{(44.18)}{\subset} \overline{E} \subset S_k(E) \underset{(44.19)}{=} s_k(E)_{\text{int}} \cup \sigma_k(E). \tag{44.25}$$

Из включения $s_k(E) \subset E$ имеем

$$s_k(E)_{\text{int}} \subset E_{\text{int}}. \tag{44.26}$$

Из включения $x \in \partial E$ следует, что точка x не является внутренней точкой множества $E : x \notin E_{\text{int}}$ (так как $E_{\text{int}} \cap \partial E = \varnothing$). Поэтому

$$x \underset{(44.26)}{\notin} s_k(E)_{\text{int}}. \tag{44.27}$$

Из (44.25) и (44.27) вытекает, что точка x принадлежит множеству $\sigma_k(E)$, т. е. включение (44.24) доказано.

Покажем теперь справедливость включения

$$\sigma_k(E) \subset S_k(\partial E). \tag{44.28}$$

Если $x \in \sigma_k(E)$, то существует куб Q ранга k, содержащийся в множестве $\sigma_k(E)$ и содержащий точку x: $Q \ni x$. Согласно определению множества $\sigma_k(E)$, этот куб принадлежит множеству $S_k(E)$ и, следовательно, пересечение куба Q с множеством E не пусто. Поскольку этот куб, согласно тому же определению, не содержится в множестве $s_k(E)$, он содержит и точки, не принадлежащие множеству E. Отсюда, согласно лемме 9 п. 44.2, вытекает, что куб Q, будучи выпуклым, а тем самым и линейно связным множеством, содержит точки границы ∂E множества E, поэтому, согласно определению множества $S_k(\partial E)$, как объединения всех кубов ранга k пересекающихся с множеством ∂E, куб Q содержится в этом множестве. Итак, показано, что из условия $x \in \sigma_k(E)$ следует, что $x \in S_k(\partial E)$, т. е. включение (42.28) также доказано. □

Сформулируем теперь и докажем критерий измеримости множества.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы множество E было измеримым по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и чтобы его граница ∂E имела меру Жордана, равную нулю*:

$$\mu \partial E = 0. \tag{44.29}$$

Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть E — измеримое множество. Тогда, как доказано выше, оно ограничено. Далее, согласно определению измеримого множества, нижняя и верхняя меры множества E конечны и равны: $\mu_* E = \mu^* E$, т. е.

$$\lim_{k \to +\infty} \mu s_k(E) = \lim_{k \to +\infty} \mu S_k(E). \qquad (44.30)$$

Из определения многогранника $\sigma_k(E)$ следует (см. (44.16)), что $\mu\sigma_k(E) = \mu S_k(E) - \mu s_k(E)$. Поэтому из равенства (44.30) имеем

$$\lim_{k \to +\infty} \mu\sigma_k(E) = 0. \qquad (44.31)$$

В силу включения (44.24) и монотонности верхней меры (см. (44.7)), при любом $k = 0, 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$\mu^* \partial E \leqslant \mu^* \sigma_k(E) = \mu\sigma_k(E).$$

Перейдя к пределу при $k \to +\infty$, в силу (44.31), получим $\mu^* \partial E = 0$. Следовательно, множество ∂E измеримо по Жордану, и $\mu \partial E = 0$.

Достаточность. Пусть E — ограниченное множество и $\mu \partial E = 0$. Тогда, по определению меры,

$$\lim_{k \to +\infty} \mu S_k(\partial E) = 0. \qquad (44.32)$$

В силу включения (44.28) и определения (44.2), справедливо неравенство $\mu\sigma_k(E) \leqslant \mu S_k(\partial E)$ и, следовательно, неравенство

$$\mu S_k(E) - \mu s_k(E) \underset{(44.16)}{=} \mu\sigma_k(E) \leqslant \mu S_k(\partial E). \qquad (44.33)$$

Поскольку множество E ограничено, его нижняя мера $\mu_* E$ и верхняя $\mu^* E$ конечны и поэтому (см. (44.4) и (44.5)) в неравенстве (44.33) можно перейти к пределу при $k \to +\infty$. В силу (44.32), получим

$$\mu^* E - \mu_* E = 0, \text{ т. е. } \mu^* E = \mu_* E.$$

Это и означает измеримость по Жордану множества E. □

Замечание 4. Компакт, граница которого имеет меру нуль, является измеримым множеством.

Это сразу следует из теоремы 1, так как всякий компакт есть ограниченное множество.

Замечание 5. Граница измеримого множества, как граница всякого ограниченного множества, является ограниченным множеством, а так как граница всегда замкнутое мно-

жество, то в данном случае оно является компактом. Таким образом, согласно теореме 1, граница измеримого множества есть компакт меры нуль.

С помощью теоремы 1 легко показать, что при теоретико-множественных операциях объединения множеств, пересечения и вычитания их измеримость не нарушается.

Предварительно докажем одну геометрическую лемму.

ЛЕММА 4. *Для любых двух множеств A и B, лежащих в пространстве $\boldsymbol{R}^n$, справедливы следующие включения* (рис. 51):

$$\partial (A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B, \tag{44.34}$$

$$\partial (A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B, \tag{44.35}$$

$$\partial (A \setminus B) \subset \partial A \cup \partial B. \tag{44.36}$$

Доказательство. 1) Докажем включение (44.34). Если $x \in \partial(A \cup B)$, то в любой окрестности точки x содержатся как точки, принадлежащие множеству $A \cup B$, так и точки, не принадлежащие ему. Возможны два случая: либо в любой окрестности точки x содержатся точки множества A, либо существует окрестность U_0 точки x, не содержащая точек множества A. В первом случае в любой окрестности точки x имеются точки как принадлежащие множеству A, так и не принадлежащие множеству $A \cup B$ и тем более не принадлежащие множеству A. Это означает, что $x \in \partial A$.

Во втором случае, какова бы ни была окрестность U точки x, окрестность $U \cap U_0$ этой точки, как и всякая ее окрестность, содержит точки множества $A \cup B$, причем в этом случае все они принадлежат множеству B (так как U_0 не содержит точек множества A) и содержат точки, не принадлежащие множеству $A \cup B$, следовательно, не принадлежащие и множеству B. Поскольку $U \cap U_0 \subset U$, в рассматриваемом случае в произвольной окрестности U точки x имеются точки как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству B. Это означает, что $x \in \partial B$.

Итак, имеет место по крайней мере одно из включений $x \in \partial A$ или $x \in \partial B$, т. е. $x \in \partial A \cup \partial B$.

2) Докажем включение (44.35). Если $x \in \partial(A \cap B)$, то в любой окрестности точки x содержатся точки как принадлежащие пересечению $A \cap B$ (и, следовательно, точки множества A и B), так и точки, не принадлежащие этому

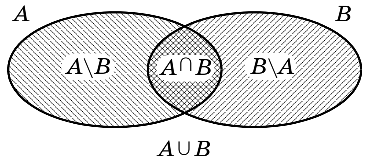


Рис. 51

пересечению. Возможны два случая: либо в любой окрестности точки x имеются точки, не принадлежащие множеству A, тогда $x \in \partial A$, либо существует окрестность U_0 точки x, все точки которой принадлежат множеству A. Тогда для любой окрестности U точки x в ее окрестности $U \cap U_0$, как и во всякой окрестности этой точки, имеются точки, принадлежащие пересечению $A \cap B$, следовательно, и множеству B, и точки, не принадлежащие $A \cap B$, поэтому не принадлежащие и множеству B (ибо в U_0 все точки принадлежат множеству A). Таким образом, в окрестности $U \cap U_0$, и, следовательно, в любой окрестности U точки x (так как $U \cap U_0 \subset U$) имеются точки как принадлежащие множеству B, так и не принадлежащие ему. Это означает, что $x \in \partial B$.

Итак, если $x \in \partial(A \cap B)$, то $x \in \partial A \cup \partial B$.

3) Докажем включение (42.32). Если $x \in \partial(A \backslash B)$, то в любой окрестности точки x содержатся как точки, принадлежащие разности $A \backslash B$, так и не принадлежащие ей. Возможны два случая.

Первый случай: в любой окрестности точки x содержатся точки, не принадлежащие множеству A; тогда в любой окрестности точки x имеются точки как принадлежащие множеству A (так как имеются точки из разности $A \backslash B$), так и не принадлежащие A. Поэтому в этом случае $x \in \partial A$.

Второй случай: у точки x существует окрестность U_0, все точки которой принадлежат множеству A. Тогда для любой окрестности U точки x в окрестности $U \cap U_0$ этой точки имеются точки, принадлежащие разности $A \backslash B$, а так как $U \subset U_0 \subset$ $\subset A$, то эти точки не принадлежат множеству B. В окрестности $U \cap U_0$ существуют также точки, не принадлежащие разности $A \backslash B$, а так как они принадлежат множеству A, то они принадлежат и множеству B (в противном случае они принадлежали бы разности $A \backslash B$). Поскольку $U \cap U_0 \subset U$, то в окрестности U содержатся точки как принадлежащие множеству B, так и не принадлежащие ему. Это означает, что $x \in \partial B$. Таким образом, если $x \in \partial(A \backslash B)$, то $x \in \partial A \cup \partial B$. □

Из включений (44.34) и (44.35) методом математической индукции для любого конечного числа множеств легко устанавливается справедливость включений

$$\partial \bigcup_{j=1}^{m} E_j \subset \bigcup_{j=1}^{m} \partial E_j, \quad \partial \bigcap_{j=1}^{m} E_j \subset \bigcup_{j=1}^{m} \partial E_j. \tag{44.37}$$

3^0. *Объединение и пересечение конечного числа измеримых по Жордану множеств, а также разность двух таких множеств являются измеримыми по Жордану множествами.*

В самом деле, если множества E_j измеримы, то, согласно теореме 1, $\mu\partial E_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$. Поэтому, в силу следствия из леммы 2, $\mu \bigcup_{j=1}^{m} \partial E_j = 0$, тогда (см. следствие леммы 1) из включений (44.37) следует соответственно, что

$$\mu\partial \bigcup_{j=1}^{m} E_j = 0, \quad \mu\partial \bigcap_{j=1}^{m} E_j = 0.$$

Отсюда имеем, в силу той же теоремы 1, что множества $\bigcup_{j=1}^{m} E_j$ и $\bigcap_{j=1}^{m} E_j$ также измеримы. Аналогично доказывается измеримость разности измеримых множеств.

Теперь можно легко доказать, что для меры Жордана справедливо неравенство, аналогичное неравенству (44.10) для верхней меры. Сформулируем соответствующее утверждение.

Для любой конечной совокупности измеримых множеств $E_1, E_2, \dots, E_m$ справедливо неравенство

$$\mu \bigcup_{i=1}^{m} E_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mu E_i. \qquad (44.38)$$

Действительно, если множества E_i измеримы, то $\mu^* E_i = \mu E_i$, и, согласно доказанному выше, объединение $\bigcup_{i=1}^{m} E_i$ также измеримо, и, следовательно, $\mu^* \bigcup_{i=1}^{m} E_i = \mu \bigcup_{i=1}^{m} E_i$. Поэтому формула (44.38) в рассматриваемом случае совпадает с формулой (44.10).

4^0 **(аддитивность меры).** *Мера объединения конечного числа попарно непересекающихся измеримых по Жордану множеств равна сумме мер этих множеств.*

Таким образом, если E_i — измеримые множества, $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, то

$$\mu \bigcup_{i=1}^{m} E_i = \sum_{j=1}^{m} \mu E_i. \qquad (44.39)$$

Докажем это. Поскольку для любого ранга k справедливо включение $s_k(E_i) \cap s_k(E_i) \subset E_i \cap E_j$, из условия $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$ следует, что $s_k(E_i) \cap s_k(E_j) = \varnothing$, $i \neq j$; поэтому, согласно (44.2),

$$\sum_{i=1}^{m} \mu s_k(E_i) = \mu \bigcup_{i=1}^{m} s_k(E_i). \qquad (44.40)$$

Если куб ранга k лежит в некотором множестве E_i, то он лежит и в объединении $\bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i$, следовательно,

$$\bigcup_{i=1}^{m} s_k(E_i) \subset s_k\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right).$$

Отсюда, в силу (44.40) и монотонности меры (в данном случае даже из формулы (44.2)), вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{m} \mu s_k(E_i) = \mu \bigcup_{i=1}^{m} s_k(E_i) \leqslant \mu s_k\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right).$$

Перейдя к пределу при $k \to +\infty$, получим

$$\sum_{i=1}^{m} \mu E_i \leqslant \mu \bigcup_{i=1}^{m} E_i. \qquad (44.41)$$

С другой стороны, для любых измеримых множеств справедливо обратное неравенство (44.38). Очевидно, что из (44.38) и (44.41) следует равенство (44.39), т. е. аддитивность меры.

З а м е ч а н и е 6. Из свойств 3^0 и 4^0 меры вытекает, что если к измеримому множеству присоединить или вычесть из него множество меры нуль, то полученное множество также измеримо, и его мера будет равной мере исходного множества. Действительно, если E — измеримое множество, а $\mu E_0 = 0$, то по свойству 3^0 меры, множества $E \backslash E_0$ и $E \cup E_0$ также измеримы. Далее согласно свойству 4^0 при $E_0 \subset E$ и $\mu E_0 = 0$ имеем

$$\mu E = \mu[(E \backslash E_0) \cup E_0] = \mu(E \backslash E_0) + \mu E_0 = \mu(E \backslash E_0).$$

В силу же монотонности меры и неравенства (44.38), для любого E_0, $\mu E_0 = 0$, справедливы неравенства

$$\mu E \leqslant \mu(E \cup E_0) \leqslant \mu E + \mu E_0 = \mu E,$$

откуда $\mu(E \cup E_0) = \mu E$.

В свою очередь, из сказанного следует, что если к измеримому множеству присоединить или вычесть из него какое-то множество его граничных точек, то получится снова измеримое множество с той же мерой, что и данное. Это вытекает из того, что, в силу теоремы 1, граница измеримого множества, а значит, и любое ее подмножество, имеют меру нуль. Таким образом, в частности, если множество E измеримо, то его замыкание $\overline{E} = E \cup \partial E$ и внутренность E_{int} также измеримы, причем $\mu E = \mu \overline{E} = \mu E_{\text{int}}$.

Обратное утверждение неверно: *существуют неизмеримые по Жордану множества, замыкания которых измеримы*. Простым примером подобного множества является множество рациональных точек на некотором отрезке. Оно неизмеримо (почему?), а его замыканием является отрезок, который измерим.

Отметим еще, что замыкание измеримого множества, как и всякого ограниченного множества, является компактом. Таким образом, замыкание измеримого множества есть измеримый компакт.

5^0. *Мера множества не меняется при параллельном переносе.*

Прежде чем доказывать это утверждение, докажем еще одну лемму.

ЛЕММА 5. *Если*

$$A_m \subset E \subset B_m,$$

A_m, B_m — измеримые множества, $m = 1, 2, \ldots$, и

$$\lim_{m \to \infty} \mu(B_m \backslash A_m) = 0,$$

то множество E также измеримо и

$$\mu E = \lim_{m \to \infty} \mu A_m = \lim_{m \to \infty} \mu B_m.$$

Доказательство. Множества B_m, будучи измеримыми множествами, ограничены. Из включения $E \subset B_m$ следует, что и множество E ограничено, поэтому существуют конечные пределы $\lim\limits_{k \to \infty} s_k(E)$, $\lim\limits_{k \to \infty} S_k(E)$.

Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. В силу условий леммы, существует такой номер m_0, что

$$\mu B_{m_0} - \mu A_{m_0} = \mu (B_{m_0} \setminus A_{m_0}) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Для номера m_0 выберем такой номер k_0, что для всех номеров $k > k_0$ выполняются неравенства

$$\mu s_k (A_{m_0}) > \mu A_{m_0} - \frac{\varepsilon}{3}, \quad \mu S_k(B_{m_0}) < \mu B_{m_0} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Из включения

$$A_{m_0} \subset E \subset B_{m_0}$$

имеем

$$s_k(A_{m_0}) \subset s_k(E) \subset S_k(E) \subset S_k(B_{m_0})$$

и, следовательно,

$$\mu A_{m_0} - \frac{\varepsilon}{3} < \mu s_k(A_{m_0}) \leqslant \mu s_k(E) \leqslant \mu S_k(E) \leqslant \mu S_k(B_{m_0}) < \mu B_{m_0} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда имеем, что для всех $k > k_0$ выполняются неравенства

$$0 \leqslant \mu S_k(E) - \mu s_k(E) < \mu B_{m_0} + \frac{\varepsilon}{3} - \mu A_{m_0} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{k \to \infty} (\mu S_k(E) - \mu s_k(E)) = 0.$$

Согласно доказанному выше, существуют конечные пределы $\lim\limits_{k \to \infty} \mu s_k(E)$ и $\lim\limits_{k \to \infty} \mu S_k(E)$, поэтому

$$\lim_{k \to \infty} \mu s_k(E) = \lim_{k \to \infty} \mu S_k(E) = \mu E,$$

следовательно, множество E измеримо. Теперь из включения $A_m \subset E \subset B_m$ получим $\mu A_m \leqslant \mu E \leqslant \mu B_m$, откуда, положив $m \to \infty$, будем иметь

$$\lim_{m \to \infty} \mu A_m = \lim_{m \to \infty} \mu B_m = \mu E,$$

так как по условию леммы

$$\lim_{k \to \infty} (\mu B_k - \mu A_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(B_k \backslash \mu A_k) = 0. \ \square$$

Из леммы 5 следует, что для получения предельным переходом меры множества E его не обязательно аппроксимировать изнутри многогранниками $s_k(E)$, а снаружи многогранниками $S_k(E)$: можно вместо них брать любые измеримые множества A_k и B_k, удовлетворяющие условиям $A_k \subset E \subset B_k$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{k \to \infty} \mu(B_k A_k) = 0$.

Докажем теперь свойство 5^0 меры.

Пусть $E \subset \boldsymbol{R}_n$, $a \in \boldsymbol{R}_n$ и

$$E + a = \{y \in \boldsymbol{R}^n : y = x + a,\ x \in E\}.$$

В этом случае говорят, что множество $E + a$ получено из множества E параллельным переносом его на вектор a в пространстве $\boldsymbol{R}^n$.

Если Q — n-мерный куб с ребрами длины h, параллельными осям координат, то множество $Q + a$ также является кубом того же вида, следовательно, как это отмечалось раньше, — измеримым множеством и

$$\mu (Q + a) = \mu Q = h^n.$$

Для каждого натурального k множества $A_k = s_k(E) + a$, $B_k = S_k(E) + a$ измеримы, так как являются объединением

конечного множества измеримых множеств вида $Q + a$, где Q — куб ранга k и

$$\mu A_k = \mu s_k(E),\ \ \mu B_k = \mu S_k(E),$$

так как меры множеств A_k и B_k равны сумме мер (как в формуле (44.2)) составляющих их кубов.

Пусть теперь E — измеримое множество и, следовательно,

$$\lim_{k \to \infty} \mu s_k(E) = \lim_{k \to \infty} \mu S_k(E) = \mu E.$$

Поскольку

$$A_k \subset E + a \subset B_k$$

и

$$\lim_{k \to \infty} \mu(B_k \setminus A_k) = \lim_{k \to \infty} (\mu B_k - \mu A_k) = \lim_{k \to \infty} (\mu S_k(E) - \mu s_k(E)) = 0,$$

то, согласно лемме 5, множество $E + a$ измеримо и

$$\mu\,(E + a) = \lim_{k \to \infty} \mu A_k = \lim_{k \to \infty} \mu s_k\,(E) = \mu E. \ \square$$

Замечание 7. Отметим, что как нижняя, так и верхняя меры множеств не обладают свойствами аддитивности. Это видно уже в одномерном случае. Например, если A — множество рациональных, а B — иррациональных чисел на отрезке [0, 1], то

$$\mu_* A = \mu_* B = 0,\ \ \mu_*(A \cup B) = \mu_*[0, 1] = 1 \neq 0 = \mu_* A + \mu_* B,$$
$$\mu^* A = \mu^* B = 1,\ \ \mu^*(A \cup B) = \mu^*[0, 1] = 1 \neq 2 = \mu^* A + \mu^* B.$$

Примеры измеримых множеств сколь угодно большой размерности можно получить с помощью построения цилиндров, основаниями которых служат также измеримые множества. Сформулируем определение цилиндра.

Определение 2. *Пусть E_0 — множество, лежащее на гиперплоскости $\boldsymbol{R}^{n-1} = \{x : x_n = 0\}$ пространства $\boldsymbol{R}^n$, a и b — действительные числа, $a \leqslant b$. Множество*

$$E = \{x : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) \in E_0,\ a \leqslant x_n \leqslant b\}$$

называется цилиндром с основанием E_0 и образующей (параллельной координатной оси x_n) длины $h = b - a$.

Очевидно, что, используя понятие произведения множеств (см. п. 1.2* или 41.2), можно сказать, что цилиндр E является произведением множеств E_0 и отрезка $[a, b]$: $E = E_0 \times [a, b]$. Если E_0 — ограниченное множество, то и цилиндр с основанием E_0 является ограниченным множеством.

Отсюда следует, что всякий цилиндр, в основании которого лежит измеримое множество, ограничен, ибо измеримое множество ограничено.

ТЕОРЕМА 2. *Если E_0 — измеримое по Жордану множество пространства $\boldsymbol{R}^{n-1}$, то всякий цилиндр E с основанием E_0 является измеримым по Жордану множеством в пространстве $\boldsymbol{R}^n$, и*

$$\mu_n E = h\mu_{n-1}E_0, \qquad (44.42)$$

где h — длина образующей цилиндра E.

СЛЕДСТВИЕ. *Если основание цилиндра имеет $(n-1)$-мерную меру, равную нулю, то сам цилиндр имеет n-мерную меру, также равную нулю.*

Доказательство теоремы. Прежде всего заметим, что проекция* каждого n-мерного куба $\boldsymbol{Q}^n$ ранга k является $(n-1)$-мерным кубом $\boldsymbol{Q}^{n-1}$ также ранга k и

$$\mu \boldsymbol{Q}^n = 10^{-k}\mu \boldsymbol{Q}^{n-1}.$$

Обозначим $Q_1^{n-1}, \ldots, Q_{m_k}^{n-1}$ $(n-1)$-мерные кубы ранга k, составляющие множество $S_k(E_0)$, а $q_1^{n-1}, \ldots, q_{l_k}^{n-1}$ — $(n-1)$-мерные кубы ранга k, составляющие множество $s_k(E_0)$. Пусть $Q_{i,1}^n, \ldots, Q_{i,p_k}^n$ суть те все n-мерные кубы ранга k, содержащиеся в множестве $S_k(E)$, которые проектируются в один и тот же куб $Q_i^{n-1} \subset S_k(E_0)$. Поскольку множество E — цилиндр, число p_k таких кубов одно и то же для всех $i = 1, 2, \ldots, m$, поэтому

$$S_k(E) = \bigcup_{i=1}^{m_k} \bigcup_{j=1}^{p_k} \boldsymbol{Q}_{i,j}^n.$$

Аналогично, если $q_{i,j}^n, \ldots, q_{i,r_k}^n$ — кубы ранга k, содержащиеся в множестве $s_k(E)$ и проектирующиеся в один и тот же куб $q_i^{n-1} \subset s_k(E_0)$, то число r_k таких кубов одно и то же для всех $i = 1, 2, \ldots, l_k$ и, следовательно,

$$s_k(E) = \bigcup_{i=1}^{l_k} \bigcup_{j=1}^{r_k} q_{i,j}^n.$$

---

* Проекцией $\text{пр}_{x_n} E$ множества $E \subset \boldsymbol{R}^n$ на гиперплоскость $\boldsymbol{R}^{n-1} = \{x : x_n = 0\}$ называется множество точек вида $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$, для каждой из которых существует такое x_n, что $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in E$.

Проекции на координатную ось x_n множеств $\bigcup_{j=1}^{p_k} Q_{i,j}^n$, $i = 1, 2, \ldots, m_k$, и $\bigcup_{j=1}^{r_k} q_{i,j}^n$, $i = 1, 2, \ldots, l_k$, представляют собой отрезки соответственно длин $\frac{p_k}{10^k}$ и $\frac{r_k}{10^k}$, при этом (см. рис. 52) выполняются неравенства

$$\frac{p_k}{10^k} \leqslant h + \frac{2}{10^k}, \quad \frac{r_k}{10^k} \geqslant h - \frac{2}{10^k}. \qquad (44.43)$$

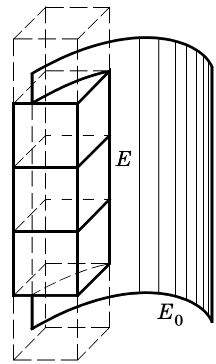


Рис. 52

Поэтому

$$\mu S_k(E) = \sum_{i=1}^{m_k} \sum_{j=1}^{p_k} \mu Q_{i,j}^n = \sum_{i=1}^{m_k} \frac{p_k}{10^k} \mu Q_i^{n-1} \underset{(44.43)}{\leqslant}$$

$$\underset{(44.43)}{\leqslant} \left(h + \frac{2}{10^k}\right) \sum_{i=1}^{m_k} \mu Q_i^{n-1} = \left(h + \frac{2}{10^k}\right) \mu S_k(E_0), \qquad (44.44)$$

$$\mu s_k(E) = \sum_{i=1}^{l_k} \sum_{j=1}^{r_k} \mu q_{i,j}^n = \sum_{i=1}^{l_k} \frac{r_k}{10^k} \mu q_i^{n-1} \underset{(44.43)}{\geqslant}$$

$$\underset{(44.43)}{\geqslant} \left(h - \frac{2}{10^k}\right) \sum_{i=1}^{l_k} \mu q_i^{n-1} = \left(h - \frac{2}{10^k}\right) \mu s_k(E_0). \qquad (44.45)$$

Следовательно,

$$\left(h - \frac{2}{10^k}\right) \mu s_k(E_0) \underset{(44.45)}{\leqslant} \mu s_k(E) \leqslant \mu S_k(E) \underset{(44.44)}{\leqslant}$$

$$\underset{(44.44)}{\leqslant} \left(h + \frac{2}{10^k}\right) \mu S_k(E_0). \qquad (44.46)$$

В силу измеримости множества E_0, имеем

$$\lim_{k \to \infty} \mu s_k(E_0) = \lim_{k \to \infty} \mu S_k(E_0) = \mu_{n-1}(E_0).$$

Поэтому, перейдя к пределу при $k \to \infty$ в неравенствах (44.46), получим, что существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \mu s_k(E) = \lim_{k \to \infty} \mu S_k(E) = h\mu_{n-1} E_0,$$

что означает измеримость цилиндра E и справедливость формулы (44.42). □

Задача 11. Построить пример неизмеримой по Жордану области.

Задача 12. Доказать, что мера Жордана не зависит от выбора декартовой системы координат.

44.2. Множества меры нуль

В предыдущем пункте было установлено, что множество измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда его граница имеет меру нуль. Поэтому полезно иметь признаки, по которым можно было бы установить, что множество имеет меру нуль. Достаточно общим примером множеств меры нуль являются цилиндры, в основании которых лежат множества меры нуль (см. следствие из теоремы 2). Другой широкий класс множеств меры нуль дается в следующей ниже теореме.

ТЕОРЕМА 3. *График всякой непрерывной на компакте функции имеет меру нуль.*

Доказательство. Пусть функция $y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна на компакте $A \subset \boldsymbol{R}_x^n$. Пусть E — ее график, т. е. множество таких точек $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$ в $(n+1)$-мерном пространстве $\boldsymbol{R}_{xy}^{n+1}$, что $(x_1, \ldots, x_n) \in A$, а $y = f(x_1, \ldots, x_n)$:

$$E = \{(x, y) : (x_1, \ldots, x_n) \in A,\ y = f(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Покажем, что $(n + 1)$-мерная мера Жордана множества E равна нулю. Множество A, будучи компактом, ограничено. Поэтому существует такое натуральное число m, что n-мерный куб

$$P_m = \{x : -m \leqslant x_i \leqslant m,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

содержит множество $A : P_m \supset A$. Тем более куб

$$P_{m+1} = \{x : -m - 1 \leqslant x_i \leqslant m + 1,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

также содержит $A : P_{m+1} \supset A$, и, более того, каким бы ни был куб Q некоторого ранга $k = 0, 1, 2, \ldots$, пересекающийся со множеством A, т. е. $Q \subset S_k(A)$, он также содержится в P_{m+1} : $Q \subset P_{m+1}$. Поэтому при любом k имеем $S_k(A) \subset P_{m+1}$. (Здесь и в дальнейшем через $S_k(A)$, $S_k(E)$, как и в п. 44.1, обозначаются множества точек всех кубов ранга k соответствующих пространств, пересекающихся с множествами $A \subset \boldsymbol{R}_x^n$ и $E \subset \boldsymbol{R}_{xy}^{n+1}$.)

Обозначим Q_i^n, $i = 1, 2, \ldots, m_k$, n-мерные кубы ранга k, составляющие множество $S_k(A)$, т. е. $S_k(A) = \bigcup\limits_{i=1}^{m_k} Q_i^n$. Тогда множество $S_k(E)$ распадается на конечное число «столбиков» $S_k^{(i)}$, каждый из которых состоит из $(n + 1)$-мерных кубов ранга k $Q_{i,1}^{n+1}, \ldots, Q_{i,p_i}^{n+1}$, имеющих одну и ту же проекцию (см. сноску на с. 412), куб Q_i^n в пространстве $\boldsymbol{R}_x^n$ (на рис. 53 изображен случай $n = 1$):

$$S_k(E) = \bigcup_{i=1}^{m_k} S_k^{(i)}, \quad S_k^{(i)} = \bigcup_{j=1}^{p_i} Q_{i,j}^{n+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (44.47)$$

Обозначим через $\omega(\delta)$ модуль непрерывности функции f на компакте A. Замечая, что диагональ (диаметр*) n-мерного куба с ребром длины $1/10^k$ равна $\sqrt{n}/10^k$, для высоты $h_k^{(i)}$ каждого столбика $S_k^{(i)}$ имеем (см. рис. 53) оценку

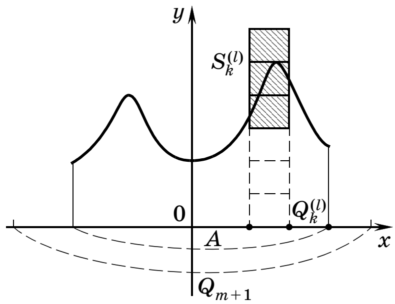


Рис. 53

$$h_k^{(i)} \leqslant \omega\left(\frac{\sqrt{n}}{10^k}\right) + \frac{2}{10^k}. \qquad (44.48)$$

Действительно, для оценки высоты $h_k^{(i)}$ к расстоянию $\omega(10^{-k}\sqrt{n})$ между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x)$ на кубе $Q_k^{(i)}$ достаточно добавить длины ребер самого нижнего и самого верхнего кубов рассматриваемого столбика $S_k^{(i)}$ (эта оценка достигается, когда точки графика, соответствующие указанным экстремальным значениям, окажутся на гранях кубов ранга k). Из (44.47) и (44.48) получаем

$$\mu S_h(E) = \mu \bigcup_{i=1}^{m_k} S_k^{(i)} = \sum_{i=1}^{m_k} \mu S_k^{(i)} = \sum_{i=1}^{m_k} h_k^{(i)} \mu Q_i^n \leqslant$$

$$\leqslant \left[\omega\left(\frac{\sqrt{n}}{10^k}\right) + \frac{2}{10^k}\right] \sum_{i=1}^{m_k} \mu Q_i^n \leqslant \left[\omega\left(\frac{\sqrt{n}}{10^k}\right) + \frac{2}{10^k}\right] \mu P_{m+1}. \qquad (44.49)$$

Поскольку функция f непрерывна на компакте, она равномерно непрерывна на нем, поэтому $\lim\limits_{k \to +\infty} \omega(10^{-k}\sqrt{n}) = 0$, и поскольку $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{2}{10^k} = 0$, из (44.49) имеем $\lim\limits_{k \to \infty} \mu S_k(E) = 0$, а это и означает, что $\mu^* E = 0$, следовательно, и $\mu E = 0$. □

В силу теорем 2 и 3, всякое ограниченное множество, границу которого можно представить как объединение конечного числа множеств, каждое из которых представляет собой либо часть графика непрерывной на ограниченном замкнутом множестве функции, либо часть цилиндра с основанием меры нуль, является измеримым множеством, так как, в силу аддитивности меры, мера границы указанного множества равна нулю, и, следовательно, согласно теореме 1, оно измеримо. Таким образом, получено описание достаточно широкого класса множеств, измеримых по Жордану и часто встречаю-

* Определение диаметра множества см. в п. 35.3.

щихся в математическом анализе и его приложениях. Например, плоские множества (криволинейные трапеции, «секторы» кривых, заданных в полярных координатах, а также тела вращения, площади и соответственно объемы которых вычислялись в § 28 т. 1 с помощью одномерного интеграла Римана, являются измеримыми по Жордану множествами, ибо, как нетрудно убедиться, их границы имеют меру нуль).

Подобным же образом измеримы по Жордану параллелепипеды и эллипсоиды, в частности — шары, так как их границы можно представить в виде объединения графиков непрерывных на компактах функций.

Заметим, что в § 27 т. 1 было введено понятие меры mes G для открытых множеств. Сравнивая ее определение с определением, приведенным в п. 44.1, видим, что mes $G = \mu_* G$, т. е. введенная в § 27 т. 1 мера, как это уже отмечалось, является нижней мерой Жордана. Однако в силу сказанного выше все рассмотренные в примерах § 28 т. 1 множества были измеримыми по Жордану и, следовательно, для них мера mes G являлась мерой Жордана, т. е. для них имело место mes $G = \mu G$.

Представляет интерес обобщить теорему 3 на случай параметрически заданных множеств, в частности, на случай параметрических кривых. Оказывается, что даже в этом случае одной лишь непрерывности рассматриваемых кривых недостаточно для того, чтобы они имели меру нуль. Существуют, например, кривые $x_i = x_i(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $i = 1, 2, \dots, n$, ($x_i(t)$ — непрерывные на некотором отрезке $[a, b]$ функции), называемые кривыми Пеано, которые проходят через каждую точку некоторого n-мерного куба и, следовательно, не имеют меры нуль.

Задача 13. Построить пример кривой Пеано.

ТЕОРЕМА 4. *Всякая плоская спрямляемая кривая имеет меру нуль.*

Доказательство. Пусть задана спрямляемая кривая Γ, длина которой равна S. Пусть далее $r = r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — некоторое представление кривой Γ. Разобьем ее последовательно, т. е. в порядке возрастания параметра t точками $r(t_i)$, $t_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \dots, m$, $t_0 = a$, $t_m = b$, на m равных по длине частей, т. е. возьмем такое разбиение $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=m}$ отрезка $[a, b]$, чтобы длина каждой части Γ_i (кривой Γ), задаваемой представлением $r = r(t)$, $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, имела длину $\frac{S}{m}$.

Обозначим через K_i замкнутый круг с центром в точке $r(t_{i-1})$ и радиусом $\frac{S}{m}$. Дуга Γ_i имеет длину $\frac{S}{m}$, и ее начало явля-

ется центром круга K_i, поэтому вся она лежит в этом круге (рис. 54). Отсюда вытекает, что вся кривая Γ содержится в объединении кругов K_i:

$$\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{m} K_i.$$

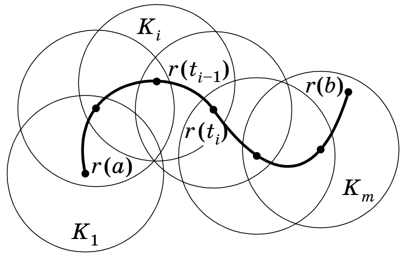


Рис. 54

Следовательно, в силу монотонности и полуаддитивности верхней меры (см. леммы 1 и 2 в п. 44.1)

$$\mu^*\Gamma \leqslant \mu^* \bigcup_{i=1}^{m} K_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mu^* K_i. \quad (44.50)$$

Но

$$\mu^* K_i = \mu K_i = \pi \left(\frac{S}{m}\right)^2, \quad i = 1, 2, \ldots, m^*,$$

поэтому из (44.50) имеем $\mu^*\Gamma \leqslant \pi S^2/m$. Левая часть неравенства не зависит от m, а правая стремится к нулю при $m \to +\infty$, вследствие чего $\mu\Gamma = 0$. □

УПРАЖНЕНИЕ 4. Доказать, что всякая спрямляемая кривая в любом n-мерном пространстве, $n > 1$, имеет меру нуль.

Из теорем 1 и 4 следует, что всякое ограниченное плоское множество, граница которого является спрямляемой кривой, измеримо.

Задача 14. Построить пример открытого на числовой оси множества, граница которого не является множеством лебеговой меры нуль. (Определение множества лебеговой меры нуль см. в п. 23.10*.)

44.3. Определение кратного интеграла

Сформулируем определение кратного интеграла Римана. Для этого прежде всего введем понятие разбиения измеримого множества и понятие мелкости этого разбиения.

Пусть E — измеримое по Жордану множество, $E \subset \boldsymbol{R}^n$. Конечная система $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ непустых измеримых по Жор-

---

* Действительно, окружность C, являющуюся границей круга K, можно представить как объединение двух полуокружностей, каждая из которых представляет собой график непрерывной на отрезке функции. Поэтому, согласно теореме 3, $\mu C = 0$; следовательно, всякий круг K является измеримым множеством.

дану множеств E_i, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$, называется *разбиением множества* E, если:

1) попарные пересечения множеств E_i имеют меру нуль:

$$\mu(E_i \cap E_j) = 0,\ i \neq j;$$

2) $\bigcup\limits_{i=1}^{i_\tau} E_i = E$.

Число $|\tau| = \max\limits_{i=1, 2, \ldots, i_\tau} \operatorname{diam} E_i$, где $\operatorname{diam} E_i$ — диаметр множества E_i, называется *мелкостью разбиения* τ.

В силу аддитивности меры Жордана для всякого разбиения $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ множества E, имеем

$$\mu E = \bigcup_{i=1}^{i_\tau} \mu E_i. \tag{44.51}$$

Действительно, пусть при фиксированном i $E_i^* = \bigcup\limits_{j \neq i} (E_i \cap E_j)$ и $E^* = \bigcup\limits_{i=1}^{i_\tau} E_i^*$. Тогда, в силу условия 1 определения разбиения множества, $\mu(E_i \cap E_j) = 0$, $i \neq j$, поэтому $\mu E_i^* \leqslant \sum\limits_{j \neq i} \mu(E_i \cap E_j) = 0$, т. е. $\mu E_i^* = 0$. Отсюда $\mu E^* \leqslant \sum\limits_{i=1}^{i_\tau} \mu E_i^* = 0$, следовательно, $\mu E^* = 0$. Кроме того, множества E^* и $E_i \backslash E^* = E_i^{**}$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$, попарно не пересекаются, а в силу условия 2, $\bigcup\limits_{i=1}^{i_\tau} E_i^{**} \cup E^* = \bigcup\limits_{i=1}^{i_\tau} E_i = E$.

Так как $\mu E_i = \mu(E_i \backslash E^*) = \mu E_i^{**}$, то из всего сказанного, в силу аддитивности меры, следует, что

$$\mu E = \sum_{i=1}^{i_\tau} \mu E_i^{**} + \mu E^* = \sum_{i=1}^{i_\tau} \mu E_i. \ \square$$

Для простоты обозначений иногда вместо $\{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ будем писать $\{E_i\}$.

Пусть $\tau = \{E_i\}$ и $\tau' = \{E'_j\}$ — разбиения измеримого множества E. Разбиение τ' называется *вписанным* в разбиение τ, если для каждого $E'_j \in \tau'$ существует такой элемент $E_i \in \tau$, что $E'_j \subset E_i$. В этом случае пишут $\tau > \tau'$ или $\tau < \tau'$.

Отметим два свойства разбиений множества.

1⁰. *Если* $\tau < \tau'$ *и* $\tau' < \tau''$, *то* $\tau < \tau''$.

2⁰. *Для любых двух разбиений* $\tau' = \{E'_i\}$ и $\tau'' = \{E''_j\}$ *измеримого множества* E *существует такое его разбиение* τ, что $\tau > \tau'$ *и* $\tau > \tau''$.

Свойство 1^0 очевидным образом следует из определения вписанного разбиения. В качестве же указанного в свойстве 2^0 разбиения τ можно взять множество всевозможных непустых пересечений $E'_i \cap E''_j$.

ЛЕММА 6. *У всякого измеримого множества существуют разбиения сколь угодно малой мелкости.*

Пусть E — измеримое множество, $E \subset \boldsymbol{R}^n$. Обозначим через $E_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \dots, j_k$, всевозможные непустые пересечения кубов ранга k с множеством E. Таким образом, для каждого $j = 1, 2, \dots, j_k$ существует такой куб ранга k, обозначим его $\boldsymbol{Q}_j^{(k)}$, что

$$E_j^{(k)} = E \cap \boldsymbol{Q}_j^{(k)} \neq \varnothing.$$

Система множеств $\tau_k = \{E_j^{(k)}\}_{i=1}^{j=j_k}$ образует разбиение множества E. Действительно, множества $E_j^{(k)}$ измеримы как пересечение двух измеримых множеств E и $\boldsymbol{Q}_j^{(k)}$, а их объединение составляет множество E:

$$E = \bigcup_{j=1}^{j_k} E_j^{(k)}.$$

Пересечения множеств $E_j^{(k)}$ имеют меру нуль. В самом деле, при $i \neq j$ имеем

$$E_i^{(k)} \cap E_j^{(k)} \subset \boldsymbol{Q}_i^{(k)} \cap \boldsymbol{Q}_j^{(k)} \subset \partial\boldsymbol{Q}_i^{(k)} \cap \partial\boldsymbol{Q}_j^{(k)},$$

и так как для любого куба мера его границы равна нулю, то

$$\mu(E_i^{(k)} \cap E_j^{(k)}) \leqslant \mu(\partial\boldsymbol{Q}_i^{(k)} \cap \partial\boldsymbol{Q}_j^{(k)}) \leqslant \mu\boldsymbol{Q}_j^{(k)} = 0,\ i \neq j.$$

Мелкость разбиения τ_k стремится к нулю при $k \to \infty$: $\lim\limits_{k\to\infty} |\tau_k| = 0$. Это следует из того, что диаметр n-мерного куба ранга k равен $\frac{\sqrt{n}}{10^k}$, поэтому $|\tau_k| = \max\limits_{j=1,2,\dots,j_k} \operatorname{diam} E_j^{(k)} \leqslant$ $\leqslant \operatorname{diam} \boldsymbol{Q}_1^{(k)} = \frac{\sqrt{n}}{10^k} \to 0$, при $k \to \infty$.□

Определение 3. *Пусть на измеримом по Жордану множестве $E \subset \boldsymbol{R}^n$ задана функция $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ и $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ — некоторое разбиение множества E; выберем произвольным образом точки $\xi_i \in E_i$, $i = 1, 2, \dots, i_\tau$. Сумма вида*

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f; \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(i_\tau)}) = \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi^{(i)})\mu E_i \qquad (44.52)$$

называется интегральной суммой Римана функции f.

Подобно случаю функции одного переменного, определение кратного интеграла можно сформулировать, используя понятие предела последовательности или «язык ε—δ».

Определение 4. *Число A называется интегралом Римана от функции f по измеримому по Жордану множеству $E \subset \boldsymbol{R}^n$, если, какова бы ни была последовательность разбиений* $\tau_m = \{E_i^{(m)}\}_{i=1}^{i=i^{(m)}}$, $m = 1, 2, \ldots$, *множества E такая, что мелкости разбиений τ_m стремятся к нулю при $m \to +\infty$:* $\lim\limits_{m \to +\infty} |\tau_m| = 0$, *и каковы бы ни были точки* $\xi^{(i,\, m)} \in E_i^{(m)}$, $i = 1, 2, \ldots, i^{(m)}$, *последовательность интегральных сумм* $\sigma_{\tau_m}(f;\ \xi^{(1,\, m)}, \ldots, \xi^{(i^{(m)},\, m)})$ *при $m \to +\infty$ имеет своим пределом число A*:

$$\lim_{m \to +\infty} \sigma_{\tau_m}(f; \xi^{(1,\, m)}, \ldots, \xi^{(i^{(m)},\, m)}) = A. \qquad (44.53)$$

Интеграл от функции f по множеству E обозначается через

$$\int f(x)dE,\ \int\limits_E f(x)dx \ \text{ или } \int\int\limits_E \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2 \ldots dx_n.$$

Если существует интеграл $\int f(x)dE$, то функция f называется *интегрируемой по Риману* на множестве E. Интегрируемые по Риману функции часто будем называть просто *интегрируемыми*.

Равенство (44.53), т. е. определение интеграла, кратко записывается в виде формулы

$$\int f(x)dE = \lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau \qquad (44.54)$$

и говорят, что интеграл $\int f(x)dE$ является пределом интегральных сумм σ_τ при $|\tau| \to 0$.

В терминах ε и δ этот предел означает следующее: *для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что, каково бы ни было разбиение* $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$, *множества E мелкости $|\tau| < \delta_\varepsilon$ и каковы бы ни были точки* $\xi^{(i)} \in E_i$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$, *выполняется неравенство*

$$|\sigma_\tau(f; \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(i_\tau)}) - \int f(x)dE| < \varepsilon. \qquad (44.55)$$

Обычным путем доказывается, что определения (44.53) и (44.55) предела интегральных сумм эквивалентны.

Отметим, что определение интеграла (44.54) в случае, когда $n = 1$, а множеством, по которому производится интегрирование, является отрезок, формально не совпадает с данным ранее определением интеграла Римана от функции одной перемен-

ной, так как там рассматривались лишь разбиения отрезка на отрезки, а теперь рассматриваются всевозможные разбиения отрезка на измеримые по Жордану множества. Однако можно показать (это будет сделано в п. 44.7*), что при $n = 1$ оба определения для случая, когда множество, по которому производится интегрирование, является отрезком, равносильны, т. е. приводят к одному и тому же понятию интегрируемости функции и к одному и тому же значению интеграла.

При определении интеграла по множеству $E \subset \boldsymbol{R}^n$ можно для составления интегральных сумм использовать не все элементы разбиений τ множества E, а отбрасывать те слагаемые, которые соответствуют элементам разбиения, пересекающимся с некоторым фиксированным множеством меры нуль. Проанализируем это обстоятельство подробнее.

Пусть E — измеримое множество, $E_0 \subset E$ и $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$, — разбиение множества E. Обозначим через $\tau(E_0)$ совокупность тех элементов разбиения τ, которые не пересекаются с множеством E_0; совокупность же оставшихся множеств E_i, т. е. тех, которые пересекаются с множеством E_0, обозначим $\tau_0(E_0)$. Таким образом,

$$\tau(E_0) = \{E_i \in \tau : E_i \cap E_0 = \varnothing\}, \tag{44.56}$$

$$\tau_0(E_0) = \{E_i \in \tau : E_i \cap E_0 \neq \varnothing\}. \tag{44.57}$$

ЛЕММА 7. *Пусть E — измеримое по Жордану множество пространства $\boldsymbol{R}^n$. $E_0 \subset E$ и $\mu E_0 = 0$. Тогда*

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sum_{E_i \in \tau_0(E_0)} \mu E_i = 0. \tag{44.58}$$

Суммирование в формуле (44.58) происходит только по тем индексам i, для которых $E_i \in \tau_0(E_0)$.

Доказательство. Пусть $E_0 \subset E$ и $\mu E_0 = 0$; тогда и $\mu \overline{E}_0 = 0$ (см. в п. 44.1 замечание 6 после доказательства аддитивности меры). Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такой ранг k, что

$$\mu S_k(\overline{E}_0) < \varepsilon. \tag{44.59}$$

Здесь, как всегда, $S_k(\overline{E}_0)$ обозначает совокупность точек всех кубов ранга k, пересекающихся со множеством $\overline{E}_0$ и, следовательно, покрывающих его:

$$\overline{E}_0 \subset S_k(\overline{E}_0).$$

Множество $\bar{E}_0$, как и всякое множество в $\boldsymbol{R}^n$, содержится в множестве внутренних точек своего многогранника $S_k(\bar{E}_0)$:

$$\bar{E}_0 \subset S_k(\bar{E}_0)_{\text{int}}.$$

Это следует из того, что для точки x, принадлежащей множеству $\bar{E}_0$, все содержащие ее кубы ранга k содержатся в многограннике $S_k(\bar{E}_0)$ и поэтому содержат некоторую окрестность точки x. Таким образом, многогранник $S_k(\bar{E}_0)$ содержит окрестность точки $x \in \bar{E}_0$, что и означает принадлежность этой точки к внутренности множества $S_k(\bar{E}_0)$. Следовательно, множество $\bar{E}_0$ не пересекается с дополнением $\boldsymbol{R}^n \setminus S_k(\bar{E}_0)_{\text{int}}$ к открытому множеству $S_k(\bar{E}_0)_{\text{int}}$. Это дополнение является замкнутым множеством (см. лемму 6 в п. 35.2), не пересекающимся с компактом $\bar{E}_0$, поэтому (см. там же лемму 7) находится от него на положительном расстоянии:

$$\delta \overset{\text{def}}{=} \rho(\bar{E}_0, \boldsymbol{R}^n \setminus S_k(\bar{E}_0)_{\text{int}}) > 0. \tag{44.60}$$

Поэтому всякое множество D диаметра $\operatorname{diam} D$, меньшего чем δ, пересекающееся со множеством $E_0 \subset \bar{E}_0$, будет целиком лежать в $S_k(\bar{E}_0)$. Действительно, если $\operatorname{diam} D < \delta$ и существует $x \in D \cap E_0$, то (см. (44.50)) $D \subset U(x, \delta) \subset S_k(\bar{E}_0)$, где, как обычно, $U(x, \delta)$ — шаровая окрестность точки x радиуса δ (рис. 55).

Пусть теперь $\tau = \{E_i\}$ — разбиение множества E мелкости $|\tau| < \delta$ и $E_i \in \tau_0(E_0)$, т. е. $E_i \cap E_0 \neq \varnothing$, а так как диаметр $\operatorname{diam} E_i < \delta$, то, в силу сказанного выше, $E_i \subset S_k(\bar{E}_0)$. Поэтому

$$\sum_{E_i \in \tau_0(E_0)} E_i \subset S_k(\bar{E}_0).$$

Следовательно, в силу (44.59),

$$\sum_{E_i \in \tau_0(E_0)} \mu E_i = \mu \bigcup_{E_i \in \tau_0(E_0)} E_i \leqslant \mu S_k(\bar{E}_0) < \varepsilon. \ \square$$

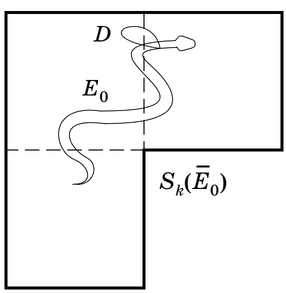


Рис. 55

Введем еще одно обозначение. Пусть E — измеримое множество, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ — некоторое его разбиение,

$E_0 \subset E$. Для всякой функции f, определенной на E, положим (см. (44.56) и (44.57))

$$\sigma_{\tau(E_0)} = \sigma_{\tau(E_0)}(f; \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(i_\tau)}) = \sum_{E_i \in \tau(E_0)} f(\xi^{(i)})\mu E_i. \quad (44.61)$$

Эта запись означает, что суммирование в правой части равенства происходит только по тем индексам i, для которых $E_i \in \tau(E_0)$. Как всегда $\xi^{(i)} \in E_i$. Для симметрии записи обычные интегральные суммы Римана можно по аналогии записывать в виде $\sigma_\tau = \sum\limits_{E_i \in \tau} f(\xi^{(i)})\,\mu E_i$. Вместо символа суммирования $\sum\limits_{E_i \in \tau}$ иногда для краткости будем писать $\sum\limits_{\tau}$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть E — измеримое по Жордану множество пространства $\boldsymbol{R}^n$, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ — его разбиение, $E_0 \subset E$ и $\mu E_0 = 0$. Если функция f ограничена на множестве E, то риманов интеграл $\int f(x)dE$ существует тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma_{\tau(E_0)}$. При этом если последний предел существует, то он равен интегралу $\int f(x)dE$.*

При выполнении условий теоремы сумма $\sigma_{\tau(E_0)}$ называется *неполной интегральной суммой для интеграла* $\int f(x)dE$.

Доказательство. Для всякого разбиения $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ множества E каждый элемент E_i разбиения либо не пересекается с множеством E_0, и тогда $E_i \in \tau(E_0)$ (см. (44.56)), либо пересекается, тогда $E_i \in \tau_0(E_0)$ (см. (44.57)). Следовательно, $\tau = \tau(E_0) \cup \tau_0(E_0)$, причем $\tau(E_0)$ и $\tau_0(E_0)$ не имеют общих элементов.

Положим

$$\sigma_{\tau_0(E_0)} = \sum_{E_i \in \tau_0(E_0)} f(\xi^{(i)})\mu E_i, \quad \xi^{(i)} \in E_i.$$

Здесь суммирование в правой части равенства происходит только по тем индексам i, для которых $E_i \in \tau_0(E_0)$. Очевидно, что для любой интегральной суммы Римана σ_τ справедливо равенство (см. (44.52) и (44.61))

$$\sigma_\tau = \sigma_{\tau(E_0)} + \sigma_{\tau_0(E_0)}. \quad (44.62)$$

В силу ограниченности на E функции f, существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$. Поэтому

$$|\sigma_{\tau_0(E_0)}| \leqslant \sum_{E_i \in \tau_0(E_0)} |f(\xi^{(i)})|\mu E_i \leqslant M \sum_{E_i \in \tau_0(E_0)} \mu E_i.$$

А так как, согласно лемме 3, $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \sum\limits_{E_i \in \tau_0(E_0)} \mu E_i = 0$, то $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma_{\tau_0(E_0)} = 0$. В силу этого, из равенства (44.62) следует, что интегральные суммы σ_τ и $\sigma_{\tau(E_0)}$ одновременно имеют или нет пределы при $|\tau| \to 0$, причем если эти пределы существуют, то они равны. □

Из этой теоремы следует, что если функция определена и ограничена на некотором измеримом множестве E, то при определении интеграла, как предела интегральных сумм, в них можно отбрасывать все слагаемые, соответствующие элементам разбиения, которые содержат граничные точки, ибо множество $E_0 = \partial E$ имеет меру нуль (см. теорему 1 в п. 44.1).

Из теоремы 5 следует также, что если функция f определена и ограничена на измеримом множестве E, то изменение ее значений на некотором множестве $E_0 \subset E$ меры нуль, в результате которого снова получается ограниченная на E функция, не влияет ни на интегрируемость функции, ни на значение интеграла от функции, если он существует. Это сразу следует из того, что при указанном изменении функций сумма $\sigma_{\tau(E_0)}$ не меняется, а в силу теоремы 5, если ее предел при $|\tau| \to 0$ существует, то он равен интегралу $\int f(x)dE$:

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sigma_{\tau(E_0)} = \int f(x)dE.$$

Из этого замечания, в частности, следует, что функция f является интегрируемой на измеримом множестве E тогда и только тогда, когда на этом множестве E интегрируема всякая функция, получающаяся из f произвольным изменением ее значений в граничных точках, т. е. на множестве $E \cap \partial E$, таким, что эти значения остаются, однако, ограниченными. При указанной операции не меняется и значение интеграла $\int f(x)dE$. Все это следует из того, что граница измеримого множества, а значит, и любая ее часть, имеют меру нуль.

Таким образом, интегрируемость и значение интеграла от функции по множеству E не зависят от значений функции в граничных точках измеримого множества E, если только эти значения ограничены.

44.4. Существование интеграла

Простейшим примером интегрируемой по Риману функции является произвольная числовая функция f, определенная на некотором множестве $E \subset \boldsymbol{R}^n$, мера Жордана которого равна нулю: $\mu E = 0$. В этом случае для любого разбиения $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$

множества E будем иметь $\mu E_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$, поэтому при любом выборе точек $\xi^{(i)} \in E_i$ получим $f(\xi^{(i)})\mu E_i = 0$, следовательно (см. (44.52)),

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f; \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(i_\tau)}) = \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi^{(i)})\mu E_i = 0.$$

Отсюда, согласно определению интеграла, он в этом случае существует и равен нулю:

$$\int f(x)dE = \lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau = 0.$$

Поскольку функция f произвольна, в частности, она может быть и неограниченной. Иначе говоря, условие ограниченности функции не является необходимым для ее интегрируемости по Риману на произвольном измеримом по Жордану множестве. Вспомним, что для интегрируемости функции по Риману на отрезке условие ограниченности функции было необходимым (см. теорему 1 в п. 23.3). Однако с некоторым видоизменением теорема об ограниченности интегрируемой функции оказывается справедливой и для рассматриваемого здесь интеграла.

Предварительно докажем лемму.

ЛЕММА 8. *Пусть функция f определена на измеримом по Жордану множестве E, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ — разбиение этого множества и E_τ^* — объединение всех элементов этого разбиения, имеющих положительную меру: $E_\tau^* = \bigcup_{\mu E_i > 0} E_i$.*

Если функция f неограничена на множестве E_τ^*, то, каково бы ни было число $M > 0$, можно так выбрать точки $\xi^{(i)} \in E_i$, что будет справедливо неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi^{(i)})\mu E_i \right| > M.$$

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть функция f определена на измеримом по Жордану множестве E. Если у множества E существуют сколь угодно мелкие разбиения, для которых функция f неограничена на объединении всех их элементов положительной меры, то функция f неинтегрируема на E.*

Доказательство леммы. По условию леммы множество E_τ^* является объединением элементов E_i положительной меры разбиения τ. Поскольку всякое разбиение состоит из ко-

нечного числа элементов, E_τ^* является конечной суммой указанных множеств $E_i \in \tau$. Поэтому если функция f неограничена на множестве E_τ^*, то она неограничена и на некотором множестве E_i положительной меры. Пусть для определенности это множество E_1. В силу неограниченности функции f на E_1, можно выбрать такую последовательность $\xi_n^{(1)} \in E_1$, $n = 1, 2, \dots$, что будет иметь место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n^{(1)}) = \infty$. Зафиксируем каким-либо образом остальные точки $\xi^{(i)} \in E_i$ при $i = 2, 3, \dots, i_\tau$.

Поскольку сумма $\sum\limits_{i=2}^{i_\tau} f(\xi^{(i)})\mu E_i$ — фиксированное число и $\mu E_1 > 0$, то в сумме $f(\xi_n^{(1)})\mu E_1 + \sum\limits_{i=2}^{i_\tau} f(\xi^{(i)})\mu E_i$ при $n \to \infty$ первое слагаемое стремится к бесконечности, а второе — постоянное. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\left|f(\xi_n^{(1)})\mu E_1 + \sum_{i=2}^{i_\tau} f(\xi^{(i)})\mu E_i\right| = +\infty.$$

Поэтому для любого числа $M > 0$ можно подобрать такой номер $n_0 = n_0(M)$, что будет справедливым неравенство

$$\left|f(\xi_{n_0}^{(1)})\mu E_1 + \sum_{i=2}^{i_\tau} f(\xi^{(i)})\mu E_i\right| > M. \square$$

Доказательство следствия. Если функция f интегрируема на множестве E, т. е. существует предел

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi^{(i)})\mu E_i = \int f(x)dE,$$

то для любого $\varepsilon > 0$, например для $\varepsilon = 1$, существует такое $\delta > 0$, что для всех разбиений $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ множества E мелкости $|\tau| < \delta$ при любом выборе точек $\xi^{(i)} \in E_i \in \tau$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi^{(i)})\mu E_i - \int f(x)dE\right| < 1$$

и, следовательно, неравенство

$$\int f(x)dE - 1 < \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi^{(i)})\mu E_i < \int f(x)dE + 1, \qquad (44.63)$$

т. е. множество всех интегральных сумм σ_τ при $|\tau| < \delta$ ограничено.

Если же функция f удовлетворяет условиям следствия, то у множества E существует разбиение τ мелкости $|\tau| < \delta$, для которого функция f неограничена на объединении всех элементов положительной меры этого разбиения. Тогда, по лемме 6, сумму $\sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi^{(i)})\mu E_i$ можно сделать сколь угодно большой по абсолютной величине за счет выбора точек $\xi^{(i)} \in E_i \in \tau$. Поэтому такая функция не может быть интегрируемой — для нее не выполняется условие (44.63). □

Покажем теперь, что если пренебречь множеством меры нуль, то всякая интегрируемая функция будет ограниченной.

ТЕОРЕМА 6. *Если функция f интегрируема на множестве E, то существует такое множество $E_0 \subset E$ меры нуль: $\mu E_0 = 0$, что функция f ограничена на $E \backslash E_0$.*

Доказательство. Пусть функция f интегрируема на E и указанного в теореме множества E_0 не существует. Возьмем любое $\delta > 0$ и какое-либо разбиение $\tau = \{E_i\}$ множества E мелкости $|\tau| < \delta$. Обозначим через E_τ^* объединение всех элементов разбиения τ положительной меры. Тогда множество $E \backslash E_\tau^*$ является объединением конечного числа множеств $E_i \in \tau$ меры нуль, и поэтому оно само имеет меру нуль: $\mu(E \backslash E_\tau^*) = 0$. Вследствие этого по сделанному предположению функция f неограничена на множестве E_τ^*. Отсюда, согласно следствию из леммы 6, получаем, что функция f неинтегрируема. □

Покажем теперь, что для важного класса измеримых по Жордану открытых множеств теорема об ограниченности интегрируемой функции полностью сохраняется. Для доказательства этого понадобится одна геометрическая лемма.

ЛЕММА 9. *Непустое пересечение замкнутого n-мерного куба с открытым множеством n-мерного пространства имеет положительную нижнюю меру Жордана.*

СЛЕДСТВИЕ. *Для любого открытого измеримого по Жордану множества существуют сколь угодно мелкие разбиения, все элементы которых имеют положительную меру.*

Доказательство леммы. Пусть Q — замкнутый n-мерный куб, G — открытое множество пространства $\boldsymbol{R}^n$ и $Q \cap G \neq \varnothing$. Какова бы ни была точка $x \in Q \cap G$, в силу открытости множества G, существует такая ее окрестность $U(x)$, что

$$U(x) \subset G. \tag{44.64}$$

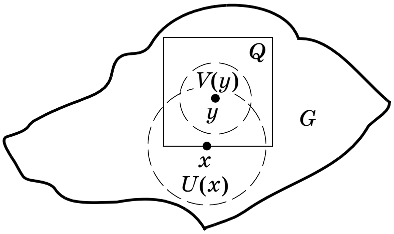


Рис. 56

Нетрудно убедиться, что во множестве $U(x)$ всегда имеется внутренняя точка y куба Q. В самом деле может случиться, что сама точка x является внутренней для куба Q и тогда можно взять $y = x$. Если же x — граничная точка куба Q, то она является граничной и для множества его внутренних точек. Поэтому ее окрестность $U(x)$ заведомо содержит внутреннюю точку y куба Q (рис. 56). В силу определения внутренней точки (см. п. 35.2), существует такая ее окрестность $V(y)$, что

$$V(y) \subset Q. \tag{44.65}$$

В силу (44.64) и (44.65), справедливы включения

$$U(x) \cap V(y) \subset U(x) \subset G, \quad U(x) \cap V(y) \subset Q;$$

поэтому

$$U(x) \cap V(y) \subset Q \cap G. \tag{44.66}$$

Так как $y \in U(x)$ и $y \in V(y)$, то пересечение $U(x) \cap V(y)$ не пусто, ибо содержит, во всяком случае, точку y. Далее, будучи пересечением двух открытых множеств, оно также является открытым, и поэтому (см. п. 44.1) $\mu_*[U(x) \cap V(y)] > 0$. В силу свойства монотонности нижней меры (см. лемму 1 в п. 44.1), из (44.66) имеем $\mu_*[U(x) \cap V(y)] \leqslant \mu_*(Q \cap G)$.

Из двух последних неравенств явствует, что $\mu_*(Q \cap G) > 0$. □

Доказательство следствия. Пусть G — измеримое открытое в $\boldsymbol{R}^n$ множество. Зафиксируем разбиение пространства $\boldsymbol{R}^n$ на кубы некоторого ранга k. Множество кубов Q этого ранга, имеющих непустое пересечение со множеством G, является конечным, ибо множество G, в силу его измеримости, ограничено. Перенумеруем все указанные кубы: $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{i_\tau}$. Множества $E_i = Q_i \cap G \neq \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$ измеримы и образуют разбиение $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ множества G. Действительно, с одной стороны, $E_i = Q_i \cap G \subset G$, следовательно, $\bigcup\limits_{i=1}^{i_\tau} E_i \subset G$, а с другой — каждая точка $x \in G$, как и всякая точка пространства $\boldsymbol{R}^n$, принадлежит хотя бы одному кубу Q ранга k: $x \in Q \cap G$. Тогда $Q \cap G \in \tau$, т. е. $Q = Q_i$ при некотором i, поэтому $x \in Q_i \cap E = E_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{i_\tau} E_i$. Таким образом, $\bigcup\limits_{i=1}^{i_\tau} E_i = G$.

Далее, $E_i \cap E_j \subset Q_i \cap Q_j$. Если пересечение $Q_i \cap Q_j$ непусто, то оно представляет собой куб размерности, меньшей чем n, и, следовательно, является графиком непрерывной (даже линейной) функции на компакте. Поэтому его мера равна нулю: $\mu(Q_i \cap Q_j) = 0$, откуда и $\mu(E_i \cap E_j) = 0$, $i \neq j$. Наконец, согласно лемме 8, $\mu E_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$.

Очевидно, что существуют сколь угодно мелкие разбиения τ указанного вида. Действительно, каково бы ни было $\delta > 0$, достаточно взять такой ранг k, чтобы $\frac{\sqrt{n}}{10^k} < \delta$ ($\operatorname{diam} Q = 10^{-k}\sqrt{n}$ — диаметр куба Q ранга k), тогда

$$\operatorname{diam} E_i = \operatorname{diam}(Q_i \cap G) \leqslant \operatorname{diam} Q_i = 10^{-k}\sqrt{n} < \delta,\ i = 1, 2, \ldots, i_\tau,$$

и поэтому $|\tau| < \delta$. □

ТЕОРЕМА 7. *Если функция интегрируема на открытом множестве, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть функция f интегрируема на открытом множестве G. Тогда, согласно определению интеграла, множество G измеримо по Жордану, а на основании следствия из леммы 10, существуют сколь угодно мелкие его разбиения, все элементы которых имеют положительную меру. Если функция f была бы неограниченной на G, то, согласно следствию из леммы 8, она была бы неинтегрируемой. □

Замечание. Как видно из приведенного доказательства теоремы 7, открытость множества G потребовалась лишь для того, чтобы показать, что существуют его разбиения сколь угодно малой мелкости, все элементы которых имеют положительную меру. Тем самым для всех множеств, обладающих этим свойством, интегрируемость на них функций влечет за собой их ограниченность.

Легко, например, можно убедиться в том, что замыкание $\overline{G}$ любого измеримого открытого множества G также имеет сколь угодно мелкие разбиения, мера всех элементов которых положительна. Действительно, достаточно снова взять все кубы Q_i ранга k, имеющие с G непустое пересечение. Тогда они будут и подавно иметь непустое пересечение с замыканием $\overline{G}$ множества $G : Q_i \cap \overline{G} \supset Q_i \cap G \neq \varnothing$. При этом так как $S_k(G)$ — замкнутое множество и $G \subset S_k(G)$, то $\overline{G} \subset S_k(G)$. Следовательно, если положить $E_i = Q_i \cap \overline{G}$, где $Q_i \cap G \neq \varnothing$, то

$\tau = \{E_i\}$ образует покрытие замыкания $\overline{G}$ множества G, ибо многогранник $S_k(G)$ состоит только из указанных кубов Q_i.

УПРАЖНЕНИЕ 5. Построить пример функции, неограниченной и интегрируемой на множестве положительной меры.

Если функция f ограничена на измеримом множестве, то, как и в одномерном случае, можно определить верхние и нижние суммы Дарбу.

Определение 5. *Пусть f — функция, ограниченная на измеримом по Жордану множестве E, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ — разбиение множества E*

$$m_i = \inf_{x \in E_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in E_i} f(x), \quad i = 1, 2, \ldots, i_\tau.$$

Тогда суммы

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i \mu E_i, \quad S_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i \mu E_i,$$

называются соответственно нижними и верхними суммами Дарбу.

Аналогично одномерному случаю (см. определение 7 в п. 23.1), для сумм Дарбу функций многих переменных вводится понятие предела при $|\tau| \to 0$.

Для сумм Дарбу и интегральных сумм Римана справедливы очевидные неравенства $s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau$.

Как и для функций одной переменной, для любых двух разбиений τ_1 и τ_2 справедливо неравенство $s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}$.

ТЕОРЕМА 8. *Для того чтобы ограниченная на измеримом по Жордану множестве $E \subset \boldsymbol{R}^n$ функция f была интегрируемой по Риману на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{|\tau| \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{44.67}$$

При выполнении этих условий

$$\lim_{|\tau| \to 0} S_\tau = \lim_{|\tau| \to 0} s_\tau = \int f(x)dE. \tag{44.68}$$

Условие (44.67) равносильно следующему:

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(f; E_i)\mu E_i = 0, \tag{44.69}$$

где $\omega(f; E_i)$ — колебание функции f на множестве $E_i \in \tau = \{E_i\}$.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично одномерному случаю и рекомендуется проделать читателю в случае внутренней потребности самостоятельно.

УПРАЖНЕНИЕ 6. Сформулировать определения пределов (44.67)—(44.68) с помощью последовательностей и используя «ε—δ-терминологию».

ТЕОРЕМА 9. *Если функция непрерывна на измеримом по Жордану компакте, то она интегрируема на нем.*

Доказательство. Пусть E — измеримый компакт, $E \subset \boldsymbol{R}^n$, а f — непрерывная на нем функция. Всякая функция, непрерывная на компакте, ограничена (см. п. 36.7) и равномерно непрерывна (см. п. 36.8) на нем. Поэтому и здесь доказательство протекает аналогично одномерному случаю (см. п. 23.5): легко получается оценка

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(f; E_i)\mu E_i \leqslant \omega(\delta_\tau; f)\mu E,$$

где $\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности функции f. Из этой оценки сразу следует выполнение условия (44.69), поэтому, согласно теореме 8, и интегрируемость функции f. □

44.5*. Об интегрируемости разрывных функций

Непрерывность функции не является необходимым условием интегрируемости: существуют и разрывные интегрируемые функции. Достаточно широкий класс разрывных интегрируемых функций устанавливается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 10. *Если функция ограничена на измеримом по Жордану компакте и множество ее точек разрыва имеет жорданову меру нуль, то эта функция интегрируема по Риману.*

Доказательство. Пусть функция f определена и ограничена на компакте, т. е. на ограниченном замкнутом множестве $E \subset \boldsymbol{R}^n$. В силу ограниченности функции f на E, существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leqslant M. \tag{44.70}$$

Пусть E_0 — множество точек разрыва функции f. По условию теоремы $\mu E_0 = 0$, поэтому для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такой ранг k, что

$$\mu S_k(E_0) < \frac{\varepsilon}{3^n 4M}. \tag{44.71}$$

Это следует из того, что в данном случае, согласно определению меры, $\lim\limits_{k \to +\infty} \mu S_k(E_0) = 0$. Пусть многогранник $S_k(E_0)$ состоит из кубов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$. Обозначим через P_j куб, получающийся из Q_j преобразованием подобия с центром в центре куба Q_j и коэффициентом подобия, равным трем; тогда

$$\mu P_j = 3^n \mu Q_j, \ j = 1, 2, \ldots, l. \tag{44.72}$$

Положим $P = \bigcup\limits_{j=1}^{l} P_j$. В силу неравенства (44.71) и равенства (44.72), имеем

$$\mu P = \mu \bigcup_{j=1}^{l} P_j \leqslant \sum_{j=1}^{l} \mu P_j = \sum_{j=1}^{l} 3^n \mu Q_j = 3^n \mu S_k(E_0) < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{44.73}$$

Отметим, что множество P получается из $S_k(E_0)$ окаймлением последнего полосой кубов с ребрами длины 10^{-k}, поэтому всякое множество A с диаметром $\operatorname{diam} A$, меньшим чем 10^{-k}, пересекающееся с множеством $S_k(E_0)$, содержится в P (рис. 57):

$$\operatorname{diam} A < 10^{-k}, \ A \cap S_k(E_0) \neq \varnothing \Rightarrow A \subset P. \tag{44.74}$$

Обозначим теперь через G множество внутренних точек многогранника $S_k(E_0)$. Очевидно, G — открытое множество, а поскольку по условиям теоремы E замкнуто, то множество $F = E \backslash G$ также замкнуто, причем, в силу ограниченности E, множество F ограничено, поэтому F — компакт. Далее, множество E_0 лежит внутри многогранника $S_k(E_0)$, т. е. $E_0 \subset G$ (как отмечалось выше, см. п. 44.3, это справедливо вообще для любого множества E и вытекает из определения многогранника $S_k(E)$, см. доказательство леммы 7). Отсюда явствует, что функция f непрерывна на компакте F, а поскольку, кроме того, множество F измеримо, как разность двух измеримых множеств E и G, то, согласно теореме 9, функция f интегрируема на F. Поэтому для выбранного выше $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения τ_F множества F мелкости $|\tau_F| < \delta$ выполняется неравенство

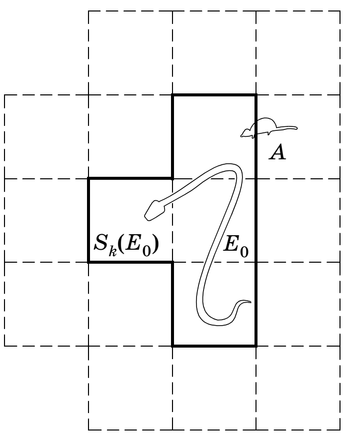


Рис. 57

$$S_{\tau_F} - s_{\tau_F} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{44.75}$$

где S_{τ_F} и s_{τ_F} — верхние и нижние суммы Дарбу функции f, соответствующие разбиению τ_F множества F.

Пусть

$$\delta_0 = \min\{10^{-k}, \delta\}, \tag{44.76}$$

$\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ — какое-либо разбиение множества E мелкости $|\tau| < \delta_0$. Очевидно, что $\tau_F \overset{\text{def}}{=} \{E_i \cap F\}$, где $E_i \cap F \neq \varnothing$, является разбиением множества F мелкости $|\tau_F| \leqslant |\tau| < \delta_0$, и поэтому, в силу (44.70), для τ_F выполняется неравенство (44.75).

Положим

$$M_i = \sup_{x \in E_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in E_i} f(x),$$

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i \mu E_i, \quad s_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i \mu E_i,$$

$$M'_i = \sup_{x \in E_i \cap F} f(x), \quad m'_i = \inf_{x \in E_i \cap F} f(x),$$

$$S_{\tau_F} = \sum_{E_i \cap F \neq \varnothing} M'_i \mu(E_i \cap F), \quad s_{\tau_F} = \sum_{E_i \cap F \neq \varnothing} m'_i \mu(E_i \cap F).$$

Каждое множество $E_i \in \tau$ либо пересекается с G, либо нет. В случае непересечения, т. е. если $E_i \cap G = \varnothing$, то $E_i \subset F$, и для таких индексов i имеем $M_i = M'_i$, $E_i \cap F = E_i$.

Заметив, что в написанных ниже суммах все слагаемые неотрицательны, получим:

$$\sum_{E_i \cap G = \varnothing} (M_i - m_i)\mu E_i = \sum_{E_i \cap G = \varnothing} (M'_i - m'_i)\mu E_i \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{E_i \cap G = \varnothing} (M'_i - m'_i)\mu(E_i \cap F) = S_{\tau_F} - s_{\tau_F} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{44.77}$$

Если же $E_i \cap G \neq \varnothing$, то, в силу (44.74) и (44.76), $E_i \subset P$ и поэтому для этих индексов i (см. еще (44.73))

$$\sum_{E_i \cap G \neq \varnothing} \mu E_i = \mu \bigcup_{E_i \cap G \neq \varnothing} E_i \leqslant \mu P < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{44.78}$$

Используя очевидные неравенства $|m_i| \leqslant M$, $|M_i| \leqslant M$, $i = 1, 2, \dots i_\tau$, непосредственно вытекающие из (44.70), и применяя неравенство (44.78), будем иметь

$$\sum_{E_i \cap G \neq \varnothing} (M_i - m_i)\mu E_i \leqslant \sum_{E_i \cap G \neq \varnothing} [|M_i| + |m_i|]\mu E_i \leqslant$$

$$\leqslant 2M \sum_{E_i \cap G \neq \varnothing} \mu E_i < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{44.79}$$

Из (44.77) и (44.79) вытекает, что

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} (M_i - m_i)\mu E_i =$$

$$= \sum_{E_i \cap G = \varnothing} (M_i - m_i)\mu E_i + \sum_{E_i \cap G \neq \varnothing} (M_i - m_i)\mu E_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда, согласно теореме 8, следует интегрируемость функции f на множестве E. □

44.6. Свойства кратного интеграла

В этом пункте будут рассмотрены свойства кратного интеграла, аналогичные свойствам интеграла от функции одного переменного по отрезку. Напомним, что интегрируемость какой-либо функции (по Риману) на некотором множестве предполагает его измеримость по Жордану.

1^0. *Пусть E — измеримое множество; тогда $\int dE = \mu E$.*

Действительно, в данном случае подынтегральная функция тождественно равна единице. Поэтому если $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ — некоторое разбиение множества E, то (см. (44.51))

$$\int dE = \lim_{|\tau| \to 0} \sum_{i=1}^{i_\tau} \mu E_i = \mu E.$$

2^0. *Пусть E и E^* — измеримые множества, $E^* \subset E$ и функция f ограничена и интегрируема на E; тогда она интегрируема и на E^*.*

В самом деле, множество $E^{**} = E \setminus E^*$ так же измеримо, как разность двух измеримых множеств. Пусть $\tau^* = \{E_i^*\}$ — разбиение множества E^* мелкости $|\tau^*|$ и $\tau^{**} = \{E_j^{**}\}$ — разбиение множества E^{**} мелкости $|\tau^{**}| \leqslant |\tau^*|$. Тогда $\tau = \{E_i^*, E_j^{**}\}$ является разбиением множества E мелкости $|\tau| = |\tau^*|$. Если

$$\omega_\tau = \sum_{\tau^*} \omega(f, E_i^*)\mu E_i^* + \sum_{\tau^{**}} \omega(f, E_j^{**})\mu E_j^{**}$$

и

$$\omega_{\tau^*} = \sum_{\tau^*} \omega(f, E_i^*)\mu E_i^*,$$

то, очевидно, $0 \leqslant \omega_{\tau^*} \leqslant \omega_\tau$. Но $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \omega_\tau = 0$, поэтому

$$\lim_{|\tau^*| \to 0} \omega_{\tau^*} = 0,$$

откуда и следует интегрируемость функции f на множестве E^* (см. (44.69)).

3^0. **Аддитивность интеграла по множествам.** *Если E' и E'' — измеримые множества, $E = E' \cup E''$, $E' \cap E'' = \varnothing$ и функция f ограничена и интегрируема на множестве E, то интегралы $\int f(x)dE'$ и $\int f(x)dE''$ существуют и*

$$\int f(x)dE = \int f(x)dE' + \int f(x)dE''. \qquad (44.80)$$

Существование интегралов $\int f(x)dE'$ и $\int f(x)dE''$ следует из свойства 2^0, поэтому нуждается в доказательстве лишь формула (44.80). Пусть $\tau' = \{E_i'\}$ и $\tau'' = \{E_j''\}$ — разбиения соответственно множеств E' и E''. Тогда $\tau = \{E_i', E_j''\}$ является разбиением множества E и его мелкость равна наибольшей из мелкостей разбиений τ' и τ'': $|\tau| = \max\{|\tau'|, |\tau''|\}$.

Пусть $\xi^{(i)} \in E_i'$, $\eta^{(j)} \in E_j''$,

$$\sigma_\tau' = \sum_{\tau'} f(\xi^{(i)})\mu E_i', \quad \sigma_\tau = \sum_{\tau''} f(\eta^{(j)})\mu E_j'', \quad \sigma_\tau = \sigma_{\tau'} + \sigma_{\tau''}. \qquad (44.81)$$

В силу интегрируемости функции f на множестве E, E' и E'',

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau = \int f(x)dE, \quad \lim_{|\tau'| \to 0} \sigma_{\tau'} = \int f(x)dE', \quad \lim_{|\tau''| \to 0} \sigma_{\tau''} = \int f(x)dE''.$$

Поэтому, переходя к пределу в равенстве (44.81) при $|\tau| \to 0$, получим (44.80).

З а м е ч а н и е 1. Если функция f интегрируема и ограничена на множестве E, то она интегрируема и на множестве E_{int} его внутренних точек, причем

$$\int f(x)dE = \int f(x)dE_{\text{int}}.$$

Это следует из свойства 3^0, так как

$$E = E_{\text{int}} \cup (E \setminus E_{\text{int}}), \quad \mu(E \setminus E_{\text{int}}) = 0$$

(см. замечание 6 в п. 44.1).

З а м е ч а н и е 2. Следует обратить внимание на следующее обстоятельство: может случиться, что функция f определена на множестве $E = E' \cup E''$, где E' и E'' — измеримые множества, $E' \cap E'' = \varnothing$. Интегралы $\int f(x)dE'$ и $\int f(x)dE''$ существуют, а интеграл $\int f(x)dE$ не существует.

Поясним сказанное на примере. Пусть (r, φ) — полярные координаты точки на плоскости,

$$f(r, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } r < 1, \\ 1/\varphi, & \text{если } r = 1,\ 0 < \varphi \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

$E' = \{(r, \varphi): r < 1\}$ — открытый круг, $E'' = \{(r, \varphi): r = 1\}$ — окружность. Очевидно, $\mu E'' = 0$, поэтому несмотря на то, что функ-

ция f неограничена на E'', она интегрируема и $\int f(r, \varphi)dE'' = 0$. Существует и интеграл $\int f(r, \varphi)dE' = 0$. Однако интеграл $\int f(r, \varphi)dE$ по замкнутому кругу $E = E' \cup E''$ не существует. Действительно, множество представляет собой замыкание области, поэтому у него существуют сколь угодно мелкие разбиения, все элементы которых имеют положительную меру. Следовательно (см. замечание к теореме 7), всякая интегрируемая на E функция ограничена, а заданная функция f неограничена и поэтому не интегрируема.

Важно отметить, однако, что для ограниченных функций подобной ситуации быть не может: если функция f ограничена и интегрируема на измеримых множествах E' и E'', $E' \cap E'' = \varnothing$, то она интегрируема и на множестве $E = E' \cup E''$, причем справедлива формула (44.70). Это будет доказано в п. 44.7*.

Заметим лишь, что в случае, когда одно из множеств E' или E'' имеет меру нуль, то интегрируемость ограниченной функции f на их объединении, в предположении ее интегрируемости на каждом из них, можно получить почти дословным повторением рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 10. В самом деле, пусть f интегрируема и ограничена на измеримых множествах E' и E'', $\mu E' = 0$, $E = E' \cup E''$. Тогда если, как и в указанном доказательстве, построить множество $G \supset E'$ (множество E' играет здесь роль множества E_0 из теоремы 10) и положить $F = E \backslash G$, то будем иметь $F \subset E''$ и, следовательно, в силу свойства 2^0 интегралов, функция f окажется интегрируемой на множестве F, откуда, как и выше, вытекает ее интегрируемость на множестве E, а значит, в силу свойства 3^0, и справедливость формулы (44.70), где $\int f(x)dE' = 0$.

Из доказанного следует, что, для того чтобы функция f, ограниченная на замыкании $\overline{E}$ измеримого множества E, была интегрируема на E, необходимо и достаточно, чтобы она была интегрируема на его замыкании $\overline{E}$, причем

$$\int_E f(x)dx = \int_{\overline{E}} f(x)dx.$$

Действительно, если интеграл существует по множеству E, то так как граница ∂E измеримого множества E имеет меру, равную нулю, то и $\mu(\overline{E}\backslash E) = 0$, так как $\overline{E}\backslash E \subset \partial E$. Поэтому $\int\limits_{\overline{E}\backslash E} f(x)dx = 0$, а так как $\overline{E} = E \cup (\overline{E}\backslash E)$, то, в силу сказанного выше,

$$\int_{\overline{E}} f(x)dx = \int_E f(x)dx + \int_{\overline{E}\backslash E} f(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

Наоборот, если существует интеграл по замыканию $\overline{E}$ измерительного множества E, то, в силу свойства 2^0, он существует и по самому множеству.

4^0. **Линейность интеграла.** *Если функции f_1 и f_2 интегрируемы на множестве E, то для любых чисел λ_1 и λ_2 существует интеграл $\int[\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]dE$ и справедливо равенство*

$$\int[\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]dE = \lambda_1\int f_1(x)dE + \lambda_2\int f_2(x)dE.$$

5^0. *Если функции f и g интегрируемы и ограничены на некотором множестве, то и их произведение и отношение f/g (при $\inf\limits_E|g| > 0$) интегрируемы на этом множестве.*

6^0. **Интегрирование неравенств.** *Если функции f и g интегрируемы на множестве E и для всех $x \in E$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то*

$$\int f(x)dE \leqslant \int g(x)dE.$$

7^0. *Если функция f интегрируема и ограничена на множестве E, то и ее абсолютная величина $|f|$ интегрируема на нем, причем*

$$\left|\int f(x)dE\right| \leqslant \int|f(x)|dE.$$

Доказательство свойств 4^0—7^0 проводится совершенно аналогично одномерному случаю (см. п. 24.1).

8^0. **Монотонность интеграла от неотрицательных функций по множествам.** *Если E и E^* — измеримые множества, $E^* \subset E$, функция f неотрицательна, ограничена и интегрируема на E, то*

$$\int f(x)dE^* \leqslant \int f(x)dE. \tag{44.82}$$

Действительно, в силу свойств 2^0 и 3^0, интегралы $\int f(x)dE^*$ и $\int f(x)d(E\setminus E^*)$ существуют и

$$\int f(x)dE = \int f(x)dE^* + \int f(x)d(E\setminus E^*).$$

Поскольку $f(x) \geqslant 0$, то, в силу свойства 6^0, $\int f(x)d(E\setminus E^*) \geqslant 0$, а отсюда и следует неравенство (44.82).

9^0. *Пусть функция f интегрируема и неотрицательна на измеримом открытом множестве G, $x^{(0)} \in G$, функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$ и $f(x^{(0)}) > 0$. Тогда*

$$\int f(x)dG > 0. \tag{44.83}$$

Действительно, в силу непрерывности функции f в точке $x^{(0)}$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U = U(x^{(0)})$ этой точки, что для всех $x \in U$ выполняется неравен-

ство $f(x^{(0)}) - \varepsilon < f(x) < f(x^{(0)}) + \varepsilon$. При этом, в силу открытости множества G, окрестность U всегда можно выбрать так, чтобы $U \subset G$.

Выбрав $\varepsilon = \frac{f(x^{(0)})}{2}$, получим для него такую окрестность U, что для всех x, принадлежащих этой окрестности, будем иметь $f(x) > \frac{f(x^{(0)})}{2}$. Отсюда, применяя последовательно свойства 8^0, 6^0 и 1^0, найдем, что

$$\int f(x)dG \geqslant \int f(x)dU \geqslant \frac{f(x^{(0)})}{2}\int dU = \frac{f(x^{(0)})}{2}\mu U > 0,$$

ибо $\mu U > 0$ как мера всякого открытого множества. □

Отметим непосредственное следствие из свойства 9^0.

СЛЕДСТВИЕ. *Если функция f непрерывна, интегрируема и неотрицательна на измеримом открытом множестве G и не является тождественным нулем, то $\int f(x)dG > 0$.*

10^0. **Полная аддитивность интеграла по открытым множествам.** *Если G, G_m — измеримые открытые множества,*

$$G_m \subset G_{m+1}, \ m = 1, 2, \dots, \tag{44.84}$$

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m = G, \tag{44.85}$$

а функция f интегрирует на множестве G, то

$$\lim_{m \to \infty} \int_{G_m} f(x)dx = \int_G f(x)dx. \tag{44.86}$$

Докажем сначала, что из выполнений условий (44.84) и (44.85) следует, что

$$\lim_{m \to \infty} \mu G_m = \mu G. \tag{44.87}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$, тогда существует такой ранг k, что (см. (44.3), (44.5) и (44.6))

$$\mu G - \varepsilon < \mu s_k(G). \tag{44.88}$$

Множество G, будучи измеримым, ограничено. Поэтому множество $s_k(G)$ представляет собой объединение конечного множества замкнутых кубов и, следовательно, является компактом. Поскольку этот компакт лежит в множестве G, в силу равенства (44.85), система $\{G_m\}$ является его покрытием открытыми множествами. Согласно теореме Гейне—Бореля (см. теорему 4 в п. 35.3), из этого покрытия можно выделить конечное покрытие. Ясно, что если m_0 — наибольший номер множеств G_m,

входящих в это конечное покрытие, то в силу включений (44.84) имеет место включение

$$s_k(G) \subset G_{m_0}.$$

Из неравенства (44.88) и включений

$$s_k(G) \subset G_{m_0} \subset G_m \subset G, \quad m > m_0,$$

имеем при $m > m_0$

$$\mu G - \varepsilon < \mu s_k(G) \leqslant \mu G_m \leqslant \mu G.$$

Это и означает выполнение равенства (44.87).

Докажем теперь равенство (44.86). Функция f, будучи интегрируемой на открытом множестве G, ограничена (см. теорему 7 в п. 44.4). Ограниченность функции f на множестве G означает существование такой постоянной $c > 0$, что для всех точек $x \in G$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant c$. Поэтому

$$\left|\int_G f(x)dx - \int_{G_m} f(x)dx\right| \underset{3^0}{=} \left|\int_{G \setminus G_m} f(x)dx\right| \underset{7^0}{\leqslant} \int_{G \setminus G_m} |f(x)|dx \underset{4^0,\,6^0}{\leqslant}$$

$$\underset{4^0,\,6^0}{\leqslant} c \int_{G \setminus G_m} dx \underset{1^0}{=} c\mu(G \setminus G_m) = c(\mu G - \mu G_m) \to 0$$

при $k \to \infty$, т. е. равенство (44.86) доказано. □

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что для любого измеримого открытого множества G существует последовательность измеримых открытых множеств G_m, удовлетворяющая условиям (44.84) и (44.85). Более того, эту последовательность можно даже выбрать таким образом, что не только сами множества G_m, но и их замыкания G_m будут содержаться в множестве G:

$$G_m \subset \overline{G}_m \subset G, \quad m = 1, 2, \ldots . \qquad (44.89)$$

При этом поскольку множества G_m измеримы, то они ограничены. Следовательно, ограничены и их замыкания $\overline{G}_m$, которые являются поэтому компактами. В качестве таких множеств G_m можно взять, например, множества

$$G_m = s_m(G)_{\text{int}}, \qquad (44.90)$$

где, как обычно, множество $s_m(G)$ состоит из кубов ранга m, содержащихся в множестве G.

Проверим выполнение условий (44.84), (44.85) и (44.89) для множеств (44.90). Свойство (44.84) в этом случае выполняется очевидным образом:

$$G_m = s_m(G)_{\text{int}} \subset s_{m+1}(G)_{\text{int}} = G_{m+1}.$$

Докажем свойство (44.85). Ясно, что из

$$G_m = s_m(G)_{\text{int}} \subset s_m(G) \subset G$$

следует, что

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m \subset G. \tag{44.91}$$

С другой стороны, для любой точки $x \in G$ в силу открытости множества G существует ее ε-окрестность $U(x; \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, содержащаяся в $G : U(x; \varepsilon) \subset G$. Если ранг m_0 кубов таков, что куб этого ранга имеет диаметр меньше ε, т. е. $\frac{\sqrt{n}}{10^{m_0}} < \varepsilon$, то все кубы ранга m_0, содержащие точку x, лежат в окрестности $U(x; \varepsilon)$ точки x и, следовательно, в множестве G. Поэтому

$$x \in s_{m_0}(G)_{\text{int}} = G_{m_0}.$$

Итак, если $x \in G$, то существует такой ранг m_0, что $x \in G_{m_0}$ и, значит,

$$G \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m. \tag{44.92}$$

Из включений (44.91) и (44.92) и следует равенство (44.85). Наконец,

$$\overline{G}_m = \overline{s_k(G)}_{\text{int}} = s_k(G)_{\text{int}} \subset s_k(G) \subset G,$$

т. е. условие (44.89) также выполнено.

З а м е ч а н и е 4. Поясним, почему свойство 10^0 называется полной аддитивностью интеграла. Если последовательность $\left\{\int\limits_{G_m} f(x)dx\right\}$ заменить рядом

$$\int\limits_{G_1} f(x)dx + \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{G_{m+1}\setminus G_m} f(x)dx,$$

для которого эта последовательность является последовательностью частичных сумм, то формулу (44.86) можно записать в виде равенства

$$\int\limits_G f(x)dx = \int\limits_{G_1} f(x)dx + \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{G_{m+1}\setminus G_m} f(x)dx, \quad G = G_1 \cup (G_{m+1}\setminus G_m).$$

Свойство интеграла по сумме счетной совокупности непересекающихся множеств быть равным сумме интегралов по этим множествам называется полной аддитивностью интеграла.

11^0 **(Теорема о среднем).** *Если функции f и g интегрируемы на множестве $E \subset R^n$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in E$, и функция $g(x)$ не меняет знак на E, то существует такое число μ, $m \leqslant \mu \leqslant M$, что*

$$\int\limits_E f(x)\, g(x)\, dx = \mu \int\limits_E g(x)\, dx. \tag{44.93}$$

СЛЕДСТВИЕ. *Если множество G — область, функции f и g интегрируемы, f непрерывна, а g не меняет знак на G, то в области G существует такая точка* ξ, *что*

$$\int_G f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_G g(x)\,dx. \tag{44.94}$$

Свойство 11^0 доказывается аналогично интегральной теореме о среднем для интеграла по отрезку и не требует предположения об ограниченности рассматриваемых функций, так как основано лишь на интегрировании неравенств (см. п. 24.2). В основе доказательства следствия лежит та же идея, что и в одномерном случае, однако оно имеет некоторые особенности, поэтому приведем его.

В силу интегрируемости функции f на открытом множестве она ограничена (теорема 7), поэтому ее нижняя $m = \inf\limits_{x \in G} f(x)$ и верхняя $M = \sup\limits_{x \in G} f(x)$ грани конечны на области G:

$$-\infty < m \leqslant f(x) \leqslant M < +\infty, \quad x \in G. \tag{44.95}$$

Если число μ в равенстве (44.93) удовлетворяет неравенству $m < \mu < M$, то, согласно определению нижней и верхней граней, существуют такие точки $x^{(1)} \in G$ и $x^{(2)} \in G$, что

$$f(x^{(1)}) < \mu < f(x^{(2)}).$$

Отсюда, в силу линейной связности области G и непрерывности на ней функции f, найдется такая точка $\xi \in G$, что $f(\xi) = \mu$ (см. п. 36.7), и формула (44.94) в этом случае доказана.

Пусть $\mu = m$ или $\mu = M$, например, $\mu = M$. Тогда из равенства (44.93) при $\mu = M$ следует, что

$$\int_{\overline{G}} (M - f(x))\,g(x)\,dx = 0. \tag{44.96}$$

Если $\int_{\overline{G}} g(x)\,dx = 0$, то на основании равенства (44.93) имеем $\int_G f(x)\,g(x)\,dx = 0$ и, следовательно, формула (44.94) справедлива при любом выборе точки ξ в области G.

Пусть $\int_{\overline{G}} g(x)\,dx \neq 0$, например,

$$\int_{\overline{G}} g(x)\,dx > 0. \tag{44.97}$$

Функция g не меняет на G свой знак. Случай $g(x) \leqslant 0$, $x \in G$, противоречит условию (44.97). Поэтому для всех точек $x \in G$ выполняется неравенство

$$g(x) \geqslant 0. \tag{44.98}$$

Согласно полной аддитивности интеграла по открытым множествам (см. свойство 10^0) и замечанию 3, из неравенства

(44.97) следует, что существует такое открытое измеримое множество G_0, для которого $G_0 \subset \overline{G_0} \subset G$ и выполняется неравенство

$$\int\limits_{\overline{G_0}} g(x)\,dx > 0. \qquad (44.99)$$

В силу измеримости области G, она ограничена, поэтому ограничено и замыкание $\overline{G_0}$ множества G_0, следовательно, оно является компактом. Если бы не существовала точка $\xi \in \overline{G_0}$, в которой $f(\xi) = M$, то для всех точек $x \in \overline{G_0}$ выполнялось неравенство $M - f(x) > 0$, $x \in \overline{G_0}$.

Согласно достижимости непрерывной на компакте функцией своего наименьшего значения, имеем

$$m_0 = \min_{x \in \overline{G}_0} (M - f(x)) > 0. \qquad (44.100)$$

Поэтому

$$\int\limits_{G} (M - f(x))\,g(x)\,dx \geqslant \int\limits_{\overline{G_0}} (M - f(x))\,g(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant m_0 \int\limits_{\overline{G_0}} g(x)\,dx \underset{\substack{(44.99)\\(44.100)}}{>} 0.$$

Это противоречит равенству (44.96). Следовательно, существует такая точка $\xi \in \overline{G_0} \subset G$, что $f(\xi) = M$.

Случай $\mu = m$ рассматривается аналогично. □

44.7*. Критерии интегрируемости функций Римана и Дарбу и их следствия

Пусть функция f определена и ограничена на измеримом по Жордану множестве E, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ — его разбиение, $m_i = \inf\limits_{E_i} f$, $M_i = \sup\limits_{E_i} f$, $s_\tau = \sum\limits_{i=1}^{i_\tau} m_i\,\mu E_i$, $S_\tau = \sum\limits_{i=1}^{i_\tau} M_i\,\mu E_i$ — нижняя и верхняя суммы Дарбу, соответствующие разбиению τ. Положим

$$I_* = \sup_\tau s_\tau, \quad I^* = \inf_\tau S_\tau. \qquad (44.101)$$

I_* называется *нижним*, а I^* — *верхним интегралом Дарбу* функции f. Оказывается, что нижний и верхний интегралы Дарбу являются не только соответственно верхней и нижней гранью интегральных сумм Дарбу, но и их пределом при условии, что мелкость разбиений стремится к нулю.

ТЕОРЕМА 11. *Если функция f ограничена на измеримом по Жордану множестве E, то*

$$I_* = \lim_{|\tau| \to 0} s_\tau, \quad I^* = \lim_{|\tau| \to 0} S_\tau.$$

Доказательство. Установим справедливость первой формулы (вторая доказывается аналогично). Пусть $|f(x)| \leqslant M$, $x \in E$, а $\varepsilon > 0$ задано. В силу определения (44.101), существует такое разбиение $\tau^* = \{E_i^*\}$ множества E, что

$$s_{\tau^*} > I_* - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{44.102}$$

Здесь $s_{\tau^*} = \sum\limits_{i=1}^{i_{\tau^*}} m_i^* \mu E_i^*$, $m_i^* = \inf\limits_{E_i^*} f$, $i = 1, 2, \ldots, i_{\tau^*}$. Пусть E_0 — объединение границ ∂E_i^* множеств E_i^*:

$$E_0 = \bigcup_{i=1}^{i_{\tau^*}} \partial E_i^*. \tag{44.103}$$

Поскольку каждое множество E_i^* измеримо, $\mu \partial E_i^* = 0$; поэтому $\mu E_0 = 0$. Следовательно, существует такой ранг $k = k(\varepsilon)$, что

$$\mu S_k(E_0) < \frac{\varepsilon}{3^{n+1} M}. \tag{44.104}$$

Покажем, что для любого разбиения $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ множества E мелкости $|\tau| < 10^{-k}$ выполняется неравенство

$$I_* - \varepsilon < s_\tau \leqslant I_*. \tag{44.105}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, это и означает, что $\lim\limits_{|\tau| \to 0} s_\tau = I_*$.

Неравенство $s_\tau \leqslant I_*$ непосредственно вытекает из определения нижнего интеграла I_* (см. (44.101)). Поэтому надо доказать лишь неравенство

$$s_\tau > I_* - \varepsilon \tag{44.106}$$

при условии $|\tau| < 10^{-k}$.

Пусть $S_k = S_k(E_0)$ состоит из кубов $Q_1, \ldots, Q_m$. Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 10, обозначим через P_j куб, получающийся из Q_j преобразованием подобия с центром в центре куба Q_j и коэффициентом подобия, равным 3, $j = 1, 2, \ldots, m$. Положим

$$P = \bigcup_{i=1}^{m} P_j, \quad G = E \backslash P. \tag{44.107}$$

Из определений множеств P и G следует, что множество G отделено от многогранника $S_k(E_0)$ «полосой» кубов с ребрами

длины 10^{-k}. Прежде всего оценим меру μP. Из определения множества P (см. (44.107) и неравенства (44.104)) имеем (ср. с (44.73))

$$\mu P = \mu \bigcup_{i=1}^{m} P_j \leqslant \sum_{j=1}^{m} \mu P_j = 3^n \sum_{j=1}^{m} \mu Q_j = 3^n \mu S_k(E_0) < \frac{\varepsilon}{3M}. \quad (44.108)$$

Далее заметим, что для любого множества $A \subset E$ с диаметром $\operatorname{diam}(A) < 10^{-k}$, пересекающимся со множеством G: $A \cap G \neq \varnothing$, существует, и притом единственное, множество $E_i^* \in \tau^*$ такое, что

$$A \subset E_i^*. \quad (44.109)$$

Действительно, выберем какую-либо точку $x \in A \cap G$. Так как $A \subset E$, то $x \in E$, и поэтому точка x содержится в некотором элементе E_i^* разбиения τ^*. Для этого элемента и выполняется включение (44.109). В самом деле, если это включение не имело места, то нашлась бы точка $y \in A \backslash E_i^*$. Так как $x \in A$, $y \in A$ и $\operatorname{daim}(A) < 10^{-k}$, то $\rho(x, y) < 10^{-k}$. Следовательно, отрезок с концами в точках x и y, имея длину, меньшую чем 10^{-k}, и один конец x во множестве G, не пересекается со множеством $S_k(E_0)$, так как оно отделено от G полосой ширины 10^{-k}. Однако из того, что один конец отрезка принадлежит некоторому множеству, в данном случае множеству E_i^*, а другой нет, следует (см. лемму 9 в п. 35.2), что на этом отрезке существует точка $z \in \partial E_i^*$. Но (см. (44.103)) $\partial E_i^* \subset E_0 \subset S_k(E_0)$, т. е. $z \in S_k(E_0)$. Следовательно, указанный отрезок пересекается со множеством $S_k(E_0)$. Полученное противоречие и доказывает вложение (44.109).

Докажем единственность множества E_i^*, удовлетворяющего включению (44.109). Пусть существует еще одно множество $E_k^* \in \tau^*$ такое, что $A \subset E_k^*$, $k \neq i$. Тогда $A \subset E_i^* \cap E_k^*$. Если пересечение $E_i^* \cap E_k^*$ содержало бы хоть одну точку, являющуюся одновременно внутренней для множеств E_i^* и E_k^*, то эта точка была бы внутренней и для пересечения $E_1^* \cap E_k^*$, а тогда имело бы место неравенство $\mu(E_i^* \cap E_k^*) > 0$. Это неравенство противоречит определению разбиения (см. п. 44.3), в силу которого $\mu(E_i^* \cap E_k^*) = 0$ при $i \neq k$. Следовательно, каждая точка пересечения $E_i^* \cap E_k^*$, поэтому и каждая точка множества A, является граничной точкой по крайней мере для одного из множеств E_i^*, E_k^*. Но тогда $A \subset \bigcup_{i=1}^{i_{\tau^*}} \partial E_i^* = E_0 \subset$

$\subset S_k(E_0)$. Это невозможно, так как множество A пересекается со множеством G, которое не пересекается с $S_k(E_0)$. Противоречие получилось из предположения о существовании второго элемента E_k^* из τ^*, содержащего множество A. Следовательно, такой элемент единствен.

Возьмем теперь произвольное разбиение $\tau = \{E_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ множества E мелкости $|\tau| < 10^{-k}$. Нижнюю сумму Дарбу

$$s_\tau = \sum_{j=1}^{j_\tau} m_j \mu E_j, \quad m_j = \inf_{x \in E_j} f(x), \quad j = 1, 2, \ldots, j_\tau$$

разобьем на два слагаемых, соответствующих тем E_j, которые пересекаются со множеством G, и тем, которые с ним не пересекаются, и, следовательно, целиком лежат в множестве P (см. (44.107)):

$$s_\tau = \sum_{E_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu E_j + \sum_{E_j \subset P} m_j \mu E_j. \tag{44.110}$$

Использовав очевидное неравенство

$$|m_j| \leqslant M, \; j = 1, 2, \ldots, j_\tau, \tag{44.111}$$

где $|f(x)| \leqslant M$, $x \in E$, и оценку (44.108), получим

$$\Big|\sum_{E_j \subset P} m_j \mu E_j\Big| \leqslant \sum_{E_j \subset P} |m_j| \mu E_j \leqslant M \sum_{E_j \subset P} \mu E_j \leqslant M \mu P < M \frac{\varepsilon}{3M} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

В частности, $\sum\limits_{E_j \subset P} m_j \mu E_j > -\frac{\varepsilon}{3}$. Поэтому из (44.110) имеем

$$s_\tau > \sum_{E_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu E_j - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{44.112}$$

Теперь заметим, что $\operatorname{diam} E_j \leqslant |\tau| < 10^{-k}$, поэтому для каждого E_j, пересекающегося со множеством G, в силу (44.109), существует такое $E_i^* \in \tau^*$, что $E_j \subset E_i^*$. Обозначим через G_i объединение всех тех E_j, которые пересекаются с G и содержатся в E_i^*:

$$G_i = \bigcup_{\substack{E_j \subset E_i^*, \\ E_j \cap G \neq \varnothing}} E_j.$$

Группируя в сумме $\sum\limits_{E_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu E_j$ слагаемые, содержащиеся в одном и том же множестве G_i, запишем ее в виде

$$\sum_{E_j \cap G \neq \varnothing} m_j^* \mu E_j = \sum_{i=1}^{i_\tau} \sum_{E_j \subset G_i} m_j^* \mu E_j. \tag{44.113}$$

Для оценки внутренней суммы заметим, что для любого $i = 1, 2, \ldots, i_\tau^*$, согласно очевидному равенству

$$E_i^* = (E_i^* \cap G_i) \cup (E_i^* \setminus G_i) = G_i \cup (E_i^* \setminus G_i)$$

(второе равенство следует из включения $G_i \subset E_i^*$), имеем

$$m_i^* \mu E_i^* = m_i^* \mu G_i + m_i^* \mu (E_i^* \setminus G_i) =$$

$$= m_i^* \mu \bigcup_{E_j \subset G_i} E_j + m_i^* \mu (E_i^* \setminus G_i) = m_i^* \sum_{E_j \subset G_j} \mu E_j + m_i^* \mu (E_i^* \setminus G_i). \quad (44.114)$$

Оценим второе слагаемое. Каждая точка $x \in E_i^* \setminus G_i$ принадлежит некоторому множеству $E_j \in \tau : x \in E_j$. Это E_j не может пересекаться с G, так как всякое $E_j \in \tau$, пересекающееся с G, целиком содержится в некотором элементе разбиения τ^* (см. (44.109)). Поскольку пересечение $E_j \cap E_i^*$ непусто: $x \in E_j \cap E_i^*$, то в данном случае этим элементом может быть только множество E_i^*, т. е. $E_j \subset E_i^*$. Но тогда, в силу определения множества G_i, имело бы место включение $E_j \subset G_i$ и, следовательно, $x \in G_i$. Это противоречит предположению, что $x \in E_i^* \setminus G_i$. Итак, множество E_j не пересекается с G и поэтому $E_j \subset P$. Отсюда, в частности, вытекает, что $x \in P$. Так как x — произвольная точка множества $E_i^* \setminus G_i$, то $E_i^* \setminus G_i \subset P$, и поэтому $E_i^* \setminus G_i \subset E_i^* \cap P$. Использовав это включение и неравенство (44.111), получим $m_i^* \mu (E_i^* \setminus G_i) \leqslant M \mu (E_i^* \cap P)$. Подставив это неравенство в (44.114), будем иметь

$$m_i^* \mu E_i^* \leqslant \sum_{E_j \subset G_i} m_i^* \mu E_j + M \mu (E_i^* \cap P).$$

Теперь заметив, что из включения $E_j \subset G_i \subset E_i^*$ следует неравенство $m_i^* \leqslant m_j$ (нижняя грань подмножества не меньше, чем нижняя грань самого множества), получим

$$m_i^* \mu E_i^* \leqslant \sum_{E_j \subset G_i} m_j \mu E_j + M \mu (E_i^* \cap P),$$

откуда

$$\sum_{E_j \subset G_i} m_j \mu E_j \geqslant m_i^* \mu E_i^* - M \mu (E_i^* \cap P).$$

Просуммировав обе части по i от 1 до i_{τ^*}, в силу (44.113), будем иметь

$$\sum_{E_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu E_j \geqslant \sum_{i=1}^{i_{\tau^*}} m_i^* \mu E_j - M \sum_{i=1}^{i_{\tau^*}} \mu(E_i^* \cap P) =$$

$$= s_{\tau^*} - M \sum_{i=1}^{i_{\tau^*}} \mu(E_i^* \cap P).$$

Поскольку, согласно (44.108),

$$\sum_{i=1}^{i_{\tau^*}} \mu(E_i^* \cap P) = \mu \bigcup_{i=1}^{i_{\tau^*}} E_i^* \cap P \leqslant \mu P < \frac{\varepsilon}{3M},$$

то

$$\sum_{E_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu E_j > s_{\tau^*} - \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (44.115)$$

Применив теперь последовательно неравенства (44.112), (44.115) и (44.102), получим

$$s_\tau > \sum_{E_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu E_j - \frac{\varepsilon}{3} > s_{\tau^*} - \frac{2\varepsilon}{3} > I_* - \varepsilon,$$

т. е. неравенство (44.106), следовательно, и теорема 11, доказаны. □

С ее помощью можно установить два критерия интегрируемости ограниченной функции.

ТЕОРЕМА 12 (критерий Дарбу). *Ограниченная на измеримом по Жордану множестве функция интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний интегралы Дарбу равны.*

Доказательство. Пусть I_* и I^* — соответственно нижний и верхний интегралы Дарбу функции f, ограниченной на измеримом множестве E. Следовательно, для любого разбиения τ множества E выполняются неравенства (см. (44.101))

$$s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau. \qquad (44.116)$$

Необходимость условия $I_* = I^*$. Если функция f интегрируема на множестве E, то (см. (44.67))

$$\lim_{|\tau| \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0,$$

и так как $0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau$, то $I_* = I^*$.

Достаточность условия $I_* = I^*$. Если $I_* = I^*$, то, в силу теоремы 11,

$$\lim_{|\tau| \to 0}(S_\tau - s_\tau) = \lim_{|\tau| \to 0} S_\tau - \lim_{|\tau| \to 0} s_\tau = I_* - I^* = 0,$$

и поэтому, согласно теореме 8 из п. 44.4, функция f интегрируема. □

ТЕОРЕМА 13 (критерий Римана). *Ограниченная на измеримом по Жордану множестве E функция f интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение τ множества E, что*

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon, \tag{44.117}$$

где s_τ и S_τ — нижняя и верхняя суммы Дарбу функции f, соответствующие разбиению τ.

Доказательство. Если функция f интегрируема на множестве E, то для нее выполняется условие (44.67) (см. теорему 8 в п. 44.4). Справедливость (44.117) следует из определения предела при $|\tau| \to 0$.

Если, наоборот, выполняется условие (44.117), то, в силу (44.116), при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $0 \leqslant I^* - I_* < \varepsilon$, и поэтому $I_* = I^*$. Отсюда, согласно теореме 12, и вытекает, что функция f интегрируема на множестве E. □

Вспоминая определение кратного интеграла (см. п. 44.3), теорему 8 из п. 44.4 и теоремы 12 и 13, получим для ограниченных функций эквивалентность следующих пяти утверждений:

1) *функция f интегрируема на множестве E, т. е. существует предел* $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau = \int f(x)dE$;

2) $\lim\limits_{|\tau| \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$;

3) $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{i_\tau} \omega(f;\, E_i)\mu E_i = 0$, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ — *разбиение множества E*;

4) *для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение τ множества E, что $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$*;

5) $I_* = I^*$.

Таким образом, выполнение каждого из этих условий равносильно существованию интеграла $\int f(x)dE$, причем

$$\int f(x)dE = \lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau = \lim_{|\tau| \to 0} s_\tau = \lim_{|\tau| \to 0} S_\tau.$$

З а м е ч а н и е 1. Доказанные теоремы позволяют теперь без труда доказать аддитивность интеграла по измеримым множествам для ограниченных функций (см. п. 44.6, свойство 3^0) в следующем виде: *если ограниченная функция f интегрируема на непересекающихся множествах E_1 и E_2, то она интегрируема и на множестве $E = E_1 \cup E_2$.*

Действительно, если функция f ограничена и интегрируема на множествах E_1 и E_2, то, в силу теоремы 13, для любого $\varepsilon > 0$ существуют разбиения τ_1 и τ_2 соответственно множеств E_1 и E_2 такие, что

$$S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad S_{\tau_2} - s_{\tau_2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{44.118}$$

Поскольку $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ является разбиением множества $E = E_1 \cup E_2$ и соответствующие ему верхняя S_τ и нижняя s_τ суммы Дарбу выражаются через аналогичные суммы Дарбу, соответствующие разбиениям τ_1 и τ_2, по формулам $S_\tau = S_{\tau_1} + S_{\tau_2}$, $s_\tau = s_{\tau_1} + s_{\tau_2}$, то, вычитая из первого из этих равенств второе, получаем, в силу (44.107),

$$S_\tau - s_\tau = (S_{\tau_1} - s_{\tau_1}) + (S_{\tau_2} - s_{\tau_2}) < \varepsilon.$$

Из выполнения этого условия следует (снова согласно теореме 13), что функция f интегрируема на множестве E.

З а м е ч а н и е 2. Как уже отмечалось в п. 44.3, для функций одной переменной, определенных на отрезках, мы располагаем двумя определениями интеграла, а именно, определением, данным в п. 23.1 — с помощью разбиений отрезков только на отрезки, и определением из п. 44.3 — с помощью разбиений отрезков на любые измеримые по Жордану множества. Эти два определения эквивалентны.

Докажем это. И при первом, и втором определении необходимым условием интегрируемости является ограниченность рассматриваемой функции: см. теорему 1 в п. 23.2 и замечание к теореме 7 в п. 44.4 (отрезок является замыканием интервала, т. е. замыканием открытого множества). Поэтому рассмотрим ограниченную на некотором отрезке $[a, b]$ функцию f. Пусть для этой функции существует интеграл

$$I = \lim_{|\tau| \to 0} \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\mu E_i$$

в смысле п. 44.3, т. е. для всевозможных разбиений $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ отрезка $[a, b]$ на измеримые по Жордану множества E_i. Тогда

если ограничиться лишь частью разбиений τ, для которых все множества E_i являются отрезками, то при $|\tau| \to 0$ предел интегральных сумм $\sum\limits_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\mu E_i$ по указанной части разбиений также существует и будет равен тому же числу I. Следовательно, если существует интеграл в смысле п. 44.3, то он существует и в смысле п. 23.1.

Пусть, наоборот, существует интеграл $I = \int\limits_b^a f(x)dx$ в смысле п. 23.1. Тогда, согласно теореме 2 из п. 23.4, $\lim\limits_{|\tau| \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$, где τ — разбиение отрезка $[a, b]$ на отрезки. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякого разбиения τ отрезка $[a, b]$ на отрезки длин, не превышающих δ, справедливо неравенство $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Но уже из того, что существует по крайней мере одно разбиение τ, для которого выполняется неравенство $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$, следует, согласно теореме 13 этого пункта, что функция f интегрируема в смысле определения п. 44.3. Итак, оба определения интеграла по отрезку действительно эквивалентны.

Аналогично одномерному случаю для функций многих переменных формулируется и доказывается критерий интегрируемости функции в терминах описания множества точек разрыва функции, называемый также *критерием Лебега*. Сформулируем его.

Множество в n-мерном пространстве называется множеством n-мерной лебеговой меры нуль, если для любого заданного $\varepsilon > 0$ это множество можно покрыть системой открытых шаров, сумма объемов которых меньше ε.

Примеры. 1. Множество, жорданова мера которого равна нулю, является и множеством лебеговой меры нуль.

2. Всякое счетное множество является множеством лебеговой меры нуль.

3. Множество рациональных чисел на числовой прямой является примером множества одномерной лебеговой меры нуль, которое не является множеством меры нуль в смысле меры Жордана.

ТЕОРЕМА 14 (критерий Лебега). *Для того чтобы ограниченная функция была интегрируема по Риману на измеримом по Жордану множестве, необходимо и достаточно, чтобы*

множество точек ее разрыва было множеством лебеговой меры нуль.

Доказательства критерия Лебега приводятся по той же схеме, что и в одномерном случае.

§ 45
Сведение кратного интеграла к повторному

Перейдем теперь к свойствам кратного интеграла, связанными со специфическими чертами, отличающими многомерный случай от одномерного. Использование этих свойств часто существенно облегчает вычисление конкретных кратных интегралов. Полные доказательства в этом параграфе будут проведены лишь для случая функций двух переменных. Общий n-мерный случай в идейном отношении не отличается от плоского, однако рассуждения там принимают более громоздкий и менее обозримый вид.

45.1. Сведение двойного интеграла к повторному

Покажем, что интегрирование функций многих переменных может быть сведено к последовательному интегрированию функций одной переменной. Начнем с того, что определим понятие повторного интеграла.

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы непрерывные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ такие, что $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и пусть на множестве (рис. 58)

$$E = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\} \tag{45.1}$$

определена функция $f(x, y)$.

Если для любого фиксированного $x \in [a, b]$ функция $f(x, y)$, как функция переменного y, интегрируема на отрезке $[\varphi(x), \psi(x)]$, т. е. при любом $x \in [a, b]$ существует интеграл $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy$ и функция

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy \tag{45.2}$$

интегрируема на отрезке $[a, b]$, то интеграл

$$\int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy\right]dx \tag{45.3}$$

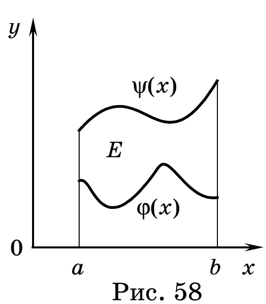


Рис. 58

называется *повторным интегралом* и обозначается

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \qquad (45.4)$$

Функция $F(x)$, задаваемая равенством (45.2), называется *интегралом, зависящим от параметра* x. Таким образом, повторный интеграл (45.4) является интегралом от интеграла, зависящего от параметра (см. также § 53 и § 54).

Заметим, что множество E, задаваемое формулой (45.1), измеримо в смысле плоской меры Жордана и замкнуто. Действительно, из непрерывности функций φ и ψ на отрезке $[a, b]$ следует их ограниченность, а поэтому множество E ограничено. Далее, его граница ∂E состоит из графиков указанных функций φ и ψ, а также, быть может, отрезков прямых $x = a$ и $x = b$. Каждое из указанных множеств имеет меру нуль (см. теорему 3 в п. 44.2), а поэтому и граница ∂E множества E также имеет меру нуль. Наконец множество E задается с помощью нестрогих неравенств $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$, где функции φ и ψ непрерывны, следовательно, эти неравенства сохраняются и при предельном переходе в последовательностях $(x_n, y_n) \in E$, $n = 1, 2, \ldots$, откуда и вытекает замкнутость множества E. Таким образом, E — измеримый компакт.

Достаточные условия для возможности сведения двукратного интеграла к повторному даются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция* $f(x, y)$ *непрерывна на множестве* E, *заданном формулой* (45.1). *Тогда*

$$\int_E f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy. \qquad (45.5)$$

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

ЛЕММА 1. *В предположениях теоремы* 1 *функция* (45.2) *непрерывна на отрезке* $[a, b]$.

Доказательство леммы. Прежде всего заметим, что интеграл (45.2) существует при любом $x \in [a, b]$. Действительно, функция $f(x, y)$, будучи непрерывной по совокупности переменных x и y, непрерывна по каждой из них. Поэтому указанный интеграл существует как интеграл от непрерывной по y функции на отрезке $[\varphi(x), \psi(x)]$.

Выполнив в этом интеграле замену переменной y на t по формуле

$$y = \varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \qquad (45.6)$$

получим

$$F(x) = \int_0^1 f(x, \varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))t)(\psi(x) - \varphi(x))dt. \qquad (45.7)$$

Положим

$$g(x, t) = f(x, \varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))t)(\psi(x) - \varphi(x)).$$

Поскольку функция $g(x, t)$ получается с помощью арифметических операций и композиции из непрерывных функций $f(x, y)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и (45.6), в силу теоремы о непрерывных функциях (см. п. 36.4 и 36.6), она непрерывна по совокупности переменных x, t на прямоугольнике $P = \{(x, t) : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Таким образом, для функции $F(x)$ (см. (45.2)), в силу (45.7), имеет место более простое представление $F(x) = \int_0^1 g(x, t)dt$ (более простое в том смысле, что в нем постоянны пределы интегрирования).

Пусть теперь $x \in [a, b]$, $x + \Delta x \in [a, b]$. Обозначим через $\omega(\delta; g)$ модуль непрерывности (см. п. 19.6) функции $g(x, t)$. Тогда

$$|F(x + \Delta x) - F(x)| = \left|\int_0^1 g(x + \Delta x, t)dt - \int_0^1 g(x, t)dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 |g(x + \Delta x, t) - g(x, t)|dt \leqslant \omega(|\Delta x|; g). \qquad (45.8)$$

Функция $g(x, t)$, будучи непрерывной на прямоугольнике P, являющемся, очевидно, ограниченным замкнутым множеством, равномерно непрерывна на нем, поэтому (см. п. 36.6) $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta; g) = 0$. Отсюда, в силу неравенства (45.8), имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} [F(x + \Delta x) - F(x)] = 0,$$

что и означает непрерывность функции $F(x)$, определенной формулой (45.2).□

Доказательство теоремы. Прежде всего заметим, что интеграл, стоящий в правой части равенства (45.5), т. е.

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy,$$

является интегралом от непрерывной функции (см. лемму) и поэтому существует.

Для доказательства равенства (45.5) разобьем отрезок $[a, b]$ на k равных отрезков точками

$$x_i = a + \frac{b - a}{k} i, \ i = 0, 1, \ldots, k \qquad (45.9)$$

(k фиксировано) и рассмотрим функции

$$\varphi_0(x) = \varphi(x),$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) + \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{k},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_j(x) = \varphi(x) + \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{k}j,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_k(x) = \varphi(x) + \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{k}k = \psi(x),$$

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad (45.10)$$

(рис. 59). Очевидно, из формул (45.10) следует, что

$$\varphi_j(x) = \varphi_{j-1}(x) + \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{k}, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \qquad (45.11)$$

Положим

$$E_{ij}^{(k)} = \{(x, y) : x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \varphi_{j-1}(x) \leqslant y \leqslant \varphi_j(x)\}, \qquad (45.12)$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, k.$$

Множества $E_{ij}^{(k)}$ образуют разбиение (обозначим его τ_k) множества E (рис. 59): $\tau_k = \{E_{ij}^{(k)}\}$. Покажем, что

$$\lim_{k \to \infty} |\tau_k| = 0. \qquad (45.13)$$

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, будучи непрерывными на отрезке $[a, b]$, ограничены на нем, т. е. существует такая постоянная $c > 0$, что для всех точек $x \in [a, b]$ выполняются неравенства $|\varphi(x)| \leqslant c$, $|\psi(x)| \leqslant c$, и, следовательно, из формул (45.11) вытекает, что

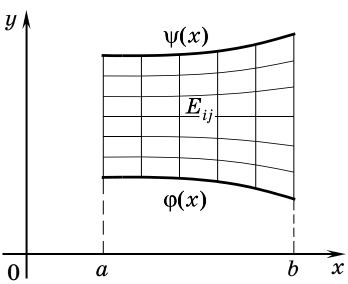


Рис. 59

$$|\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)| \leqslant \frac{|\psi(x)| + |\varphi(x)|}{k} \leqslant \frac{2c}{k},$$

$$j = 1, 2, \ldots, k, \; a \leqslant x \leqslant b. \qquad (45.14)$$

Пусть $(x, y) \in E_{ij}^{(k)}$, $(x', y') \in E_{ij}^{(k)}$. Оценим расстояние

$$\rho((x', y'), (x, y)) =$$

$$= \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}. \qquad (44.15)$$

Имеем

$$|x' - x| \underset{(45.9)}{\leqslant} \frac{b-a}{k}, \tag{45.16}$$

$$|y' - y| \leqslant |y' - \varphi_j(x')| + |\varphi_j(x') - \varphi_j(x)| + |\varphi_j(x) - y| \underset{(45.12)}{\leqslant}$$

$$\underset{(45.12)}{\leqslant} |\varphi_j(x') - \varphi_{j-1}(x')| + |\varphi_j(x') - \varphi_j(x)| + |\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)| \underset{(45.14)}{\leqslant}$$

$$\underset{(45.14)}{\leqslant} \frac{4c}{k} + \omega_i(\varphi_j), \tag{45.17}$$

где $\omega_i(\varphi_j)$ — колебание функции φ_j на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ (см. п. 5.17). Для этого колебания имеет место оценка, не зависящая от номера $j = 1, 2, \ldots, k$:

$$\omega_i(\varphi_j) \overset{\text{def}}{=} \sup_{x,\, x' \in [x_{i-1},\, x_i]} |\varphi_j(x') - \varphi_j(x)| \underset{(45.10)}{\leqslant}$$

$$\underset{(45.10)}{\leqslant} \sup_{x,\, x' \in [x_{i-1},\, x_i]} |\varphi(x') - \varphi(x)| + \frac{j}{k}\Big(\sup_{x,\, x' \in [x_{i-1},\, x_i]} |\varphi(x') -$$

$$- \varphi(x)| + \sup_{x,\, x' \in [x_{i-1},\, x_i]} |\psi(x') - \psi(x)|\Big) \leqslant 2\omega_i(\varphi) + \omega_i(\psi) \tag{45.18}$$

$\left(\text{здесь } \frac{j}{k} \leqslant 1, \text{ так как } j = 1, 2, \ldots, k\right)$, где $\omega_i(\varphi)$ и $\omega_i(\psi)$ — колебания функций φ и ψ на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Колебания функций оцениваются через их модули непрерывности и тем самым независимо от номера i: если $\omega(\delta, \varphi)$ и $\omega(\delta, \psi)$ — модули непрерывности функций φ и ψ (см. п. 6.4), то

$$\omega_i(\varphi) \leqslant \omega\left(\frac{b-a}{k}; \varphi\right), \;\; \omega_i(\varphi) \leqslant \omega\left(\frac{b-a}{k}; \varphi\right) \tag{45.19}$$

$\left(\text{так как } x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{k}\right)$, поэтому

$$\omega_i(\varphi_j) \underset{(45.18),\,(45.19)}{\leqslant} 2\omega\left(\frac{b-a}{k}; \varphi\right) + \omega\left(\frac{b-a}{k}; \psi\right). \tag{45.20}$$

Из равенства (45.17) и (45.20) следует оценка

$$|y' - y| \leqslant \frac{4c}{k} + 2\omega\left(\frac{b-a}{k}; \varphi\right) + \omega\left(\frac{b-a}{k}; \psi\right). \tag{45.21}$$

Теперь можно оценить расстояние (45.15)

$$\rho((x', y'), (x, y)) = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} \leqslant |x' - x| + |y' - y| \underset{\substack{(45.16)\\(45.21)}}{\leqslant}$$

$$\underset{\substack{(45.16)\\(45.21)}}{\leqslant} \frac{b-a}{k} + \frac{4c}{k} + 2\omega\left(\frac{b-a}{k}; \varphi\right) + \omega\left(\frac{b-a}{k}; \psi\right).$$

Отсюда

$$\operatorname{diam} E_{ij}^{(k)} = \sup_{(x,\, y),\, (x',\, y') \in E_{ij}^{(k)}} \rho((x', y'), (x, y)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{b-a}{k} + \frac{4c}{k} + 2\omega\left(\frac{b-a}{k}; \varphi\right) + \omega\left(\frac{b-a}{k}; \psi\right), \ i, j = 1, 2, \ldots, k. \quad (45.22)$$

Поскольку функции φ и ψ непрерывны на отрезке $[a, b]$, они и равномерно непрерывны на нем, поэтому (см. теорему 6 в п. 6.4)

$$\lim_{k \to \infty} \omega\left(\frac{b-a}{k}; \varphi\right) = \lim_{k \to \infty} \omega\left(\frac{b-a}{k}; \psi\right) = 0. \quad (45.23)$$

Зададим теперь произвольно $\varepsilon > 0$. Для него существует такое натуральное число k_0, что для всех номеров $k > k_0$ выполняются неравенства

$$\frac{b-a}{k} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{4c}{k} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad 2\omega\left(\frac{b-a}{k}; \varphi\right) + \omega\left(\frac{b-a}{k}; \psi\right) \underset{(45.23)}{<} \frac{\varepsilon}{3}, \quad (45.24)$$

и, следовательно, из неравенств (45.22) и (45.24) следует, что для всех номеров $k > k_0$ и всех $i, j = 1, 2, \ldots, k$ имеет место оценка: $\operatorname{diam} E_{i,j}^{(k)} \underset{\substack{(45.22)\\(45.24)}}{<} \varepsilon$, а так как (см. п. 44.3) $|\tau_k| = \max\limits_{i,\, j} \operatorname{diam} E_{i,j}^{(k)}$, то при всех указанных k имеют место неравенства $|\tau_k| < \varepsilon$. Это и означает выполнение условия (45.13). Теперь имеем

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \sum_{j=1}^{k} \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)dy = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)dy.$$

Положим

$$m_{ij} = \inf_{E_{ij}} f(x,y) \text{ и } M_{ij} = \sup_{E_{ij}} f(x, y), \quad i,j = 1, 2, \ldots, k.$$

Заметив, что (см. п. 28.1)

$$\mu E_{ij} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)]dx,$$

получим

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)dy \leqslant M_{ij} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} dy =$$

$$= M_{ij} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi(x) - \varphi_{j-1}(x)]dx = M_{ij}\mu E_{ij} \quad (44.25)$$

и, аналогично,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)dy \geqslant m_{ij}\mu E_{ij}. \qquad (44.26)$$

С помощью неравенств (45.25) и (45.26) для повторного интеграла (45.4) получаем следующую оценку через нижние и верхние суммы Дарбу s_{τ_k} и S_{τ_k} функции $f(x, y)$:

$$s_{\tau_k} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\mu E_{ij} \leqslant \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} M_{ij}\mu E_{ij} = S_{\tau_k}. \qquad (45.27)$$

Мелкости разбиений τ_k при $k \to \infty$ стремятся к нулю (см. (45.13)), поэтому, в силу интегрируемости функции $f(x,y)$ на E (см. п. 44.4),

$$\lim_{k\to\infty} s_{\tau_k} = \lim_{k\to\infty} S_{\tau_k} = \iint_G f(x, y)dxdy.$$

Переходя теперь к пределу в неравенстве (45.27) при $k \to \infty$, получаем формулу (45.5). □

З а м е ч а н и е. Воспользовавшись теоремой 10 из п. 44.5*, доказательство теоремы 1 настоящего параграфа можно технически существенно упростить. Достаточно выбрать какой-нибудь прямоугольник $P = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$, содержащий множество E (см. формулу (45.1)), $E \subset P$, и продолжить функцию f нулем на дополнение $P \backslash E$ множества E в прямоугольнике P. Полученная функция (обозначим ее тем же символом f) интегрируема на прямоугольнике P, так как множество точек ее разрыва содержится в границе ∂E измеримого множества E, которая, как известно, имеет меру нуль.

Разбив на k равных частей отрезок $[a, b]$ на оси Ox и отрезок $[c, d]$ на оси Oy и проведя через точки деления прямые, параллельные координатным осям, получим разбиение прямоугольника P на прямоугольники

$$E_{ij}^{(k)} = \left\{(x, y) : (i-1)\frac{b-a}{k} \leqslant x \leqslant i\frac{b-a}{k},\ (j-1)\frac{d-c}{k} \leqslant y \leqslant j\frac{d-c}{k}\right\},$$
$$i = 1, 2, \ldots, k;\quad j = 1, 2, \ldots, k;\quad k = 1, 2, \ldots,$$

с длинами сторон, равными $\frac{b-a}{k}$ и $\frac{d-c}{k}$, и, следовательно, с диагоналями (диаметрами) $\operatorname{diam} E_{ij} = \frac{1}{k}\sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}$.

Поэтому последовательность мелкостей $|\tau_k|$ разбиений $\tau_k = \{E_{ij}^{(k)}\}$ стремится к нулю: $\lim\limits_{k \to \infty} |\tau_k| = 0$.

Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, получим

$$\iint\limits_P f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)dy,$$

а так как функция f равна нулю вне множества E, то, в силу аддиативности интеграла по множествам, эта формула равносильна формуле (45.5).

Заметим лишь, что все интегралы $\int\limits_c^d f(x, y)dy$ существуют, так как при любом фиксированном $x \in [a, b]$ функция $f(x, y)$ как функция переменного y имеет не более двух точек разрыва, а именно на пересечении отрезка, по которому производится интегрирование с границей ∂E. Существование же повторного интеграла следует, как и выше, из непрерывности функции (45.2).

Если множество E таково, что существуют такие непрерывные функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$, $\alpha(y) \leqslant \beta(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, что

$$E = \{(x, y) : c \leqslant y \leqslant d, \alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y)\}, \qquad (45.28)$$

а функция $f(x, y)$, как и раньше, непрерывна на E, то, в силу равноправия переменных x и y, из теоремы 1 следует, что

$$\iint\limits_E f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)dx. \qquad (45.29)$$

Если же для множества E справедливо как равенство (45.1), так и (45.28) (рис. 60), то, приравнивая правые части равенств (45.5) и (45.29), для непрерывной на множестве E функции $f(x, y)$ получим формулу

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)dx, \qquad (45.30)$$

выражающую собой правило перемены порядка интегрирования в повторных интегралах.

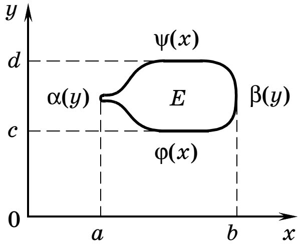


Рис. 60

Отметим, что условия, при которых были доказаны формулы (45.5), (45.29) и (45.30), могут быть ослаблены.

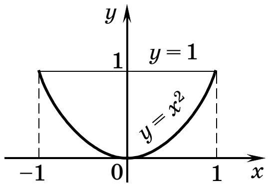


Рис. 61

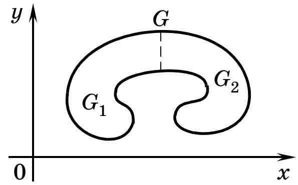


Рис. 62

Пример. Вычислим интеграл от функции $z = x^2y$ по конечной области G, ограниченной частью параболы $y = x^2$ и прямой $y = 1$ (рис. 61). Имеем

$$\iint\limits_G x^2y\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1} x^2dx\int\limits_{x^2}^{1} y\,dy = \int\limits_{-1}^{1} \frac{y^2}{2}\Bigg|_{x^2}^{1} x^2dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(1 - x^4)x^2dx = \frac{4}{21}.$$

Если требуется вычислить двойной интеграл по множеству, которое нельзя задать в виде (45.1) или (45.28), то для того, чтобы использовать полученные формулы, надо попытаться разбить данное множество на части, каждая из которых будет уже иметь вид (45.1) или (45.28) (рис. 62). Если это удастся сделать, то, в силу аддитивности интеграла по множествам (см. п. 44.6), вычисление данного интеграла сведется к вычислению интегралов по указанным частям, а последние с помощью формул (45.5) и (45.29) могут быть сведены к однократным.

УПРАЖНЕНИЕ. Доказать формулу Дирихле

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_a^x f(x, y)dy = \int\limits_a^b dy\int\limits_y^b f(x, y)dx.$$

45.2. Обобщение на *n*-мерный случай

Рассмотрим сначала трехмерный случай. Пусть $E \subset \boldsymbol{R}^3$ и функция $f(x, y, z)$ определена на E. Обозначим через E_{xy} проекцию множества E на координатную плоскость переменных x и y (рис. 63) $E_{xy} = \{(x, y, 0)$: существует такое z, что $(x, y, z) \in E\}$.

Если множество E имеет вид

$$E = \{(x, y, z) : (x, y, 0) \in E_{xy},$$
$$\varphi_1(x, y) \leqslant z \leqslant \psi_1(x, y)\},$$

где функции $\varphi_1(x, y)$ и $\psi_1(x, y)$ непрерывны на множестве E_{xy}, которое в свою очередь представимо, например, в виде (45. 1),

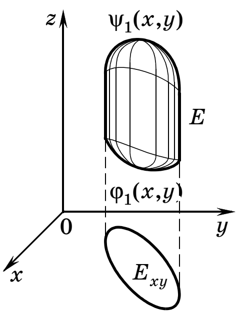


Рис. 63

а функция $f(x, y, z)$ непрерывна на исходном множестве E, то справедлива формула, аналогичная формуле (45.5):

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\psi_1(x, y)} f(x, y, z)dz. \quad (45.31)$$

Объединив в правой части два внешних интеграла, можно переписать (45.31) в виде

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_{E_{xy}} dxdy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\psi_1(x, y)} f(x, y, z)dz. \quad (45.32)$$

Обозначим теперь через $E(x)$ сечения множества E плоскостями, перпендикулярными координатной оси Ox:

$$E(x_0) = E \cap \{(x, y, z) : x = x_0\}.$$

Объединив в правой части формулы (45.31) два внутренних интеграла, получим

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx \iint\limits_{E(x)} f(x, y, z)dydz. \quad (45.33)$$

Таким образом, формулы (45.32) и (45.33) показывают, что в трехмерном случае существует два способа сведения трехмерного интеграла к повторному, содержащему интегралы меньшей кратности.

В частном случае, когда $f(x, y, z) = 1$, имеем (см. свойство 1^0 кратных интегралов в п. 44.6) $\iiint dxdydz = \mu E(x)$ (μE — объем множества E), $\int dydz = \mu E(x)$ ($\mu E(x)$ — площадь сечения $E(x)$).

Таким образом,

$$\mu E = \int_a^b \mu E(x)dx \quad (45.34)$$

— объем тела равен интегралу от переменной площади сечений $E(x)$.

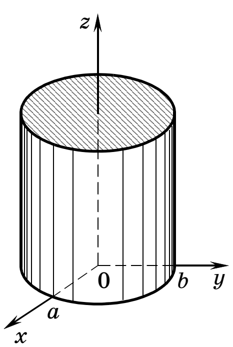


Рис. 64

Пример. Найдем объем эллиптического цилиндра высоты h, в основании которого лежит эллипс с полуосями a и b. Взяв за координатную плоскость xy плоскость одного из оснований цилиндра, а за ось Oz — его ось симметрии, перпендикулярную основаниям (рис. 64), получим, согласно формуле (45.34), $\mu E = \int_0^h \mu E(z)dz$. Но $E(z)$ — эллипс с полуосями a и b, поэтому (см. пример 4 в п. 28.1) $\mu E(z) = \pi ab$, следовательно,

$$\mu E = \pi ab\int_0^h dz = \pi abh.$$

Аналогично трехмерному случаю кратные интегралы от функций любого числа переменных $n > 3$ можно свести к повторным интегралам. Пусть $\boldsymbol{R}^n$ — n-мерное пространство, $\boldsymbol{R}^{n-1}$ — гиперплоскость $x_n = 0$, $E \subset \boldsymbol{R}^n$, $E_{x_1 \ldots x_{n-1}}$ — проекция множества E на гиперплоскость переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$, т. е.

$$E_{x_1 \ldots x_{n-1}} = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0): \exists x_n, (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in E\}.$$

Пусть имеются такие непрерывные на $E_{x_1 \ldots x_{n-1}}$ функции $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$, что множество E состоит из точек $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, для которых

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in E_{x_1 \ldots x_{n-1}},\ \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Пусть множество $E_{x_1 \ldots x_{n-1}}$ измеримо в смысле $(n-1)$-мерной меры Жордана и замкнуто. Тогда аналогично двумерному случаю (см. п. 45.1) доказывается, что E также измеримо, но уже в смысле n-мерной меры, и замкнуто, потому является компактом.

Если функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна на компакте E, то справедлива формула

$$\overbrace{\int \ldots \int_E}^{n \text{ раз}} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \overbrace{\int \ldots \int_{E_{x_1 \ldots x_{n-1}}}}^{n-1 \text{ раз}} dx_1 \ldots dx_{n-1} \int\limits_{\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)dx_n, \quad (45.35)$$

которая сводит интегрирование функции n переменных к последовательному интегрированию функции одной переменной и функции $n-1$ переменных.

Если проекция $E_{x_1 \ldots x_{n-1}}$ множества E на гиперплоскость $\boldsymbol{R}^{n-1}$ в свою очередь может быть представлена в виде, аналогичном виду множества E, то получившийся в правой части равенства (45.35) $(n-1)$-кратный интеграл можно свести к $(n-2)$-кратному. Продолжая этот процесс, если, конечно, это возможно, дальше придем к формуле вида

$$\overbrace{\int \ldots \int_E}^{n \text{ раз}} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_a^b dx_1 \int\limits_{\varphi_1(x_1)}^{\psi_1(x_1)} dx_2 \int\limits_{\varphi_2(x_1, x_2)}^{\psi_2(x_1, x_2)} dx_3 \ldots \int\limits_{\varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{\psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)dx_n. \quad (45.36)$$

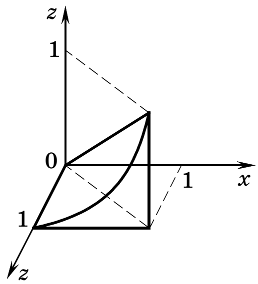


Рис. 65

Таким образом, в рассматриваемом случае интегрирование функции от n переменных сводится к последовательному интегрированию n раз функций одной переменной.

Обозначим теперь через $E_{x_1 \dots x_m}$ проекцию множества E в пространство $\boldsymbol{R}^m_{x_1 \dots x_m}$, а через $E(x_1, \dots, x_m)$ — сечение множества E гиперплоскостями размерности $n - m$, проходящими через точку $(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ и ортогональными подпространству $\boldsymbol{R}^m_{x_1 \dots x_m}$. Объединив в формуле (45.36) m первых и $n - m$ последних интегрирований, будем иметь

$$\overbrace{\int \dots \int_E}^{n \text{ раз}} f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \overbrace{\int \dots \int_{E_{x_1 \dots x_m}}}^{m \text{ раз}} dx_1 \dots dx_m \overbrace{\int \dots \int_{E(x_1 \dots x_m)}}^{n - m \text{ раз}} f(x_1, \dots, x_n)dx_{m+1} \dots dx_n. \quad (45.37)$$

Если $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$ на E, то из этой формулы аналогично (45.34) получим

$$\mu E = \int \dots \int_{E_{x_1 \dots x_m}} \mu E(x_1, \dots, x_m)dx_1 \dots dx_m. \quad (45.38)$$

Пример. Вычислим интеграл от функции $f(x, y, z) = xy^2z^3$ по конечной области E, ограниченной поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$ и $z = 0$ (рис. 65). Применим формулу (45.36):

$$\iiint_G xy^2z^3 dx\,dy\,dz = \int_0^1 x\,dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z^3 dz =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 x^5 dx \int_0^x y^6 dy = \frac{1}{28}\int_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{364}.$$

45.3*. Обобщенное интегральное неравенство Минковского

В качестве еще одного примера применения правила перемены порядка интегрирования докажем одно часто применяемое интегральное неравенство.

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике $\Delta = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$. Тогда она, очевидно, при любом фиксированном $y \in [c, d]$ непрерывна по x на отрезке $[a, b]$ и при любом фиксированном $x \in [a, b]$ непрерывна по y на отрезке $[c, d]$.

Для любого $p > 1$ справедливо *обобщенное неравенство Минковского*

$$\left\{\int_c^d \left[\int_a^b |f(x, y)|dx\right]^p dy\right\}^{1/p} \leqslant \int_a^b dx\left[\int_c^d |f(x, y)|^p dy\right]^{1/p}. \quad (45.39)$$

Положим

$$F(y) = \int_a^b |f(x, y)|dx. \quad (45.40)$$

Функция F непрерывна (см. лемму 1 в п. 45.1) и неотрицательна на отрезке $[c, d]$. Поэтому ее p-я степень также интегрируема и неотрицательна на этом отрезке, и $0 \leqslant \int_c^d F^p(y)dy < +\infty$.

Если $\int_c^d F^p(y)dy = 0$, то, в силу непрерывности функции F, будем иметь (см. свойство 9^0 п. 24.1): $F(y) \equiv 0$ на $[c, d]$. Поэтому из формулы (45.40), в силу того же свойства, следует, что при любом $y \in [c, d]$ имеет место $f(x, y) \equiv 0$ на $[a, b]$, т. е. $f(x, y) \equiv 0$ на Δ. В этом случае неравенство (45.39) очевидно справедливо.

Пусть $\int_c^d F^p(y)dy > 0$. Тогда, изменив порядок интегрирования и применив неравенство Гельдера (24.48), получим, в силу (45.40),

$$\int_c^d F^p(y)dy = \int_c^d F^{p-1}(y)\left[\int_a^b |f(x, y)|dx\right]dy = \int_a^b dx\int_c^d |f(x, y)|F^{p-1}(y)dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \left[\int_c^d |f(x, y)|^p dy\right]^{1/p} \left[\int_c^d F^{q(p-1)}(y)dy\right]^{1/q} dx, \quad (45.41)$$

где $1/p + 1/q = 1$ и, следовательно, $q(p - 1) = p$. Сократив обе части неравенства (45.41) на множитель $\left(\int_c^d F^p(y)dy\right)^{1/q} \neq 0$, будем иметь

$$\left(\int_c^d F^p(y)dy\right)^{1/p} \leqslant \int_a^b \left[\int_c^d |f(x, y)|^p dy\right]^{1/p} dx.$$

Подставляя в это неравенство (45.40), получаем неравенство (45.39). Условие непрерывности функции f не является существенным для справедливости неравенства (45.39) и может быть ослаблено. Для простоты доказательства в качестве области определения функции f был взят прямоугольник. При более общих предположениях доказательство неравенства Минковского, основанное на той же идее, можно найти в монографии *Харди Г. Г., Литтльвуда Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. М., 1948. С. 179—180.

45.4. Объем n-мерного шара

Методом сведения кратного интеграла к повторному иногда удается вычислить значение краткого интеграла. Поясним это на примере получения формулы для величины объема n-мерного шара радиуса r. Пусть

$$V_r^n = \{x : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant r^2\}$$

— n-мерный шар радиуса r с центром в начале координат.

В случае плоскости ($n = 2$) известно, что

$$\mu_2 V_r^2 = \int\int_{x^3 + y^2 \leqslant r^2} dx\, dy = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \pi r^2. \qquad (45.42)$$

Отсюда можно найти объем трехмерного шара следующим образом:

$$\mu_3 V_r^3 \underset{(45.34)}{=} 2\int_0^r \mu_2 V^2_{\sqrt{r^2 - z^2}} dz = 2\pi\int_0^r (r^2 - z^2)dz = \frac{4}{3}r^3.$$

Применим этот метод для вычисления объема $\mu_n V_r^n$ шара V_r^n при произвольном $n = 1, 2, \ldots$, предполагая, что

$$\mu_{n-1} V_r^{n-1} = \chi_{n-1} r^{n-1},$$

где χ_{n-1} — некоторая константа $\left(\chi_2 = \pi,\ \chi_3 = \frac{4}{3}\pi\right)$. Имеем

$$\mu V_r^n = \int\int_{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant r^2} \cdots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= 2\int_0^r dx_1 \int\int_{x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant r^2 - x_1^2} \cdots \int dx_2\, dx_3 \ldots dx_n =$$

$$= 2\int_0^r \mu_{n-1} V^{n-1}_{\sqrt{r^2 - x_1^2}}\, dx_1 = 2\chi_{n-1}\int_0^r (r^2 - x_1^2)^{(n-1)/2}\, dx_1 \underset{x_1 = r\cos t}{=}$$

$$\underset{x_1 = r\cos t}{=} 2\chi_{n-1} r^n \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt = \chi_n r^n,\ \ \chi_n = 2\chi_{n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt.$$

Получившийся интеграл был вычислен раньше (см. пример 2 п. 26.2 в т.1), откуда

$$\chi_n = \begin{cases} 2\chi_{n-1}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & \text{при } n \text{ четном,} \\ 2\chi_{n-1}\dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Таким образом, для коэффициентов χ_n получена рекуррентная формула. Последовательно ее применяя, получим (при $n = 1$ очевидно $\mu_1 V_r^1 = 2r$, поэтому $\chi_1 = 2$)

$$\chi_{2m} = \frac{\pi^m}{m!}, \quad \chi_{2m+1} = \frac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!}, \quad m = 1, 2, \ldots . \qquad (45.43)$$

45.5. Независимость меры от выбора системы координат

При определении меры множества в п. 44.1 остался невыясненным вопрос о независимости меры от выбора системы координат. Мера множеств определяется посредством многогранников, состоящих из кубов, ребра которых параллельны координатным осям. Поэтому вопрос о независимости меры множеств от выбора системы координат сводится к независимости объемов кубов от этого выбора. Отношение (обозначим его λ) объемов одного и того же куба, вычисленных в разных системах координат, не зависит от выбора конкретного куба, так как любые два куба с ребрами, параллельными координатным осям одной системы координат, могут быть получены один из другого с помощью параллельного переноса и гомотетии с центром в совмещенных центрах симметрии кубов. Если указанное отношение равно единице, то мера множества не зависит от выбора системы координат.

Пусть в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ заданы две системы координат. Меру множества, определенную с помощью первой из них, обозначим через μ, а с помощью второй — через $\tilde{\mu}$. Пусть $\boldsymbol{Q}$ — n-мерный куб с ребрами, параллельными координатным осям первой координатной системы, и пусть

$$\tilde{\mu}\boldsymbol{Q} = \lambda\mu\boldsymbol{Q}. \qquad (45.44)$$

Отсюда следует, что множества одновременно имеют меру нуль в обеих системах координат, следовательно, множества одновременно измеримы или нет, причем если множество $X \subset \boldsymbol{R}^n$ измеримо, то $\tilde{\mu}X = \lambda\mu X$. Для доказательства равенства $\lambda = 1$

заметим, что объем n-мерного шара V_r^n радиуса r равен $\chi_n\, r^n$ (см. п. 45.4), где χ_n — определенное число. Величина длины радиуса шара, как и длина всякого отрезка, имеет одно и то же значение при любом выборе системы координат. Таким образом, объем n-мерного шара V_r^n не зависит от выбора системы координат:

$$\tilde{\mu} V_r^n = \mu V_r^n. \qquad (45.45)$$

Для многогранника $s_k(V_r^n)$ (см. формулу (44.3)), состоящего из кубов ранга k в первой системе координат (следовательно, с ребрами, параллельными ее координатным осям), будем иметь

$$\tilde{\mu} s_k(V_r^n) \underset{(45.44)}{=} \lambda \mu s^k(V_r^n). \qquad (45.46)$$

Поэтому

$$\lim_{k \to \infty} \tilde{\mu} s_k(V_r^n) = \lambda \lim_{k \to \infty} \mu s_k(V_r^n) = \lambda \mu V_r^n,$$

но (см. лемму 6 в п. 44.1 при $A_m = s_m\,(V_r^n)$)

$$\lim_{k \to \infty} \tilde{\mu} s_k(V_r^n) = \tilde{\mu} V_r^n \underset{(45.45)}{=} \mu V_r^n,$$

т. е. $\lambda \mu V_r^n = \mu V_r^n$. Это означает, что $\lambda = 1$.

Итак, действительно мера множества не зависит от выбора системы координат. Поскольку переход от одного ортонормированного базиса к другому осуществляется с помощью ортогональных матриц, мера является инвариантом при линейных ортогональных отображениях, т. е. отображениях, задаваемых формулами

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

с ортогональными матрицами $C = (c_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ (см. п. 35.4).

45.6*. Формулы Ньютона—Лейбница и Тейлора

Приведем самый простой вывод формулы Тейлора: она может быть получена последовательным применением формулы Ньютона—Лейбница к получающимся подынтегральным функциям. Остаточный член формулы Тейлора имеет вид повторного интеграла, который с помощью формулы перемены порядка интегрирования (см. формулу (45.35)), можно привести к уже известному нам его виду в интегральной форме с однократным интегрированием (см. теорему 6 в п. 33.5).

ТЕОРЕМА 2. *Если функция f имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную порядка n и $x_0 \in [a, b]$, то для любого $x \in [a, b]$ имеет место равенство*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{x_0}^{t_{n-1}} f^{(n)}(t_n)\,dt_n \qquad (45.47)$$

(*формула Тейлора с остаточным членом в форме повторного интеграла*).

Доказательство. Докажем формулу (45.47) по индукции. При $n = 1$ она является формулой Ньютона—Лейбница

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t_1)\,dt_1.$$

Если при некотором $m = 1, 2, \ldots, n - 1$ имеет место формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{x_0}^{t_{m-1}} f^{(m)}(t_m)\,dt_m, \qquad (45.48)$$

то, применив формулу Ньютона—Лейбница к функции $f^{(m)}(t_m)$, т. е.

$$f^{(m)}(t_m) = f^{(m)}(x_0) + \int_{x_0}^{t_m} f^{(m+1)}(t_{m+1})\,dt_{m+1},$$

подставив получившееся выражение в интегральный член равенства (45.48) и проинтегрировав первое слагаемое, получим

$$\int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{x_0}^{t_{m-1}} \left(f^{(m)}(x_0) + \int_{x_0}^{t_m} f^{(m+1)}(t_{m+1})\,dt_{m+1}\right) dt_m =$$

$$= f^{(m)}(x_0) \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{x_0}^{t_{m-1}} dt_m +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{x_0}^{t_m} f^{(m+1)}(t_{m+1})\,dt_{m+1} = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{x_0}^{t_{m-1}} dt_m \int_{x_0}^{t_m} f^{(m+1)}(t_{m+1})\,dt_{m+1}. \qquad (45.49)$$

Из равенств (45.48) и (45.49) следует, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{x_0}^{t_{m-1}} dt_m \int_{x_0}^{t_m} f^{(m+1)}(t_{m+1})\,dt_{m+1}.$$

При $m = n - 1$ эта формула превращается в формулу (45.47). □

Покажем, что остаточный член

$$r_n(x) = \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{x_0}^{t_{n-1}} f^{(n)}(t_n)\,dt_n \qquad (45.50)$$

в формуле Тейлора (45.50) может быть преобразован к уже известной его интегральной форме с одним интегрированием.

Сначала заметим, что для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции φ имеет место формула

$$\int_a^b dy \int_a^y \varphi(x)(y-x)^k\,dx = \frac{1}{k+1}\int_a^b \varphi(x)(b-x)^{k+1}\,dx,\ k \neq -1. \qquad (45.51)$$

Она получается с помощью изменения порядка интегрирования (см. рис. 66, интегрирование производится по заштрихованному треугольнику)

$$\int_a^b dy \int_a^y \varphi(x)(y-x)^k\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx \int_x^b (y-x)^k\,dy =$$

$$= \frac{1}{k+1}\int_a^b \varphi(x)(b-x)^{k+1}\,dx.$$

Далее справедлива формула

$$\int_a^b dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{k-1}} \varphi(t_k)\,dt_k = \frac{1}{(k-1)!}\int_a^b \varphi(t)(b-t)^{k-1}\,dt,$$

$$k = 1, 2, \ldots . \qquad (45.52)$$

Эта формула также доказывается по индукции: если справедливо равенство (45.52), то, применив его к интегралу

$$\int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_k} \varphi(t_{k+1})\,dt_{k+1},$$

получим

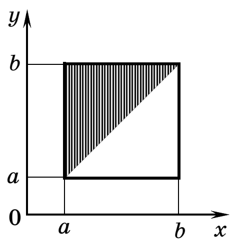


Рис. 66

$$\int_a^b dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_k} \varphi(t_{k+1})\,dt_{k+1} \underset{(45.52)}{=}$$

$$\underset{(45.52)}{=} \frac{1}{(k-1)!}\int_a^b dt_1 \int_a^{t_1} \varphi(t)(t_1-t)^{k-1}\,dt \underset{(45.51)}{=}$$

$$\underset{(45.51)}{=} \frac{1}{k!}\int_a^b \varphi(t)(b-t)^k\,dt,$$

т. е. формула (45.52) остается верной при замене k на $k+1$.

Остаточный член (45.50) формулы Тейлора, в силу формулы (45.52), при $\varphi(t) = f^{(n)}(t)$, $a = x_0$, $b = x$ и $k = n$ имеет вид

$$r_n(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt,$$

т. е. получилась запись остаточного члена в интегральной форме, полученной ранее в п. 33.5 (см. формулу (33.52)).

§ 46
Замена переменных в кратных интегралах

46.1. Линейные отображения измеримых множеств

В п. 41.5 изучались линейные однородные отображения евклидовых пространств. Рассмотрим теперь общий случай произвольных линейных, вообще говоря, неоднородных линейных отображений.

Линейное отображение $L:\ \boldsymbol{R}_x^n \to \boldsymbol{R}_y^m$ имеет вид

$$L(x) = A(x) + a, \tag{46.1}$$

где $A:\boldsymbol{R}_x^n \to \boldsymbol{R}_y^m$ — однородное линейное отображение (будем называть его соответствующим отображению L),

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \boldsymbol{R}_x^n$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \boldsymbol{R}_y^m$, $a = (a_1, \dots, a_m) \in \boldsymbol{R}^m$.

Обозначим через P параллельный перенос в m-мерном пространстве на вектор a

$$P(z) = z + a,\ z = (z_1, \dots, z_m) \in \boldsymbol{R}_y^m.$$

Тогда ясно, что

$$L = P \cdot A,$$

или, как короче,

$$L = PA, \tag{46.2}$$

т. е. линейное отображение L является композицией однородного линейного отображения A и параллельного переноса P.

Если (a_{ij}), $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, — матрица линейного однородного отображения A, то координатные функции отображения L имеют вид

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + a_i,\quad i = 1, 2, \dots, m,$$

и являются числовыми линейными функциями.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением линейных отображений евклидова пространства в евклидово пространство той же размерности, т. е. случаем $m = n$. Определитель матрицы линейного однородного отображения при некоторой системе координат будем называть и определителем самого отображения. Из линейной алгебры известно, что этот определитель не зависит от выбора в пространстве ортогональной системы координат.

ЛЕММА 1. *Если*

$$c_0 = \max_{i,\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n} |a_{ij}|, \tag{46.3}$$

то для любых точек $x, x' \in \boldsymbol{R}_x^n$, *выполняется неравенство*

$$|L(x') - L(x)| \leqslant nc_0 |x' - x|. \tag{46.4}$$

Доказательство. В п. 41.5 было доказано, что если A — линейное однородное отображение A: $\boldsymbol{R}_x^n \to \boldsymbol{R}_y^m$, то для любого вектора $x \in \boldsymbol{R}_x^n$ выполняется неравенство

$$|A\,(x)| \leqslant \|A\|\,|x|, \tag{46.5}$$

где $\|A\|$ — норма оператора A, а также было доказано, что

$$\|A\| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}, \tag{46.6}$$

где (a_{ij}) — матрица A.

Применив эти неравенства для рассматриваемого случая $m = n$, получим

$$|L(x') - L(x)| \underset{(46.2)}{=} |A(x') - A(x)| = |A(x' - x)| \underset{(46.5)}{\leqslant} \|A\|\;|x' - x| \underset{(46.6)}{\leqslant}$$

$$\underset{(46.6)}{\leqslant} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}\,|x' - x| \underset{(46.3)}{\leqslant} c_0 n\,|x' - x|.$$

Неравенство (46.4) доказано. □

ЛЕММА 2. *Если J определитель матрицы однородного линейного отображения A, то для любого измеримого множества $E \subset \boldsymbol{R}^n$ выполняется равенство*

$$\mu L(E) = |J| \mu E, \tag{46.7}$$

где $L = PA$ (см. (46.2)).

Доказательство. Из линейной алгебры известно, что всякое линейное однородное отображение A может быть представлено в виде

$$A = BC,$$

где B — неотрицательное самосопряженное линейное отображение (неотрицательность линейного отображения B означа-

ет, что det $B \geqslant 0$), а C — ортогональное отображение. Таким образом,

$$L = PA = PBC.$$

При параллельном переносе P и ортогональном отображении C мера множества не меняется (см. п. 44.1 и п. 45.4). Поэтому достаточно доказать, что для любого измеримого множества E выполняется равенство

$$\mu B(E) = |J|\, \mu\, E.$$

Из линейной алгебры известно также, что для самосопряженного неотрицательного отображения существует система координат, в которой его матрица диагональна:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{46.8}$$

Пусть Q — n-мерный куб, ребра которого параллельны осям этой координатной системы и имеют длину h. Отображение B сводится к «растяжениям» в направлениях координатных осей: с коэффициентом λ_i в направлении i-й оси, $i = 1, 2, \dots, n$. При таком растяжении объем всякого параллелепипеда с ребрами, параллельными осям координат, изменяется с коэффициентом λ_i, а в результате коэффициент изменения объема куба Q при отображении B будет равен $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$. Таким образом,

$$\mu B(Q) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \mu Q = \det\ B \mu Q.$$

Далее, из равенства $A = BC$ имеем $\det A = \det\ B \det C$. Определитель ортогонального отображения равен ± 1, а $\det B \geqslant 0$, поэтому $|J| = |\det J| = \det B$. Следовательно, окончательно

$$\mu B(Q) = |J|\, \mu\, Q. \tag{46.9}$$

Это равенство справедливо для всех кубов Q, ребра которых параллельны координатным осям, в которых матрица преобразования B имеет диагональный вид (46.8).

Пусть E — измеримое множество, $E \subset R_x^n$, а $s_k(E)$ и $S_k(E)$ — множества, состоящие из кубов ранга k в указанной системе координат и определяемые по формулам (44.3).

Из включений $s_k(E) \subset E \subset S_k(E)$ следует, что

$$B(s_k(E)) \subset B(E) \subset B(S_k(E)). \tag{46.10}$$

Отметим также включение

$$B(S_k(E)) \setminus B(s_k(E)) \subset B(S_k(E) \setminus s_k(E)).$$

Множества $s_k(E)$, $S_k(E)$ и $S_k(E)\setminus s_k$ представляют собой объединение конечного множества кубов ранга k в выбранной системе координат (часть этих кубов в множестве $S_k(E)\setminus s_k$ (E) может быть открытыми или полуоткрытыми). Поэтому множества $B(s_k(E))$, $B(S_k(E))$ и разность $B(S_k(E)) \setminus B(s_k(E))$ будут объединением конечного множества образов этих кубов при отображении B — «параллелепипедов» (замкнутых, открытых, полуоткрытых) и поэтому являются измеримыми множествами.

Мера множества $S_k(E) \setminus s_k(E)$ равна сумме мер составляющих его кубов, поэтому мера его образа $B(S_k(E) \setminus s_k(E))$ равна сумме мер образов этих кубов, а для них справедливо равенство (46.9). Следовательно,

$$\mu\,(B(S_k(E)) \setminus B(s_k(E))) \leqslant \mu B(S_k(E) \setminus s_k(E)) = |J|\,\mu\,(S_k(E) \setminus s_k(E)).$$

Поскольку, в силу измеримости множества E, имеет место равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \mu\,(S_k(E) \setminus s_k(E)) = 0$, то

$$\lim_{k\to\infty} \mu\,(B(S_k(E)) \setminus B(s_k(E))) = 0.$$

Отсюда и из включений (46.10), согласно лемме 6 п. 44.1, явствует, что множество $B(E)$ измеримо, а из того, что

$$\mu B(s_k(E)) = |J|\,\mu\, s_k(E),$$

следует, что

$$\mu B(E) = \lim_{k\to\infty} \mu B(s_k(E)) = |J| \lim_{k\to\infty} \mu s_k(E) = |J|\,\mu E.$$

Лемма доказана. □

46.2. Метрические свойства дифференцируемых отображений

Пусть G — открытое множество пространства $\boldsymbol{R}_x^n$, а F — отображение множества G в пространство $\boldsymbol{R}_y^n$:

$$y = F(x),\ \ x \in G. \tag{46.11}$$

В координатной форме отображение F записывается в виде

$$y_i = y_i(x) = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ i = 1, 2, \ldots, n,\ x \in G. \tag{46.12}$$

Введем обозначения:

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}),\ \ y^{(0)} = F(x^{(0)}) = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}),$$

$$\Delta x = x - x^{(0)} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n),\ \ |\Delta x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}.$$

Напомним, что отображение F является дифференцируемым в точке $x^{(0)} \in G$ (см. теорему 6 в п. 41.6), если его координатные функции $y_i = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируемы в этой точке и, следовательно, их можно представить в виде

$$y_i = y_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^{(0)}) + \varepsilon_i(x^{(0)}, \Delta x)\,|\Delta x|, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{46.13}$$

где

$$a_{ij} = \frac{\partial y_i(x^{(0)})}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_i(x^{(0)}, \Delta x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Обозначим через $L_{x^{(0)}}$ линейное отображение, задаваемое формулами

$$y_i = y_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^{(0)}), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Индекс $x^{(0)}$ в обозначении $L_{x^{(0)}}$ показывает, что это линейное отображение зависит от точки $x^{(0)}$.

Рассматривая элементы n-мерного пространства как векторы и тем самым их отображение как n-мерную вектор-функцию, дифференцируемое в точке $x^{(0)}$ отображение F можно записать (см. п. 41.6) в виде

$$F(x) = L_{x^{(0)}}(x) + \varepsilon|\Delta x|, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0, \tag{46.14}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(x^{(0)}, \Delta x) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x^{(0)}, \Delta x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Отсюда, используя обозначение $o(\Delta x) = \varepsilon|\Delta x|$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0$, условие (46.14) можно записать в виде

$$F(x) - L_{x^{(0)}}(x) = o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0. \tag{46.15}$$

Это означает, что для дифференцируемого в точке $x^{(0)}$ отображения F существует такое линейное отображение $L_{x^{(0)}}$, что в окрестности точки $x^{(0)}$ отображение F отличается от линейного отображения $L_{x^{(0)}}$ на бесконечно малую более высокого порядка, чем расстояние $|x - x^{(0)}| = |\Delta x|$ от точки $x^{(0)}$ до точки x при стремлении этого расстояния к нулю. В этом и состоит, как мы знаем, смысл дифференцируемости отображения в точке.

Напомним еще, что отображение (46.11) называется непрерывно дифференцируемым и на открытом множестве G, если все его координатные функции (46.12) непрерывно дифференцируемы на этом множестве (см. п. 37.2).

ЛЕММА 3. *Если отображение* (46.8) *непрерывно дифференцируемо на открытом множестве* $G \subset \boldsymbol{R}_x^n$, *то*

$$F(x) - L_{x^{(0)}}(x) = \varepsilon|\Delta x|, \quad x \in G, \tag{46.16}$$

где на любом компакте $E \subset G$ *функция* $\varepsilon = \varepsilon(x^{(0)}, \Delta x)$ *равномерно стремится к нулю при* $x - x^{(0)} = \Delta x \to 0$, $x^{(0)} \in E$.

Таким образом, новое, что привносит формула (46.16) по сравнению с формулой (46.14), состоит в том, что в формуле (46.14) точка $x^{(0)}$ была фиксирована, а в формуле (46.16) эта точка может меняться, оставаясь принадлежащей некоторому компакту E. При этом стремление к нулю функции $\varepsilon(x^{(0)}, \Delta x)$ происходит равномерно на E. Определение равномерного стремления функции к нулю на множестве было дано в п. 37.2.

Доказательство. Из непрерывной дифференцируемости координатных функций (46.12) следует, что функции $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x^{(0)}, x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в формулах (46.13) на любом компакте $E \subset G$ при $x \to x^{(0)}$ равномерно стремятся к нулю (см. теорему 4 в п. 37.2). Следовательно, на любом компакте $E \subset G$ при $x \to x^{(0)}$, $x^{(0)} \in E$, равномерно стремится к нулю и вектор-функция $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, так как $|\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2}$. □

ЛЕММА 4. *При непрерывно дифференцируемом отображении открытого множества компакт меры нуль, лежащий в этом множестве, отображается в компакт меры нуль.*

Доказательство. Непрерывно дифференцируемое отображение является, очевидно, и непрерывным, а известно, что непрерывным образом компакта есть снова компакт (см. теорему 2 в п. 36.7). Оценим верхнюю меру образа компакта.

Предварительно заметим, что всякое ограниченное множество $E \subset \boldsymbol{R}^n$ содержится в некотором n-мерном кубе Q_E с ребром длины $h = 2 \operatorname{diam} E$ (см. п. 36.8). В силу включения $E \subset Q_E$, имеет место неравенство

$$\mu^* E \leqslant \mu Q_E = (2 \operatorname{diam} E)^n. \tag{46.17}$$

Пусть теперь G — открытое множество в $\boldsymbol{R}_x^n$, E — компакт, $E \subset G$. Тогда его расстояние до непересекающегося с ним замкнутого множества $\boldsymbol{R}^n \backslash G$ положительно (см. лемму 7 в п. 35.2):

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \rho(E, \boldsymbol{R}^n \backslash G) > 0.$$

Выберем номер k_0 так, чтобы диаметр куба ранга k_0 (см. п. 44.1) был меньше δ. Тогда всякий куб ранга k_0, пересекающийся с компактом E, будет содержаться в множестве G. Многогранник $S_{k_0}(E)$, состоящий из всех таких кубов (см. (44.3)), также является компактом. В самом деле, компакт E есть ограниченное множество, поэтому множество $S_{k_0}(E)$ представляет собой объединение конечного множества кубов ранга k_0, каждый из которых, очевидно, является компактом. Пусть $y = F(x)$ непрерывно дифференцируемое отображение множества G в $\boldsymbol{R}_y^n$. Положим

$$c = \max_{\substack{x \in S_{k_0}(E) \\ i,\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n}} \left|\frac{\partial y_i(x)}{\partial x_j}\right|. \qquad (46.18)$$

Пусть $x \in S_{k_0}(E)$, $x' \in S_{k_0}(E)$, и отрезок с концами в точках x и x' содержится в многограннике $S_{k_0}(E)$, $F(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x))$, $F(x') = (y_1(x'), y_2(x'), \ldots, y_n(x'))$, $\Delta x_i = x_i' - x_i$, $i = 1, 2, \ldots n$. Тогда, применив формулу конечных приращений Лагранжа для функций многих переменных (см. теорему 3 в п. 39.2) и неравенство Коши—Шварца, будем иметь

$$|F(x') - F(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i(x') - y_i(x))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i(x + \theta_i \Delta x)}{\partial x_j}\Delta x_j\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial y_i(x + \theta_i \Delta x)}{\partial x_j}\right)^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \Delta x_j^2\right)} \underset{(44.18)}{\leqslant} c\sqrt{\sum_{i=1}^{n} n\left(\sum_{j=1}^{n} \Delta x_j^2\right)} \leqslant$$

$$\leqslant nc\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \Delta x_j^2} = nc|x' - x|. \qquad (46.19)$$

Отсюда следует, что для любого выпуклого множества $A \subset S_{k_0}(E)$ (определение выпуклого множества см. в п. 35.2) выполняется неравенство $\operatorname{diam} F(A) \leqslant cn \operatorname{diam} A$. Действительно,

$$\operatorname{diam} F(A) = \sup_{x,\, x' \in A} |F(x') - F(x)| \underset{(46.19)}{\leqslant}$$

$$\underset{(46.19)}{\leqslant} cn \sup_{x,\, x' \in A} |x' - x| = cn \operatorname{diam} A.$$

Если множество A является n-мерным кубом Q_h с ребром длины h, $Q_h \subset S_{k_0}(E)$, то, заметив, что $\operatorname{diam} Q_h = h\sqrt{n}$ и что $\mu Q_h = h^n$, имеем

$$\operatorname{diam} F(Q_h) \leqslant cn \operatorname{diam} Q_h = cn^{3/2}h,$$

поэтому

$$\mu^*F(Q_h) \underset{(46.17)}{\leqslant} (2\,\mathrm{diam}\,F(Q_h))^n \leqslant$$

$$\leqslant 2^n c^n n^{3n/2} h^n = 2^n c^n n^{3n/2} \mu Q_h. \qquad (46.20)$$

Заметим, что для любого ранга $k \geqslant k_0$ справедливо включение $S_k(E) \subset S_{k_0}(E)$. Пусть

$$S_k(E) = \bigcup_{j=1}^{j_k} Q_j^{(k)}, \qquad (46.21)$$

где Q_j^k — кубы ранга k, $j = 1, 2, \ldots, j_k$. Нам понадобится еще равенство (см. п. 1.2*)

$$F\left(\bigcup_{j=1}^{j_k} Q_j^{(k)}\right) = \bigcup_{j=1}^{j_k} F(Q_j^{(k)}). \qquad (46.22)$$

Из включения $E \subset S_k(E)$ следует включение $F(E) \subset \subset F(S_k(E))$, следовательно,

$$\mu^*F(E) \leqslant \mu^*F(S_k(E)) \underset{(46.21)}{=} \mu^*F\left(\bigcup_{j=1}^{j_k} Q_j^{(k)}\right) \underset{(46.22)}{=}$$

$$\underset{(46.22)}{=} \mu^* \bigcup_{j=1}^{j_k} F(Q_j^{(k)}) \underset{(44.10)}{\leqslant} \sum_{j=1}^{j_k} \mu^*F(Q_j^{(k)}) \underset{(46.20)}{\leqslant}$$

$$\underset{(46.20)}{\leqslant} 2^n c^n n^{\frac{3}{2}n} \sum_{j=1}^{j_k} \mu Q_j^{(k)} = 2^n c^n n^{3n/2} \mu S_k(E). \qquad (46.23)$$

Если мера компакта E равна нулю, то $\lim\limits_{k\to 0} \mu S_k(E) = 0$, откуда, в силу неравенства (46.23), следует, что $\mu^*F(E) = 0$, поэтому и $\mu F(E) = 0$. □

Обозначим якобиан непрерывно дифференцируемого отображения (46.11) через J_F:

$$J_F = J_F(x) = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \qquad (46.24)$$

ЛЕММА 5. *Если F — непрерывно дифференцируемое отображение с якобианом, не обращающимся в нуль, открытого множества $G \subset \boldsymbol{R}_x^n$ в пространство $\boldsymbol{R}_y^n$, E — компакт, $E \subset G$, Q_h — n-мерный куб с ребром длины h, $Q_h \subset G$, $x^{(0)} \in E \cap Q_h$, то имеет место неравенство*

$$\mu^*F(Q_h) \leqslant |J_F(x^{(0)})|\, \mu Q_h + \alpha(h) h^n, \quad \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0. \qquad (46.25)$$

Подчеркнем, что в этом неравенстве бесконечно малая $\alpha = \alpha(h)$ не зависит ни от выбора точки $x^{(0)} \in E$, ни от выбора конкретных кубов Q_h, а зависит только от длин их ребер h (и, конечно, от компакта E). В этом случае говорят, что на компакте E имеет место равномерная оценка (46.25).

Заметив, что $\mu Q_h = h^n$, эту оценку можно записать в виде

$$\mu^* F(Q_h) \leqslant |J_F(x^{(0)}| \, \mu Q_h + o(\mu Q_h), \;\; h \to 0. \tag{46.26}$$

Доказательство. Для линейного отображения $L_{x^{(0)}}$ (см. (46.13)), как и для всякого линейного отображения, абсолютная величина определителя матрицы (a_{ij}), согласно лемме 2, равна коэффициенту изменения объемов тел при этом отображении. Для отображения $L_{x^{(0)}}$ указанный определитель совпадает с якобианом $J_F(x^{(0)})$ отображения F в точке $x^{(0)}$, и, таким образом,

$$\mu L_{x^{(0)}}(Q_h) \underset{(46.7)}{=} |J_F(x^{(0)}| \mu Q_h. \tag{46.27}$$

Используя связь (46.15) между отображениями F и $L_{x^{(0)}}$, докажем неравенство (46.25). Пусть E — компакт, $E \subset G$. Тогда $\delta = \rho(E, \boldsymbol{R}^n \setminus G) > 0$. В дальнейшем всегда будем предполагать, что $\operatorname{diam} Q_h = h\sqrt{n} < \delta$. В этом случае всякий куб Q_h, пересекающийся с компактом E, будет содержаться в множестве G: $Q_h \subset G$.

Согласно лемме 3 (см. (46.16)),

$$|F(x) - L_{x^{(0)}}(x)| = |\varepsilon(x^{(0)}, \Delta x| \, |\Delta x|,$$

где функция $\varepsilon(x^{(0)}, \Delta x)$ равномерно на компакте E стремится к нулю при $x - x^{(0)} = \Delta x \to 0$, $x^{(0)} \in E$. Поэтому если

$$\varepsilon(\Delta x) = \sup_{x^{(0)} \in E} |\, \varepsilon(x^{(0)}, \Delta x|,$$

то

$$\lim_{\Delta x \to 0} |\varepsilon(\Delta x)| = 0 \tag{46.28}$$

и справедливо неравенство

$$|F(x) - L_{x^{(0)}}(x)| \leqslant \varepsilon(\Delta x)|\Delta x|, \quad x^{(0)} \in E, \quad x = x^{(0)} + \Delta x \in G. \tag{46.29}$$

Если точки $x^{(0)}$ и x принадлежат одному и тому же кубу Q_h, то

$$|\Delta x| = |x - x^{(0)}| \leqslant h\sqrt{n}, \quad x^{(0)} \in Q_h, \; x \in Q_h.$$

Поэтому, в силу неравенства (46.29), имеем

$$|F(x) - L_{x^{(0)}}(x)| \leqslant \varepsilon(\Delta x) h\sqrt{n}.$$

Положим

$$\alpha_0 = \alpha_0(h) = \sqrt{n} \sup_{|\Delta x| \leqslant h} \varepsilon(\Delta x); \qquad (46.30)$$

тогда

$$|F(x) - (L_{x^{(0)}}(x)| \leqslant \alpha_0 h, \quad x^{(0)} \in E \cap Q_h, \quad x = x^{(0)} + \Delta x \in Q_h, \qquad (46.31)$$

где

$$\lim_{h \to 0} \alpha_0(h) \underset{\substack{(46.28)\\(46.30)}}{=} 0. \qquad (46.32)$$

При линейном отображении $L_{x(0)}$ образом $P = L_{x^{(0)}}(Q_h)$ куба Q_h является невырожденный параллелепипед (якобиан $J_F(x^{(0)}) \neq 0$). Пусть $U_{\alpha_0 h} = U(P; \alpha_0 h)$ является $\alpha_0 h$-окрестностью параллелепипеда P (определение окрестности множества см. в п. 35.2, определение 23). Ясно, что

$$F(Q_h) \subset U_{\alpha_0 h}. \qquad (46.33)$$

Пусть $P_{\alpha_0 h}$ — n-мерный параллелепипед, $(n - 1)$-мерные грани которого параллельны соответствующим $(n - 1)$-мерным граням параллелепипеда P и находятся от них на расстоянии $\alpha_0 h$, причем параллелепипед P содержится внутри параллелепипеда $P_{\alpha_0 h}$ (рис. 67). Тогда $U_{\alpha_0 h} \subset P_{\alpha_0 h}$ и, следовательно,

$$F(Q_h) \subset P_{\alpha_0 h}. \qquad (46.34)$$

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — длины ребер параллелепипеда $P = L_{x^{(0)}}(Q_h)$. Оценим длины $a_i + \Delta a_i$ ребер параллелепипеда $P_{\alpha_0 h}$, параллельных соответственно ребрам длин a_i параллелепипеда P, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть H_i — расстояние между двумя параллельными $(n - 1)$-мерными гранями параллелепипеда P, содержащими ребра длин $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$. Тогда расстояние между двумя параллельными $(n - 1)$-мерными гранями параллелепипеда $P_{\alpha_0 h}$, содержащими ребра длин $a_1 + \Delta a_1, \ldots, a_{i-1} + \Delta a_{i-1}, a_{i+1} + \Delta a_{i+1}, \ldots, a_n + \Delta a_n$, в силу определения этого параллелепипеда, равно $H_i + 2\alpha_0 h$. Ина-

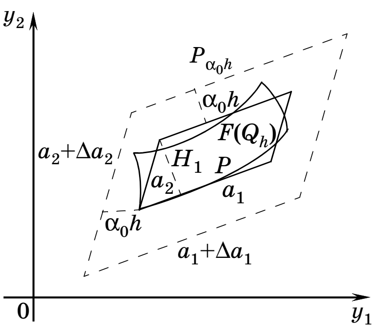


Рис. 67

че говоря, H_i и $H_i + 2\alpha_0 h$ являются длинами высот соответственно параллелепипедов P и $P_{\alpha_0 h}$.

Обозначим φ_i, $0 \leqslant \varphi_i \leqslant \pi/2$, угол, образованный ребром длины a_i параллелепипеда P с $(n-1)$-мерной гиперплоскостью, содержащей его ребра длин $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ (этот угол, очевидно, равен углу, образованному ребром длины $a_i + \Delta a_i$ параллелепипеда $P_{\alpha_0 h}$ с соответствующей $(n-1)$-мерной гиперплоскостью), т. е. угол между рассматриваемым ребром и его проекцией на указанную гиперплоскость.

Длины ребер и высот параллелепипеда P и $P_{\alpha_0 h}$ связаны с углами φ соотношениями $a_i = \dfrac{H_i}{\sin\varphi_i}$, $a_i + \Delta a_i = \dfrac{H_i + 2\alpha_0 h}{\sin\varphi_i}$. Поэтому

$$\Delta a_i = \frac{H_i + 2\alpha_0 h}{\sin\varphi_i} - \frac{H_i}{\sin\varphi_i} = \frac{2\alpha_0 h}{\sin\varphi_i}.$$

Элементы матрицы $\left(\dfrac{\partial y_i(x_0)}{\partial x_j}\right)$, соответствующей линейному отображению $L_{x^{(0)}}$ являются непрерывными функциями на открытом множестве G, а углы φ_i непрерывно зависят от этих элементов и, следовательно, также являются непрерывными функциями точки $x^{(0)}$ на G: $\varphi_i = \varphi_i(x^{(0)})$. В силу невырожденности отображений $L_{x^{(0)}}$, $x^{(0)} \in G$, т. е. не обращения в нуль на G их якобианов, для всех точек $x^{(0)} \in G$ имеем $\varphi_i(x^{(0)}) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому наименьшие значения непрерывных на компакте E функций φ_i также положительны:

$$\min_{x \in E} \varphi_i(x) = c_i, \ \ 0 < c_i \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $c_0 = \max\left\{\dfrac{1}{\sin c_1}, \ldots, \dfrac{1}{\sin c_n}\right\}$. Тогда

$$\Delta a_i \leqslant 2c_0\alpha_0 h.$$

Разность замкнутого параллелепипеда $P_{\alpha_0 h}$ и открытого P_{int} («рамка», окаймляющая параллелепипед P) является объединением параллелепипедов $P_{i,1}$ и $P_{i,2}$ с ребрами длин $a_1 + \Delta a_1, \ldots, a_{i-1} + \Delta a_{i-1}, \ a_{i+1} + \Delta a_{i+1}, \ldots, a_n + \Delta a_n$ и высотами длины $\alpha_0 h$. Поэтому

$$P_{\alpha_0 h} \subset P \cup \bigcup_{i=1}^{n} P_{i,1} \cup \bigcup_{i=1}^{n} P_{i,2}. \tag{46.35}$$

Ребра длины a_i параллелепипеда P получаются при отображении $L_{x^{(0)}}$ из ребер куба Q_h, имеющих длину h. Следовательно, в силу леммы 1, имеет место неравенство

$$a_i \leqslant cnh, \quad c = \max_{\substack{i,\, j = 1,\, 2,\, \dots,\, n \\ x \in X}} \left| \frac{\partial y_i(x)}{\partial x_j} \right| < +\infty.$$

Заметив, что объем любого n-мерного параллелепипеда не превосходит объема прямоугольного праллелепипеда с ребрами той же длины, т. е. произведения длин его ребер, имеющих общую вершину, имеем

$$\mu P_{i,j} \leqslant (a_1 + \Delta a_1) \dots (a_{i-1} + \Delta a_{i-1})(a_{i+1} + \Delta a_{i+1}) \dots (a_n + \Delta a_n)\alpha_0 h \leqslant$$
$$\leqslant (cnh + 2c_0\alpha_0 h)^{n-1}\alpha_0 h = (cn + 2c_0\alpha_0)^{n-1}\,\alpha_0 h^n =$$
$$= (cn + 2c_0\alpha_0)^{n-1}\alpha_0 \mu Q_h, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2. \qquad (46.36)$$

Выше было отмечено, что, согласно лемме 2, имеет место равенство

$$\mu P = \mu L_{x^{(0)}}(Q_h) = |J_F(x^{(0)})|\,\mu Q_h. \qquad (46.37)$$

Оценим теперь верхнюю меру множества $F(Q_h)$:

$$\mu^* F(Q_h) \underset{(46.34)}{\leqslant} \mu P_{\alpha_0 h} \underset{(46.35)}{\leqslant} \mu P_{\alpha_0 h} + \sum_{i=0}^{n} \mu P_{i,1} + \sum_{i=0}^{n} \mu P_{i,2} \underset{\substack{(46.36) \\ (46.37)}}{\leqslant}$$
$$\underset{\substack{(46.36) \\ (46.37)}}{\leqslant} |J_F(x^{(0)})|\,\mu Q_h + 2n(cn + 2c_0\alpha_0(h))^{n-1}\alpha_0(h)\,\mu Q_h. \qquad (46.38)$$

Положив

$$\alpha(h) = 2n\,(cn + 2c_0\alpha_0(h))^{n-1}\,\alpha_0(h),$$

окончательно получим

$$\mu^* F(Q_h) \underset{(46.38)}{\leqslant} |J_F(x^{(0)})|\,\mu Q_h + \alpha(h)\,\mu Q_h, \quad \lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0. \ \square$$

В левой части полученного неравенства стоит верхняя мера образа $F(Q_h)$ куба Q_h при отображении F, а не его мера, так как осталось невыясненным, измеримо ли множество $F(Q_h)$ при сделанных выше предположениях. Для дальнейшего нам понадобится лишь случай взаимно-однозначных непрерывно дифференцируемых отображений, якобиан которых не обращается в нуль. Поэтому ограничимся доказательством измеримости образа измеримого множества лишь в этом случае.

Если отображение F непрерывно дифференцируемо и его якобиан не обращается в нуль на открытом множестве G про-

странства $\boldsymbol{R}_x^n$, то образ $F(G)$ этого множества также является открытым множеством и у точек $x \in G$ и $F(x) \in F(G)$ существуют сколь угодно малые окрестности, взаимно-однозначно отображающиеся друг на друга (см. п. 41.8). Если, кроме того, отображение F взаимно-однозначно отображает все открытое множество G на его образ $F(G)$, то для любого множества $E \subset G$ его внутренность E_{int} отображается на внутренность $F(E)_{\text{int}}$ его образа:

$$F(E_{\text{int}}) = F(E)_{\text{int}}, \tag{46.39}$$

а если границы ∂E и $\partial F(E)$ множеств E и $F(E)$ содержатся соответственно в множествах G и $F(G)$, то они также отображаются друг на друга:

$$F(\partial E) = \partial F(E). \tag{46.40}$$

В этом случае имеет место также равенство

$$F(\overline{E}) = \overline{F(E)}. \tag{46.41}$$

В самом деле,

$$\overline{E} = E_{\text{int}} \cup \partial E, \quad \overline{F(E)} = F(E)_{\text{int}} \cup \partial F(E),$$

поэтому

$$F(\overline{E}) = F(E_{\text{int}} \cup \partial E) = F(E_{\text{int}}) \cup F(\partial F) = F(E)_{\text{int}} \cup \partial F(E) = \overline{F(E)}.$$

ЛЕММА 6. *Если отображение F открытого множества $G \subset \boldsymbol{R}_x^n$ в пространство $\boldsymbol{R}_y^n$ непрерывно дифференцируемо, взаимно-однозначно и его якобиан не обращается в нуль на G, то образ всякого измеримого множества, лежащего вместе со своим замыканием в G, также является измеримым множеством.*

Доказательство. Пусть E — измеримое множество и его замыкание $\overline{E}$ лежит в G:

$$E \subset \overline{E} \subset G. \tag{46.42}$$

Замыкание $\overline{E}$ множества E, как замыкание каждого измеримого множества, является компактом (см. замечание 3 в п. 44.1), а отображение F непрерывно, поэтому образ $F(\overline{E})$ множества $\overline{E}$ при этом отображении также является компактом и, следовательно, ограниченным множеством. Но поскольку $F(E) \subset F(\overline{E})$, множество $F(E)$ также ограничено.

Граница ∂E измеримого множества имеет меру нуль и является компактом (см. замечание 2 в п. 44.1). Поэтому и образ этой границы является компактом меры нуль (см. лемму 4):

$$\mu F(\partial E) = 0. \tag{46.43}$$

Поскольку при отображении F граница образа множества является образом его границы (см. (46.40)), граница $\partial F(E)$ образа $F(E)$ множества E имеет меру нуль:

$$\mu\partial F(E) \underset{(46.40)}{=} \mu F(\partial E) \underset{(46.43)}{=} 0.$$

Таким образом, $F(E)$ является ограниченным множеством с границей меры нуль и поэтому измеримо. □

Так как n-мерный замкнутый куб является измеримым множеством, в случае, когда этот куб лежит в открытом множестве G, его образ при непрерывно дифференцируемом, взаимно-однозначном отображении F с якобианом, не равным нулю на G, является измеримым множеством. Поэтому для таких отображений в неравенстве (46.26) (см. лемму 5) в его левой части верхнюю меру можно заменить на просто меру, т. е. в этом случае справедливо неравенство

$$\mu F(Q_h) \leqslant |J_F F(x^{(0)})| \mu Q_h + \alpha(h)\mu Q_h, \tag{46.44}$$

где

$$\lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0. \tag{46.45}$$

46.3. Формула замены переменных в кратном интеграле

Пусть F — непрерывно дифференцируемое взаимно-однозначное отображение открытого множества $G \subset \boldsymbol{R}_x^n$ в пространство $\boldsymbol{R}_y^n$ и его якобиан J_F не обращается в нуль на множестве G.

ТЕОРЕМА 1. *Если E — измеримое множество, содержащееся вместе со своим замыканием $\overline{E}$ в открытом множестве G: $E \subset \overline{E} \subset G$, а функция f непрерывна на множестве $\overline{F(E)}$, то*

$$\int\limits_{\overline{F(E)}} f(y)dy = \int\limits_{\overline{E}} f(F(x))\,|J_F(x)|dx. \tag{46.46}$$

Эта формула равносильна формуле

$$\int\limits_{F(E)} f(y)dy = \int\limits_{E} f(F(x))\,|J_F(x)|dx. \tag{46.47}$$

Действительно, ограниченная функция одновременно интегрируема или нет как на измеримом множестве, так и на его замыкании, причем в случае интегрируемости интегралы от функции по множеству и по его замыканию совпадают (см.

конец п. 44.3). В нашем случае функции $f(y)$ и $f(F(x))|J_F(x)|$ непрерывны соответственно на компактах $\overline{F(E)}$ и $\overline{E}$ (являющихся замыканием измеримых множеств $F(E)$ и E), следовательно, ограничены и интегрируемы на них. Таким образом, все входящие в формулы (46.46) и (46.47) интегралы существуют, а сами эти формулы равносильны. Эти формулы называются *формулами замены переменных в кратном интеграле.*

Доказательство. Докажем формулу (46.46). Прежде всего заметим, что ее достаточно доказать лишь при дополнительном предположении неотрицательности функции f на множестве $\overline{F(E)}$:

$$f(y) \geqslant 0, \quad y \in \overline{f(E)}. \tag{46.48}$$

В самом деле, функция f, как это уже отмечалось выше, ограничена на компакте $\overline{F(E)}$. Поэтому существует такая постоянная $c > 0$, что $f(y) > -c, \quad y \in \overline{F(E)}$.

Если теорема 1 справедлива для двух неотрицательных функций $f_1(y) = f(y) + c$ и $f_2(y) = c$, то она, в силу свойства линейности интеграла, справедлива и для функции

$$f(y) = f_1(y) - f_2(y).$$

Обозначим через $E_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \ldots, j_k$, всевозможные непустые пересечения замыкания $\overline{E}$ множества E с кубами ранга k. Таким образом, для каждого $j = 1, 2, \ldots, j_k$ существует такой куб ранга k, обозначим его $Q_j^{(k)}$, что

$$E_j^{(k)} = \overline{E} \cap Q_j^{(k)} \neq \varnothing. \tag{46.49}$$

Системы множеств

$$\tau_k = \{E_j^{(k)}\}_{j=1}^{j=j_k} \tag{46.50}$$

образуют разбиения компакта $\overline{E}$, мелкости которых стремятся к нулю:

$$\lim_{k \to \infty} |\tau_k| = 0 \tag{46.51}$$

(см. лемму 7 в п. 44.3). Отсюда следует, что системы множеств

$$F(\tau_k) \overset{\text{def}}{=} \{F(E_j^{(k)})\}_{j=1}^{j=j_k}$$

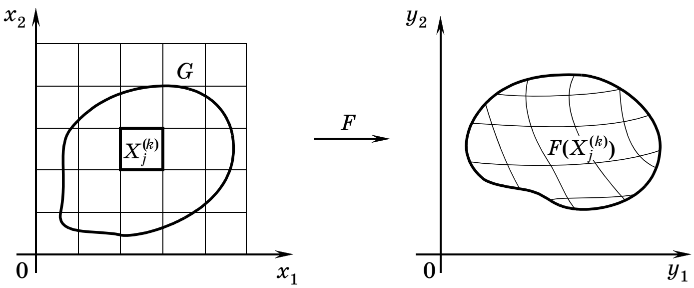


Рис. 68

образуют разбиения замыкания $\overline{F(E)}$ множества $F(E)$ (рис. 68), мелкости которых также стремятся к нулю.

Действительно, элементы $E_j^{(k)}$ разбиения τ_k являются измеримыми компактами как пересечения двух измеримых компактов $\overline{E}$ и $Q_j^{(k)}$, лежащих в открытом множестве G:

$$E_j^{(k)} = \overline{E} \cap Q_j^{(k)} \subset G,$$

поэтому, согласно лемме 6, их образы $F(E_j^{(k)})$ являются измеримыми множествами. Из $\overline{E} = \bigcup\limits_{j=1}^{j_k} E_j^{(k)}$ следует, что

$$\overline{F(E)} \underset{(46.41)}{=} F(\overline{E}) = F\left(\bigcup_{j=1}^{j_k} E_j^{(k)}\right) = \bigcup_{j=1}^{j_k} F(E_j^{(k)}).$$

Наконец, в силу взаимной однозначности отображения F пересечение образов множеств при этом отображении равно образу их пересечения, поэтому

$$F(E_i^{(k)}) \cap F(E_j^{(k)}) = F(E_i^{(k)} \cap E_j^{(k)}). \qquad (46.52)$$

Пересечения $E_i^{(k)} \cap E_j^{(k)}$, $i \neq j$, имеют меру нуль и являются компактами как пересечения двух компактов $E_i^{(k)} \in \tau_k$ и $E_j^{(k)} \in \tau_k$. Следовательно, образы этих пересечений в свою очередь оказываются множествами меры нуль, поэтому и меры пересечений $F(E_i^{(k)}) \cap F(E_j^{(k)})$ равны нулю:

$$\mu(F(E_i^{(k)}) \cap F(E_j^{(k)})) \underset{(46.52)}{=} \mu F(E_i^{(k)} \cap E_j^{(k)}) = 0, \quad i \neq j.$$

Из выполнения условия (46.51) следует, что

$$\lim_{k \to \infty} |F(\tau_k)| = 0. \qquad (46.53)$$

Действительно, отображение F компакта $\overline{E}$, будучи непрерывным, является и равномерно непрерывным (см. теорему 6 в

п. 36.8), и поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех множеств $A \subset \overline{E}$, $\operatorname{diam} A < \delta$, выполняется неравенство

$$\operatorname{diam} F(A) < \varepsilon. \tag{46.54}$$

Выбрав такой ранг k_0, что $10^{-k_0 n} < \delta$, получим, что для всех номеров $k > k_0$ имеет место неравенство

$$|F(\tau_k)| = \max_{j = 1, 2, \ldots, j_k} \operatorname{diam} F(E_j^{(k)}) < \varepsilon,$$

из которого непосредственно следует выполнение условия (46.53).

Измеримый компакт $\overline{E}$ лежит в открытом множестве G. Его граница $\partial\overline{E}$ является компактом меры нуль, и ее образ $F(\partial\overline{E})$ при отображении F является границей образа $F(\overline{E}) = \overline{F(E)}$ компакта E (см. (46.41)), следовательно, согласно лемме 4, также имеет меру нуль $\mu\partial\overline{F(E)} = 0$.

Рассмотрим теперь неполные интегральные суммы (см. п. 44.3) вида $\sigma_{F_{(\tau_k)}(\partial\overline{F(E)})}$ для интеграла $\int\limits_{\overline{F(E)}} f(y)dy$ и оценим их с помощью неполных интегральных сумм $\sigma_{\tau_{(k)}(\partial\overline{E})}$ для интеграла $\int\limits_{\overline{E}} f(F(x))\,|J_F(x)|\,dx$.

Отберем те из множеств $F(E_j^{(k)})$, которые не пересекаются с границей $\partial\overline{F(E)}$ множества $\overline{F(E)}$. В силу свойств отображения F (см., в частности, (46.40)), это равносильно выбору тех множеств $E_j^{(k)}$, которые не пересекаются с границей $\partial\overline{E}$ множества $\overline{E}$. Для таких множеств $E_j^{(k)}$ имеем

$$E_j^{(k)} = \overline{E} \cap Q_j^{(k)} = Q_j^{(k)} \subset \overline{E}, \tag{46.55}$$

т. е. множество $E_j^{(k)}$ является в этом случае кубом ранга k.

Действительно, в силу условия (46.49), в кубе Q_j имеется точка компакта $\overline{E}$. Если бы этот куб не содержался в $\overline{E}$, то в нем нашлась бы точка, не принадлежащая $\overline{E}$, поэтому и точка x, принадлежащая его границе: $x \in \partial\overline{E} \subset \overline{E}$ (см. лемму 9 в п. 35.2). Таким образом, $x \in \overline{E} \cap Q_j^{(k)} = E_j^{(k)}$ и $x \in \partial\overline{E}$, что противоречит выбору множества $E_j^{(k)}$.

Выберем теперь произвольным образом по точке $\eta^{(j,\,k)}$ в каждом из отобранных множеств $F(E_j^{(k)})$ разбиения $F(\tau_k)$. В силу включения $\eta^{(j,\,k)} \in F(E_j^{(k)})$, существуют такие точки $\xi^{(j,\,k)}$, что

$$F(\xi^{(j,\,k)}) = \eta^{(j,\,k)}. \tag{46.56}$$

Неполная интегральная сумма $\sigma_{F(\tau_k)(\partial\overline{F(E)})}$ для интеграла $\int\limits_{\overline{F(E)}} f(y)dy$ при выбранных точках $\eta^{(j,\,k)}$ имеет вид

$$\sigma_{F(\tau_k)(\partial\overline{F(E)})} = \sum_{F(E_j^{(k)})\cap\partial\overline{F(E)}=\varnothing} f(\eta^{(j,\,k)})\,\mu F(E_j^{(k)}) \underset{(46.55)}{=}$$

$$\underset{(46.55)}{=} \sum_{Q_j^{(k)}\subset\overline{E}} f(\eta^{(j,\,k)})\,\mu F(Q_j^{(k)}). \tag{46.57}$$

Соответствующая этой интегральной сумме неполная интегральная сумма $\sigma_{\tau_k(\partial\overline{X})}$ для интеграла $\int\limits_{\overline{E}} f\,(F(x))\,|J_F\,(x)|\,dx$ при выборе (46.56) точек $\xi^{(j,\,k)}$ записывается следующим образом:

$$\sigma_{\tau_k(\partial\overline{E})} = \sum_{Q_j^{(k)}\subset\overline{E}} f(F(\xi^{(j,\,k)}))\,|J_F\,(\xi^{(j,\,k)})\,|\mu Q_j^{(k)}. \tag{46.58}$$

Заметив, что функция f, будучи непрерывной на компакте $\overline{f(E)}$, ограничена на нем:

$$|f(y)| \leqslant c < +\infty, \quad y \in \overline{F(E)},$$

оценим сумму (46.57) с помощью неравенства (46.44):

$$\sigma_{F(\tau_k)(\partial\overline{F(E)})} \leqslant \sum_{Q_j^{(k)}\subset\overline{E}} f(F(\xi^{(j,\,k)}))|J_F)\xi^{(j,\,k)})|\mu Q_j^{(k)} +$$

$$+ c\alpha\left(\frac{1}{10^k}\right)\sum_{Q_j^{(k)}\subset\overline{E}} \mu Q_j^{(k)} \leqslant \sigma_{\tau_k(\partial\overline{E})} + c\alpha\left(\frac{1}{10^k}\right)\mu\overline{E}. \tag{46.59}$$

Первое слагаемое в правой части неравенства является неполной интегральной суммой (46.58), а второе, в силу выполнения условия (46.45), стремится к нулю при $k \to \infty$ $\left(\text{здесь } h = \frac{1}{10^k}\right)$:

$$\lim_{k\to\infty} c\alpha\left(\frac{1}{10^k}\right)\mu\overline{E} = 0.$$

Мелкости разбиений τ_k и $F(\tau_k)$ стремятся к нулю при $k \to \infty$, поэтому, согласно теореме 5 п. 44.3, рассматриваемые непол-

ные интегральные суммы стремятся при $k \to \infty$ к соответствующим интегралам

$$\lim_{k \to \infty} \sigma_{F(\tau_k)(\partial \overline{F(E)})} = \int\limits_{\overline{F(E)}} f(y)dy,$$

$$\lim_{k \to \infty} \sigma_{\tau_k(\partial \overline{E})} = \int\limits_{\overline{E}} f(F(x))|J_F(x)|dx.$$

Перейдя к пределу при $k \to \infty$ в неравенстве (46.59), получим неравенство

$$\int\limits_{\overline{F(E)}} f(y)dy \leqslant \int\limits_{\overline{E}} f(F(x))|J_F(x)|dx. \qquad (46.60)$$

Теперь заметим, что отображение F^{-1}, обратное данному отображению F, также непрерывно дифференцируемо, взаимно-однозначно, а его якобиан $J_F{}^{-1}(y)$ не обращается в нуль на открытом множестве $F(G)$, и для него имеет место формула (см. п. 41.6 и 41.7):

$$J_{F^{-1}}(y) = \frac{1}{J_F(x)}, \quad y = f(x). \qquad (46.61)$$

Для отображений F и F^{-1} имеет место равенство

$$F(F^{-1}(y)) = y, \quad y \in F(G), \qquad (46.62)$$

так как отображение FF^{-1} является тождественным отображением множества $F(G)$ на себя.

Применим к интегралу, стоящему в правой части неравенства (46.60), само это неравенство для отображения F^{-1}. Это можно сделать, так как для обратного отображения F^{-1} выполняются все условия леммы 6. Заметив, что $\overline{E} = \overline{F^{-1}(F(E))}$, получим

$$\int\limits_{\overline{E}} f(F(x))|J_F(x)|dx = \int\limits_{\overline{F^{-1}(F(E))}} f(F(x))|J_F(x)|dx \underset{\substack{(46.60)\\ x = F^{-1}(y)}}{\leqslant}$$

$$\underset{\substack{(46.60)\\ x = F^{-1}(y)}}{\leqslant} \int\limits_{\overline{F(E)}} f(F(F^{-1}(y)))|J_F(F^{-1}(y)||J_{F^{-1}}(y)|dy \underset{\substack{(46.61)\\ (46.62)}}{=} \int\limits_{\overline{F(E)}} f(y)dy. \qquad (46.63)$$

Из неравенств (46.60) и (46.63) следует формула (46.46). □

ТЕОРЕМА 2. *Если отображение $F : G \to R^n_y$ открытого измеримого множества $G \subset R^n_x$ на открытое измеримое множество $G \subset R^n_y$ взаимно-однозначно, непрерывно дифференцируемо, его якобиан не обращается в нуль на G, если отображение F*

и его якобиан непрерывно продолжаемы на замыкание $\tilde{G}$ *множества* G, *а функция* f *непрерывна на множестве* $\tilde{G}$ *и непрерывно продолжаема на его замыкание* $\overline{\tilde{G}}$, *то*

$$\int\limits_{\tilde{G}} f(y)\,dy = \int\limits_{G} f\,(F(x))\,|J(x)dx, \quad \tilde{G} = F(G). \tag{46.64}$$

Таким образом, в условиях теоремы непрерывное продолжение отображения F может и не быть взаимно-однозначным на границе ∂G области интегрирования G, а непрерывное продолжение якобиана может на этой границе обращаться в нуль.

Доказательство. Замыкание $\overline{\tilde{G}}$ измеримого множества $\tilde{G}$ является измеримым компактом, на который по условию теоремы непрерывно продолжаема функция f, поэтому это продолжение интегрируемо на компакте $\overline{\tilde{G}}$, следовательно, сама функция f интегрируема на открытом множестве $\tilde{G}$. В силу же непрерывной продолжаемости отображения F и его якобиана на замыкание $\overline{G}$ множества $\tilde{G}$, рассуждая аналогичным образом, получим, что функция $f(F(x))\,|J_F(x)|$ интегрируема на открытом множестве G. Таким образом, интегралы, стоящие как в левой, так и в правой части равенства (46.64), в условиях теоремы существуют.

Множество G — открыто и измеримо, поэтому существует последовательность таких измеримых открытых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, что (см. замечание 3 в п. 44.6)

$$G_k \subset G_{k+1},\ k = 1, 2, \ldots; \tag{46.65}$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G, \tag{46.66}$$

причем $G_k \subset \overline{G}_k \subset G$, $k = 1, 2, \ldots$.

Ясно, что замыкание $\overline{G}_k$ множества G_k является компактом. Применив теорему 1 к множествам G_k, получим

$$\int\limits_{F(G_k)} f\,(y)\,dy = \int\limits_{\overline{G}_k} f(F(x))|J_F(x)|\,dx,\ k = 1, 2, \ldots . \tag{46.67}$$

Теперь заметим, что множества $F(G_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, также открыты и для них, в силу условий (46.65) и (46.66), выполняются условия

$$F(G_k) \subset F(G_{k+1}), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} F(G_k) = F(G) = \tilde{G}. \tag{46.68}$$

Из (46.65) и (46.66), согласно полной аддитивности интеграла по открытым множествам (см. свойство 10^0 в п. 44.6), следует, что

$$\lim_{k \to \infty} \int_{G_k} f(F(x)) \left|J_F(x)\right| dx = \int_G f(F(x)) \left|J_F(x)\right| dx.$$

Аналогично из (46.68) имеем

$$\lim_{k \to \infty} \int_{F(G_k)} f(y)\, dy = \int_{F(G)} f(y)\, dy.$$

Поэтому, перейдя к пределу при $k \to \infty$ в равенстве (44.67), получим формулу (46.64). □

Замена переменных в кратном интеграле часто существенно упрощает его исследование и вычисление. При этом в отличие от однократного интеграла нередко целью замены переменного является не упрощение подынтегральной функции, а переход к более простой области интегрирования даже ценой некоторого усложнения подынтегральной функции.

В качестве примера применения формулы замены переменных в кратном интеграле рассмотрим для двумерного интеграла случай перехода от декартовых координат к полярным.

Рассмотрим плоскость, на которой декартовы координаты обозначены r, φ и на ней открытый прямоугольник

$$G = \{(r, \varphi) : 0 < r < R,\ 0 < \varphi < 2\pi\}.$$

При отображении

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < r < R, \qquad (46.69)$$

прямоугольник G отображается на множество $\tilde{G}$ плоскости с декартовыми координатами x, y, которое представляет собой круг $x^2 + y^2 < R^2$, из которого удален радиус $0 \leqslant x < R$, $y = 0$ (рис. 69).

Отображение (46.69) и его якобиан

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

непрерывно продолжаемы на замкнутый прямоугольник

$$\overline{G} = \{(r, \varphi) : 0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\},$$

образом которого при продолженном отображении является замкнутый круг $\overline{\tilde{G}}$, на котором отображение (46.69) уже не является взаимно-однозначным: взаимная однозначность нарушается на границе прямоуголь-

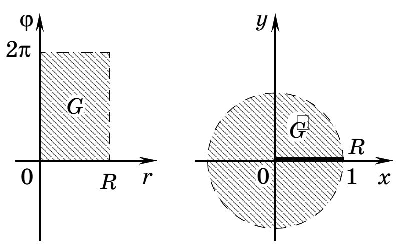


Рис. 69

ника G — отрезки $0 \leqslant x \leqslant R$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ отображаются в один и тот же отрезок $0 \leqslant x \leqslant R$, $y = 0$, а отрезок $r = 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и вовсе отображается в точку $(0, 0)$. Якобиан продолженного отображения обращается в нуль при $r = 0$.

Согласно теореме 2, для отображения (46.69) и непрерывной на круге $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ функции $f(x, y)$ имеет место формула

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant R}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Приведем конкретный пример вычисления интеграла по этой формуле:

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \cos\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1}} r\cos\pi r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\cos\pi r\,dr = 2\pi\left[\frac{r\sin\pi r}{\pi}\Big|_0^1 - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \sin\pi r\,dr\right] = -\frac{4}{\pi}.$$

46.4. Геометрический смысл абсолютной величины якобиана отображения

Пусть F — непрерывное дифференцируемое взаимно-однозначное отображение открытого множества $G \subset R_x^n$ на открытое множество $\tilde{G} \subset R_y^n : F(G) = \tilde{G}$. Пусть якобиан J_F отображения F не обращается в нуль на G и пусть как отображение F, так и его якобиан, непрерывно продолжаемы на замыкание $\overline{G}$ множества G. Как и раньше, будем эти продолжения обозначать соответственно F и J_F, называя продолженную функцию J_F по-прежнему *якобианом отображения* F.

Пусть D — измеримая область, т. е. измеримое линейно связное открытое множество, содержащееся в замыкании $\overline{G}$ открытого множества G:

$$D \subset \overline{G}.$$

Таким образом, в некоторых точках области D якобиан отображения может обращаться в нуль. Это может происходить в тех точках, которые принадлежат границе открытого множества G. Примером такой точки является точка $(0,0)$ для проколотого круга $G = \{(x_1, x_2)\colon x_1^2 + x_2^2 < 1\} \setminus \{(0,0)\}$ и круга $D = \left\{(x_1, x_2)\colon x_1^2 + x_2^2 < \frac{1}{2}\right\}$.

Пусть образ $F(D)$ области D является измеримым множеством. Будучи непрерывным образом области, множество $F(D)$

также является областью (см. п. 36.9). Для его меры имеет место формула (см. свойство 1^0 кратного интеграла в п. 44.6)

$$\mu F(D) = \int\limits_{F(D)} dy.$$

Применив к интегралу в правой части этого равенства формулу замены переменного в кратном интеграле (здесь $f(y) \equiv 1$), получим $\mu\, F(D) = \int\limits_{D} |J_F(x)|\, dx$.

По теореме о среднем (см. п. 44.6) имеем $\int\limits_{D} |J_F(x)| dx = |J_F(\xi)| \mu D$, $\xi \in D$. Таким образом,

$$\frac{\mu F(D)}{\mu D} = |J_F(\xi)|, \quad \xi \in D. \tag{46.70}$$

Если $\{D\}$ — семейство указанных областей, содержащее области сколь угодно малого диаметра, и если существует точка $x^{(0)}$, принадлежащая всем областям этого семейства, то

$$\lim_{\operatorname{diam} D \to 0} \frac{\mu F(D)}{\mu D} = |J_F(x^{(0)}|, \quad x^{(0)} \in D. \tag{46.71}$$

Действительно, из неравенства $|\xi - x^{(0)}| \leqslant \operatorname{diam} D$, $x^{(0)} \in D$, $\xi \in D$, следует, что $\lim\limits_{\operatorname{diam} D \to 0} \xi = x^{(0)}$. Отсюда, в силу непрерывности якобиана J_F отображения F, имеем

$$\lim_{\operatorname{diam} D \to 0} J_F(\xi) = J_F(x^{(0)}).$$

Поэтому, перейдя к пределу в равенстве (46.70), получим формулу (46.71), которая и выражает геометрический смысл абсолютной величины якобиана отображения. Короче говорят, что абсолютная величина якобиана отображения в данной точке равна коэффициенту изменения меры множества в этой точке.

46.5. Криволинейные координаты

Взаимно-однозначное отображение

$$y = F(x) = \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 = y_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = y_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \tag{46.72}$$

множества $G \subset \boldsymbol{R}_x^n$ в пространство $\boldsymbol{R}_y^n$ ставит в соответствие каждой точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ набор n чисел $y_1, y_2, \dots, y_n$. Эти числа можно рассматривать как другие координаты той же точки x. Эти координаты называются, обычно, *криволинейными координатами*, так как кривые, получающиеся из уравнений $y_i = y_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, при фиксиро-

вании всех аргументов, кроме одного (эти кривые называются *координатными линиями*), не являются, вообще говоря, прямыми, как в случае декартовых координат.

Таким образом, формулы (46.72) можно рассматривать не только как формулы, задающие отображение множества из одного пространства в другое, в каждом из которых заданы декартовы координаты, соответственно $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$, но и как переход от координат $x_1, x_2, \dots, x_n$ к новым координатам $y_1, y_2, \dots, y_n$ той же точки в том же самом пространстве.

В этом случае в формуле замены переменных в кратном интеграле (46.64), т. е. при такой интерпретации соотношений (46.72), в обеих частях равенства следует писать одну и ту же область интегрирования

$$\int_G f(x, y)dy = \int_G f(F(x))|J_F(x)|dx,$$

так как интегрирование производится по одному и тому же множеству, описываемому разными способами.

Обратный переход от $y_1, y_2, \dots, y_n$ к $x_1, x_2, \dots, x_n$ осуществляется при помощи обратного отображения

$$x = F^{-1}(y) = \begin{cases} x_1 = x_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ x_2 = x_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = x_n(y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \tag{46.73}$$

Рассмотрим для наглядности более подробно двумерный случай. Пусть задано взаимно-однозначное отображение

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \tag{46.74}$$

открытого множества G плоскости $\boldsymbol{R}^2_{x,\, y}$ в плоскость $\boldsymbol{R}^2_{u,v}$. Будем рассматривать пару (u, v) как новые координаты точки (x, y). Уравнения координатных линий в этом случае имеют вид

$$x = x(u, v_0), \quad y = y(u, v_0), \quad v_0 \text{ — const}$$

и

$$x = x(u_0, v), \quad y = y(u_0, v), \quad u_0 \text{ — const},$$

т. е. представляют собой параметрически заданные плоские кривые.

Будем предполагать, что отображение (46.74) удовлетворяет всем условиям, при которых была доказана формула замены переменных в кратных интегралах (см. теорему 2 в п. 46.3 при $n = 2$) и что отображение

$$x = x\,(u, v), \quad y = y\,(u, v) \tag{46.75}$$

является отображением, обратным к отображению (46.74).

Исследуем, какой смысл будет иметь в этом случае модуль якобиана. Зафиксируем какие-либо значения u_0, Δu, v_0, Δv. Пусть $M_0 = (u_0, v_0)$, D — множество всех точек, криволинейные координаты u, v которых удовлетворяют неравенствам $u_0 < u < u_0 + \Delta u$, $v_0 < v < v_0 + \Delta v$, и пусть: $\overline{D} \subset G$. Множество D называется *координатным* (*криволинейным*) *параллелограммом*. Множество D открыто (почему?), и его граница представляет собой кусочно-гладкий контур (он состоит из кривых вида $x = x(u_0, v)$, $y = y(u_0, v)$, где $v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + \Delta v$ и т. п.), поэтому D квадрируемая область. Вычислим ее площадь (рис. 70). Применив формулу замены переменного в интеграле и интегральную теорему о среднем (см. п. 44.6), получим

$$\mu D = \iint\limits_D dx\,dy = \iint\limits_{\substack{u_0 < u < u_0 + \Delta u \\ v_0 < v < v_0 + \Delta v}} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv =$$

$$= \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M \int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta v} du \int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v} dv = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M \Delta u \Delta v, \quad M \in D.$$

В силу непрерывной дифференцируемости функций (46.75), $\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0} + \varepsilon$, где $\lim\limits_{\Delta u^2 + \Delta v^2 \to 0} \varepsilon = 0$. Таким образом,

$$\mu D = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0} \Delta u \Delta v + \varepsilon \Delta u \Delta v.$$

Эта формула показывает, что модуль якобиана в точке (u_0, v_0) представляет собой коэффициент у произведения $\Delta u \Delta v$ главной части площади координатного параллелограмма с вершиной в точке (u_0, v_0) при $\Delta u^2 + \Delta v^2 \to 0$. Это замечание часто используется на практике при вычислении якобиана преобразования криволинейных координат в декартовы. Покажем это на примере полярных координат r, φ. Зафиксируем какие-либо значения r, $r + \Delta r$, φ и $\varphi + \Delta\varphi$ и рассмотрим координатный параллелограмм D (рис. 71), образованный координатными линия-

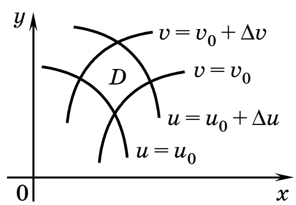


Рис. 70

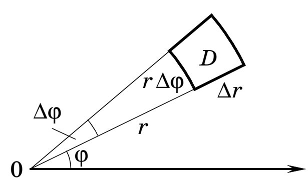


Рис. 71

ми r, $r + \Delta r$, φ и $\varphi + \Delta\varphi$. Длины двух его сторон равны соответственно Δr и $r\Delta\varphi$. Вычислив площадь этого параллелограмма так, как если бы он был обыкновенным прямоугольником, будем иметь $\mu D \approx r\Delta r\Delta\varphi$.

Итак, коэффициент у произведения $\Delta r\Delta\varphi$ оказался равным r, откуда естественно ожидать, что $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = r$. В действительности (см. пример в п. 46.4) так и есть. Это произошло потому, что при наших неточных вычислениях площади D допущена ошибка более высокого порядка малости, чем произведение $\Delta r\Delta\varphi$ при $\Delta r^2 + \Delta\varphi^2 \to 0$. В самом деле, вычислив μD как разность площадей двух секторов, получим

$$\mu D = \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2\,\Delta\varphi - \frac{1}{2}r^2\Delta\varphi = r\Delta r\,\Delta\varphi + \frac{1}{2}\Delta r^2\Delta\varphi.$$

УПРАЖНЕНИЯ. Написать формулу замены переменной для следующих преобразований координат.

1. $x = r\cos\psi\cos\varphi$, $y = r\cos\psi\sin\varphi$, $z = r\sin\psi$; $0 \leqslant r < +\infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ (сферические координаты).

2. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$; $0 \leqslant r < +\infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$ (цилиндрические координаты).

§ 47
Криволинейные интегралы

47.1. Криволинейные интегралы первого рода

Пусть в трехмерном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ задана кривая

$$\Gamma = \{r(t)\ a \leqslant t \leqslant b\}$$

(см. § 16). Мы будем рассматривать однозначные функции F, определенные на точках $r(t)$ этой кривой: $F = F(r(t))$. Если $\rho(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$ — какое-либо другое представление той же кривой Γ и $t = t(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$ — отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$, осуществляющее эквивалентность этих представлений (т. е. $t = t(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$ — допустимое преобразование параметра, см. п. 16.1), то, поскольку значение функции F определяется лишь точкой кривой, будем иметь

$$F(\rho(\tau)) = F(r(t)), \quad t = t\,(\tau), \quad \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta.$$

Рассматриваемые функции F принимают, вообще говоря, различные значения в точках кривой, соответствующих различным значениям параметра, но совпадающих как точки

пространства (см. кратные точки в п. 16.2). Такая точка зрения соответствует физической интерпретации кривой Γ, например, как траектории движения материальной точки, а функции F — как некоторой силы, действующей на нее и зависящей не только от положения точки в пространстве, но и от момента, в котором эта точка находится в данном месте. Кроме того, такой подход дает и определенные математические преимущества, которые будут видны в дальнейшем.

Из сказанного следует, что указанные функции, заданные на кривой, нельзя рассматривать как функции, определенные на некотором множестве пространства $\boldsymbol{R}^3$, и поэтому, строго говоря, их нельзя обозначать через $F(x, y, z)$, где x, y, z — декартовы координаты пространственных точек. Однако в рассматриваемых ниже вопросах такое обозначение является традиционным, поэтому мы будем его употреблять. Если всегда помнить, что в этих вопросах речь идет о функциях, определенных на точках кривых, то его использование не приведет к недоразумениям.

Пусть теперь задана спрямляемая ориентированная кривая Γ, причем $r(s) = \{x(s), y(s), z(s), 0 \leqslant s \leqslant S\}$ — ее представление, где в качестве параметра взята переменная длина дуги s, и пусть $A = r(0)$ и $B = r(S)$ — начальная и конечная точки этой кривой.

В этом случае будем писать $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$. Противоположно ориентированную кривую обозначим $\overset{\frown}{BA}$.

Определение 1. *Пусть на точках $r(s)$ кривой Γ задана некоторая функция F. Тогда интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)ds$ определяется по формуле*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)ds = \int\limits_0^S F(x(s), y(s), z(s))ds \qquad (47.1)$$

и называется криволинейным интегралом первого рода от функции F по кривой $\overset{\frown}{AB}$.

Этот интеграл обозначается также символами

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(r(s))ds \text{ и } \int\limits_{\Gamma} F(r(s))ds, \text{ или, короче, } \int\limits_{\Gamma} F ds.$$

Таким образом, хотя определение криволинейного интеграла первого рода и связано с понятием кривой, т. е. с геометрическим образом, оно сводится к обычному интегралу по отрезку, и поэтому на криволинейный интеграл переносятся все свойства обычного интеграла.

Отметим некоторые специфические свойства интеграла (47.1).

1^0. $\int\limits_{\widehat{AB}} ds = S$.

Это свойство очевидно.

2^0. *Если функция F непрерывна в точках кривой Γ как функция параметра s, т. е. если непрерывная функция $F\ (r(s))$, $0 \leqslant s \leqslant S$, то интеграл $\int\limits_{\Gamma} Fds$ существует.*

В самом деле, согласно определению (47.1), интеграл $\int\limits_{\Gamma} Fds$ сводится к интегралу $\int\limits_0^S F((x(s),\ y(s),\ z(s))ds$, от непрерывной функции по отрезку, а этот интеграл, как известно, существует.

3^0. *Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой*:

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)ds = \int\limits_{\widehat{BA}} F(x, y, z)ds.$$

Действительно, пусть $M = r(s)$ — точка кривой $\widehat{AB}$ и s — длина дуги $\widehat{AM}$. Если $\sigma = S - s$, то σ равняется длине дуги $\widehat{BM}$ (рис. 72). Функция $r = r\ (S - \sigma)$, $0 \leqslant \sigma \leqslant S$, является представлением кривой $\widehat{BA}$, поэтому, выполнив в интеграле (47.1) замену переменного $s = S - \sigma$ и заметив, что $ds = -d\sigma$, получим

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)ds = \int\limits_0^S F(x(s), y(s), z(s))ds =$$

$$= -\int\limits_S^0 F(x(S - \sigma), y(S - \sigma), z(S - \sigma))d\sigma =$$

$$= \int\limits_0^S F(x(S - \sigma), y(S - \sigma), z(S - \sigma))d\sigma = \int\limits_{\widehat{BA}} F(x, y, z)d\sigma.$$

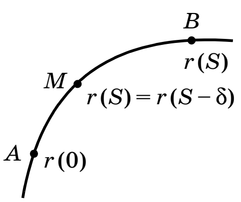


Рис. 72

Это свойство криволинейного интеграла первого рода связано с тем, что, согласно определению, длина дуги кривой считается положительной независимо от конца, от которого она отсчитывается.

Прежде чем перейти к следующему свойству, заметим, что $\int\limits_{\Gamma} Fds$, как и всякий интеграл, является пределом соответству-

ющих интегральных сумм; специфика этого случая состоит лишь в том, что эти суммы можно описать в геометрических терминах, связанных с кривой Γ, по которой ведется интегрирование. Сформулируем это более точно.

4^0. *Пусть* $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ *— разбиение отрезка* $[0, S]$, $\xi_i \in [s_{i-1}, s_i]$, $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ *— длина дуги кривой* Γ *от точки* $r(s_{i-1})$ *до точки* $r(s_i)$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$ *и* $\sigma_\tau = \sum\limits_{i=1}^{i_\tau} F(r(\xi_i))\Delta s$. *Тогда если функция* $F(r(s))$ *интегрируема по Риману на отрезке* $[0, S]$, *то*

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau = \int_\Gamma F ds. \qquad (47.2)$$

Действительно, σ_τ, очевидно, является интегральной суммой Римана интеграла $\int_0^S F(r(s))ds$, и поэтому формула (47.2) непосредственно следует из (47.1). Формула (47.1) очень удобна для изучения свойства интеграла $\int_\Gamma F ds$, однако она далеко не всегда удобна для его вычисления, так как нередко бывает очень сложно или даже практически невозможно найти представление данной кривой, где за параметр взята переменная длина дуги. Укажем поэтому формулу для интеграла $\int_\Gamma F ds$ при любом параметрическом представлении кривой Γ.

5^0. *Пусть* Γ *— гладкая кривая* (см. определение 16 в п. 16.4), $r(t) = \{\varphi(t), \psi(t), \chi(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ *— ее непрерывно дифференцируемое представление, и, следовательно,*

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t) > 0, \quad a \leqslant t \leqslant b^{*}).$$

Пусть функция F *непрерывна на кривой* Γ (*в том смысле, что функция* $F[r(t)]$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$). *Тогда*

$$\int_\Gamma F(x, y, z)ds = \int_a^b F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\,dt. \quad (47.3)$$

В самом деле, при сделанных предположениях кривая Γ спрямляема, и переменную длину дуги $s = s(t)$ можно принять за параметр (см. следствие 2 из теоремы 2 в п. 16.5), и поэтому интеграл $\int_\Gamma F ds$ имеет смысл. Выполнив замену пере-

---

* Напомним, что это условие означает отсутствие особых точек на кривой (см. определение 15 в п. 16.4).

менного $s = s(t)$ в правой части равенства (47.1) и вспомнив, что (см. п. 16.5)

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2},$$

получим формулу (47.3).

Из (47.3) следует, что для данной кривой значение интеграла, стоящего в правой части равенства (47.3), не зависит от выбора параметра на кривой, так как при любом выборе параметра этот интеграл равен интегралу, стоящему в левой части этого равенства.

47.2. Криволинейные интегралы второго рода

Ряд математических и прикладных задач приводит к криволинейным интегралам другого типа. Например, если $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ является радиусом-вектором движущейся материальной точки, а $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(t)$ — сила, действующая на эту точку, то естественно определить работу силы $\boldsymbol{F}$ вдоль траектории Г рассматриваемой точки как интеграл $\int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r}$ или, если $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$, а $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$, в координатной записи как интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz. \tag{47.4}$$

Вспоминая, что (см. п. 16.5)

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma, \tag{47.5}$$

где $\boldsymbol{t} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичный касательный вектор, интеграл (47.4) можно представить формально в виде

$$\int\limits_{\Gamma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds.$$

Сформулируем теперь строгое определение интегралов вида (47.4). Пусть $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$ — гладкая ориентированная кривая, т. е. непрерывно дифференцируемая ориентированная кривая без особых точек. Тогда существует такое ее непрерывно дифференцируемое представление

$$r(t) = \{x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t),\ a \leqslant t \leqslant b\},\ A = r(a),\ B = r(b),$$

что

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t) > 0, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Пусть $s = s(t)$ — переменная длина дуги, $0 \leqslant s \leqslant S$, S — длина всей кривой Г, отсчитываемой от точки A, $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичный касательный вектор к кривой, $\alpha = \alpha(s)$, $\beta = \beta(s)$, $\gamma = \gamma(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S$, и пусть функция F,

как и в п.47.1, определена на множестве $\{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ всех точек кривой Г.

Определение 2. *Интеграл* $\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)dx$ *определяется по формуле*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\, dx = \int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z) \cos\alpha\, ds. \tag{47.6}$$

Аналогично, по определению полагается

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\, dy = \int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z) \cos\beta\, ds, \tag{47.7}$$

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\, dz = \int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z) \cos\gamma\, ds.$$

Интегралы вида (47.6) *и* (47.7) *называются криволинейными интегралами второго рода от функции F по кривой $\widehat{AB}$.*

Естественность этих определений видна из формул (47.5). Как в случае интеграла (47.1), так и в случаях интегралов (47.6), (47.7) говорят, что функция F интегрируется по кривой $\widehat{AB}$.

Отметим некоторые свойства криволинейных интегралов второго рода, ограничиваясь для краткости только случаем интеграла (47.6).

1^0. *Если функция F непрерывна на кривой* Г, *т. е. непрерывна функция $F(r(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, то интеграл* (47.6) *существует.*

Действительно, при сделанных относительно кривой Г предположениях функция $t = t(s)$ (t — параметр на кривой Г, s — переменная длина дуги), непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, S]$, поэтому функция $\cos\alpha = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}$ непрерывна на этом отрезке и, следовательно, функция $F(r(t(s)))\cos\alpha(s)$ непрерывна на [0, S] и, в силу криволинейных интегралов первого рода, интеграл (47.6) существует. □

В дальнейшем в этом пункте для простоты будем предполагать, что функция F непрерывна на кривой Г. В этом случае все приведенные ниже интегралы заведомо существуют.

2^0. *Криволинейный интеграл второго рода меняет знак при изменении ориентации кривой, т. е.*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\ dx = -\int\limits_{\widehat{BA}} F(x, y, z)\ dx.$$

(Само собой разумеется, что в случае, когда рассматриваемый интеграл равен нулю, никакого изменения знака не проис-

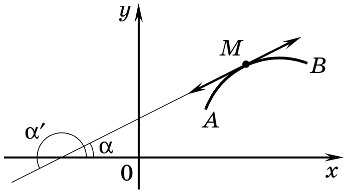


Рис. 73

ходит, так как его просто нет. Однако написанное равенство остается верным.)

В самом деле, если α — угол, образованный положительным направлением касательной к кривой $\overset{\frown}{AB}$ с осью Ox, а α' — угол, образованный положительным направлением касательной к кривой $\overset{\frown}{BA}$ с осью Ox, то для соответствующих точек имеем $\alpha' = \alpha + \pi$ (рис. 73) и, следовательно, $\cos\alpha' = -\cos\alpha$.

Использовав теперь свойство независимости криволинейного интеграла первого рода от ориентации кривой (см. п. 47.1), получим

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)dx = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)\cos\alpha' ds = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)\cos\alpha\, ds =$$
$$= -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\cos\alpha ds = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)dx.$$

Таким образом, это свойство криволинейного интеграла второго рода вытекает из того факта, что криволинейные интегралы

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)dx$$

равны соответствующим криволинейным интегралам первого рода, подынтегральные выражения которых отличаются только знаком. □

3^0. *Если F — непрерывная на кривой $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$ функция, то для интеграла* (47.6) *справедлива формула*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)dx = \int\limits_a^b F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (47.8)$$

Действительно, согласно определению (47.6),

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)dx = \int\limits_0^S F(x(s), y(s), z(s))\cos\alpha(s)ds.$$

Выполнив в интеграле, стоящем в правой части этого равенства, замену переменного $s = s(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, и замечая, что (см. (47.5)) $\cos\alpha = \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{x'_t}{s'_t}$, получим

$$\int\limits_0^S F(x(s), y(s))\cos\alpha(s)\, ds = \int\limits_a^b F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\frac{x'_t}{s'_t}\, s'_t dt =$$
$$= \int\limits_a^b F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'_t(t)\, dt. \ \square$$

Отметим, что мы доказали также, что интеграл, стоящий в правой части этой формулы, не зависит от выбора параметра на кривой, сохраняющего ее ориентацию.

В частном случае, когда за параметр t можно взять переменную x, т. е. когда кривая Γ обладает представлением $y = y(x)$, $z = z(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и, следовательно, не имеет кратных точек, функция F является однозначной функцией не только точек кривой, но и соответствующих точек пространства (в этом случае разным точкам кривой соответствуют разные точки пространства, и наоборот). Формула (47.8) принимает в этом случае вид

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\,dx = \int\limits_a^b F(x, y(x), z(x))\,dx. \qquad (47.9)$$

Если на гладкой кривой

$$\widehat{AB} = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\},\ r(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)),$$

заданы непрерывные функции $P(r(t))$, $Q(r(t))$, $R(r(t))$, то для интегралов $\int\limits_{\widehat{AB}} Qdy$ и $\int\limits_{\widehat{AB}} Rdz$ имеют место формулы, аналогичные формулам (47.8), и поэтому

$$\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int\limits_a^b [P(r(t))\varphi'(t) + Q(r(t))\psi'(t) + R(r(t))\chi'(t)]dt. \qquad (47.10)$$

Если вектор с координатами P, Q, R, определенными на кривой $\Gamma = \widehat{AB}$, обозначить через $\boldsymbol{a}$, а вектор с координатами dx, dy, dz — через $d\boldsymbol{r}$, то $\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = Pdx + Qdy + Rdz$ и для интеграла (47.10) получится запись $\int \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$, т. е.

$$\int \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \int Pdx + Qdy + Rdz.$$

Левая часть этого равенства называется векторной записью криволинейного интеграла второго рода, а правая — его координатной записью.

4^0. *Интеграл* $\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)dx$ *является пределом соответствующих интегральных сумм, описываемых в терминах, связанных с кривой* Γ, *точнее: пусть* $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ — *разбиение отрезка* $[a, b]$, $|\tau|$ — *его мелкость*, $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$ *и*

$$\tilde{\sigma}_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} F(r(\xi_i))\Delta x_i, \qquad (47.11)$$

где $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$; *тогда*

$$\lim_{|\tau| \to 0} \tilde{\sigma}_\tau = \int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)dx. \qquad (47.12)$$

Сумма $\tilde{\sigma}_\tau$ *называется интегральной суммой криволинейного интеграла второго рода* (47.6).

В самом деле, по формуле конечных приращений Лагранжа, $\Delta x_i = \varphi'(\eta_i)\Delta t_i$, где $\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $j = 1, 2, \ldots, i_\tau$, поэтому

$$\tilde{\sigma}_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} F(r(\xi_i))\varphi'(\eta_i)\Delta t_i.$$

Положим

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} F(r(\xi_i))\varphi'(\xi_i)\Delta t_i.$$

Сумма σ_τ является интегральной суммой Римана для функции $F(r(t))\varphi'(t)$, поэтому

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau = \int_a^b F(r(t))\varphi'(t)dt. \quad (47.13)$$

С другой стороны,

$$|\tilde{\sigma}_\tau - \sigma_\tau| \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} |F(r(\xi_i))|\,|\varphi'(\eta_i) - \varphi'(\xi_i)|\Delta t_i \leqslant$$
$$\leqslant \omega(\delta_\tau; \varphi')(b-a) \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |F(r(t))|,$$

где $\omega(\delta_\tau; \varphi')$ — модуль непрерывности функции φ'. Так как из непрерывности функции $F(r(t))$ на отрезке $[a, b]$ следует, что $\sup |F(r(t))| < \infty$, а из непрерывности функции φ' на том же отрезке следует, что $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \omega(\delta_\tau; \varphi') = 0$, то $\lim\limits_{|\tau| \to 0} |\sigma_\tau - \sigma_\tau| = 0$. Поэтому, в силу (47.13), получим

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau = \int_a^b F(r(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Отсюда, согласно равенству (47.8), следует формула (47.12). □

Мы рассмотрели только те свойства криволинейных интегралов, которые связаны со спецификой их определения, с кривой, по которой производится интегрирование. Естественно, что так как рассматриваемые интегралы сводятся к обычным интегралам по отрезку, то нетрудно показать, что для них справедливы свойства линейности, аддитивности по дугам, по которым происходит интегрирование, возможность интегрирования неравенств и т. п.

47.3. Расширение класса допустимых преобразований параметра кривой

Непрерывно дифференцируемая ориентированная кривая без особых точек определялась (см. п. 16.2—16.4) как кривая, имеющая непрерывно дифференцируемые векторные пред-

ставления $\boldsymbol{r}\ (t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, такие, что $\boldsymbol{r}'\ (t) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$. В качестве допустимых преобразований параметра при этом рассматривались функции $t = t(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, $t(\alpha) = a$, $t(\beta) = b$, которые были непрерывно дифференцируемыми и имели положительную производную на отрезке $[a, b]$. Это требование, однако, часто оказывается слишком обременительным. Например, для дуги Г единичной окружности с центром в начале координат представления $y = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, и $x = \sin t$, $y = \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, оказываются неэквивалентными в этом смысле. Да и само представление $y = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, не определяет в нашем смысле непрерывно дифференцируемую кривую, поскольку у него при $x = 1$ производная не существует. Поэтому естественно расширить класс допустимых преобразований параметров и допустимых представлений непрерывно дифференцируемых кривых. Это можно сделать следующим образом.

Рассмотрим совокупность векторных представлений $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и непрерывно дифференцируемых на интервале (a, b). *Допустимым преобразованием параметра* будем называть всякую функцию $t = t(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, $t(\alpha) = a$, $t(\beta) = b$, непрерывную на отрезке $[\alpha, \beta]$, непрерывно дифференцируемую и имеющую положительную производную на интервале (α, β). Как всегда, два представления называются *эквивалентными*, если можно перейти от одного к другому с помощью допустимого преобразования параметра.

Определение 3. *Класс эквивалентных представлений указанного типа задает непрерывно дифференцируемую кривую, если в этом классе существует по крайней мере одно представление* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, *непрерывно дифференцируемое на всем отрезке* $[a, b]$.

Определение 4. *Непрерывно дифференцируемая кривая называется кривой без особых точек, или, короче, гладкой кривой, если при некотором ее представлении* $\boldsymbol{r}\ (t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, *выполняется условие* $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$, $a \leqslant t \leqslant b$.

В смысле этого определения для указанных выше представлений дуги окружности оказываются эквивалентны и задают гладкую кривую.

Гладкие в смысле определения 4 кривые спрямляемы, так как имеют непрерывно дифференцируемое на отрезке представление. В качестве одного из параметров на такой кривой может быть выбрана длина дуги.

Остаются в силе и все данные выше определения криволинейных интегралов и их свойства. Нужно только иметь в виду, что при некоторых представлениях кривых в формуле (47.10) могут получаться несобственные интегралы, так как производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$, стоящие под знаком интеграла, не являются, вообще говоря, непрерывными вплоть до концов промежутков интегрирования.

Следует подчеркнуть, что расширение класса представлений кривой позволяет вычислять криволинейный интеграл при более разнообразных представлениях кривой. Например, интеграл $\int\limits_\Gamma P(x, y)dy$, где Γ — рассматриваемая выше дуга единичной окружности, а P — непрерывная на кривой Γ функция, можно вычислить, используя оба указанных представления:

$$\int\limits_\Gamma P(x, y)dy = -\int\limits_0^1 P(x, \sqrt{1 - x^2})\frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\int\limits_\Gamma P(x, y)dy = -\int\limits_0^{\pi/2} P(\sin t, \cos t)\sin t\,dt.$$

В первом случае может получиться несобственный интеграл.

Вместе с тем *при доказательстве* теорем можно выбирать «хорошие представления», т. е. непрерывно дифференцируемые вплоть до концов отрезка, а проведенные рассмотрения окажутся справедливыми и для расширенного понятия кривой.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Доказать, что при новом определении непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{x(t), y(t), z(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ ее длина выражается формулой $\int\limits_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt$, где написанный интеграл, вообще говоря, несобственный.

47.4. Криволинейные интегралы по кусочно-гладким кривым

Определение 5. *Если кривая Γ — кусочно-гладкая, т. е. представима в виде объединения конечного числа гладких кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$, а функция $F(x, y, z)$ по-прежнему определена на точках кривой Γ, то, по определению, положим*

$$\int\limits_\Gamma F(x, y, z)\,dx = \sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\Gamma_i} F(x, y, z)\,dx.$$

Подчеркнем, что здесь гладкость кривых понимается в обобщенном смысле, т. е. в смысле определения 4.

Если Γ — кусочно-гладкая кривая, а $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — ее кусочно-гладкое представление, то также будем иметь

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z)dx = \int_{a}^{b} F((x(t), y(t), z(t))x'(t)\, dt$$

(здесь производная $x'(t)$ может быть не определена в конечном числе точек отрезка $[a, b]$ и интеграл, стоящий в правой части равенства, следует понимать, вообще говоря, в несобственном смысле).

Аналогичные определения имеют место и для интегралов вида (47.7). В дальнейшем придется иметь дело с суммами интегралов вида (47.6) и (47.7), т. е. с интегралами вида (47.4), где P, Q и R — некоторые функции, определенные на точках кривой Γ. Согласно определениям (47.6) и (47.7), для кусочно-гладких кривых Γ также справедлива формула

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\Gamma} P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\, ds.$$

З а м е ч а н и е 1. Если Γ — конечная совокупность кусочно-гладких ориентированных кривых Γ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, то, по определению,

$$\int_{\Gamma} F\, ds = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_i} F\, ds, \quad \int_{\Gamma} F\, dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_i} F\, dx \text{ и т. д.}$$

З а м е ч а н и е 2. Мы дали определение криволинейных интегралов для кривых, лежащих в трехмерном пространстве $\boldsymbol{R}^3$. Аналогично они определяются и для кривых, лежащих в любом n-мерном пространстве $\boldsymbol{R}^n$, $n = 2, 3, 4, \ldots$. Криволинейные интегралы в n-мерном пространстве обладают свойствами, аналогичными рассмотренным выше в трехмерном случае, причем доказательства их также совершенно аналогичны приведенным выше. Поэтому не будем останавливаться ни на формулировках, ни на доказательствах соответствующих утверждений.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Доказать, что данные в настоящем пункте определения криволинейных интегралов по кусочно-гладким кривым не зависят от способа разбиения этих кривых на гладкие дуги.

47.5. Интеграл Стилтьеса

Более общее понятие криволинейного интеграла второго рода, независимое от понятия криволинейного интеграла первого рода, можно получить с помощью предела интегральных сумм $\tilde{\sigma}_\tau$

(см. (47.11)), т. е. принять за определение равенство (47.12). При этом нет необходимости делать предположения о какой-либо гладкости кривой, по которой ведется интегрирование.

Такой подход к понятию криволинейного интеграла второго рода приводит естественным образом к обобщению интеграла Римана, которое называется *интегралом Стилтьеса*. Сформулируем его определение и опишем кратко его свойства. Отметим, что интеграл Стилтьеса находит свое применение не только в теории криволинейных интегралов, но, например, и в теории вероятностей.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на отрезке $[a, b]$, $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ — разбиение этого отрезка, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta g(x_i) = g(x_i) - g(x_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$, и

$$\sigma_\tau(f, g) = \sigma_\tau(f, g; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta g(x_i). \qquad (47.14)$$

Определение 6. *Функция f называется интегрируемой по функции g на отрезке $[a, b]$, если для любой последовательности разбиений $\tau_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ этого отрезка такой, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} |\tau_n| = 0$, и для любого выбора точек $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$, $i = 1, 2, \ldots, i_{\tau_n}$, существует, и при этом один и тот же, предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n}(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)\,dg(x).$$

Этот предел называют интегралом Стилтьеса функции f по функции g и пишут*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau(f, g). \qquad (47.15)$$

В случае $g(x) \equiv x$ интеграл Стилтьеса является, очевидно, интегралом Римана. Если функция $g(x)$ — постоянная, то интеграл от любой функции по ней равен нулю.

Как обычно, можно сформулировать равносильное определение интеграла Стилтьеса на «ε—δ»-языке. Сделаем это.

Число, обозначаемое $\int_a^b f(x)\,dg(x)$, называется *интегралом Стилтьеса* от функции f по функции g на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех разбие-

* Т. И. Стилтьес (1856—1894) — нидерландский математик.

ний $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ отрезка $[a, b]$ мелкости $|\tau| < \delta$ и для всех точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$, выполняется неравенство

$$\left|\sigma_\tau(f, g; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}) - \int_a^b f(x)\, dg(x)\right| < \varepsilon.$$

Интеграл Стилтьеса обладает свойством линейности как относительно функций f, так и относительно функций g. Более точно, справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Если существуют интегралы Стилтьеса* $\int_a^b f_i(x)\, dg(x)$, *а* $\lambda_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *то существует интеграл Стилтьеса* $\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x)\right) dg(x)$ *и*

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x)\right) dg(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_a^b f_i(x)\, dg(x).$$

ТЕОРЕМА 2. *Если существуют интегралы* $\int_a^b f(x)\, dg_i(x)$, *а* $\lambda_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *то существует и интеграл* $\int_a^b f(x)\, d\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x)\right)$, *причем*

$$\int_a^b f(x)\, d\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x)\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_a^b f(x)\, dg_i(x).$$

Эти теоремы доказываются аналогично случаю интеграла Римана с помощью предельного перехода в соответствующих равенствах для интегральных сумм.

47.6. Существование интеграла Стилтьеса

Отметим два класса функций, по которым у непрерывных функций существуют интегралы Стилтьеса.

Функция называется *кусочно-постоянной на отрезке*, если она имеет на нем конечное число точек разрыва и постоянна на каждом из промежутков, остающихся на отрезке после удаления из него точек разрыва функции.

ТЕОРЕМА 3. *Непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция* f *интегрируема по кусочно-постоянной на этом отрезке функции* g, *и интеграл Стилтьеса равен сумме произведений скачков* c_k *функции* g *во всех ее точках разрыва* a_k, $a \leqslant a_k \leqslant b$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *на значение функции* f *в этих точках*:

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \sum_{k=1}^n c_k f(a_k). \tag{47.16}$$

Здесь, если $a < a_k < b$, то $c_k = g(a_k + 0) - g(a_k - 0)$; если $a_k = a$, то $c_k = g(a + 0) - g(a)$, а если $a_k = b$, то $c_k = g(b) - g(b - 0)$.

Доказательство. Пусть сначала кусочно-постоянная функция g имеет на отрезке $[a, b]$ только одну точку разрыва $x = c$. При $x = a$ для любого разбиения $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ отрезка $[a, b]$ и точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$, при $i = 2, 3, \ldots, i_\tau$ имеем $\Delta g(x_i) = g(x_i) - g(x_{i-1}) = 0$, и поэтому, в силу непрерывности функции f,

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau(f, g) = \lim_{|\tau| \to 0} f(\xi_1)(g(x_1) - g(a)) =$$
$$= f(a)(g(a + 0) - g(a)),$$

так как в силу постоянства функции g на полуинтервале $(a, b]$ имеем $g(a + 0) = g(x)$, $x \in (a, b]$.

Аналогично, если единственной точкой разрыва функции g является точка $x = b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(b)(g(b) - g(b - 0)).$$

Пусть теперь единственная точка разрыва $x = c$ функции g лежит между точками a и b, т. е. $a < c < b$. Если $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ — такое разбиение отрезка $[a, b]$, что точка $x = c$ в него не входит, т. е. существует такой номер i_0, что

$$x_{i_0 - 1} < c < x_{i_0}, \tag{47.17}$$

то, в силу кусочного постоянства функции g, для всех $i \neq i_0$ имеем

$$\Delta g(x_i) = g(x_i) - g(x_{i-1}) = 0, \tag{47.18}$$

а при $i = i_0$, в силу неравенства (47.17),

$$g(x_{i_0 - 1}) = g(c - 0), \quad g(x_{i_0}) = g(c + 0)$$

и поэтому

$$\Delta g(x_{i_0}) = g(x_{i_0}) - g(x_{i_0 - 1}) = g(c + 0) - g(c - 0).$$

Если $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$, то интегральные суммы имеют вид

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\,\Delta g_i = f(\xi_{i_0})\,\Delta g(x_{i_0}) = f(\xi_{i_0})(g(c + 0) - g(c - 0))$$

(остальные ее слагаемые при $i \neq i_0$, в силу равенства (47.18), обращаются в нуль).

Обозначим через τ^* разбиение отрезка $[a, b]$, получающееся из разбиения τ добавлением к нему точки $x = c$, т. е. $\tau^* = \tau \cup \{c\}$. Ясно, что $|\tau^*| \leqslant |\tau|$. Пусть $\eta_1 \in [x_{i0-1}, c]$, $\eta_2 \in [c, x_{i0}]$ и

$$\sigma_{\tau^*} = f(\eta_1)\,(g(c) - g(c-0)) + f(\eta_2)\,(g\,(c+0) - g(c)) \quad (47.19)$$

— некоторая интегральная сумма, соответствующая разбиению τ^*.

Рассмотрим еще частный случай интегральной суммы (47.19), у которой $\eta_1 = \eta_2 = c$:

$$\sigma_{\eta,\,c} = f(c)\,(g(c) - g(c-0)) + f(c)\,(g(c+0) - g(c)) = \\ = f(c)\,(g(c+0) - g(c-0)).$$

Сравним суммы σ_τ, σ_{τ^*} и $\sigma_{\tau^*,\,c}$. В силу непрерывности функции f, имеем

$$\lim_{|\tau| \to 0} (\sigma_\tau - \sigma_{\tau^*,\,c}) = \lim_{|\tau| \to 0} (f(\xi_{i_0}) - f(c))\,(g(c+0) - g(c-0)) = 0,$$

$$\lim_{|\tau| \to 0} (\sigma_{\tau^*} - \sigma_\tau) = \lim_{|\tau| \to 0} [(f(\eta_2) - f(c))\,(g(c) - g(c-0)) + \\ + (f(\eta_2) - f(c))\,(g(c+0) - g(c-0))] = 0.$$

Из последних двух равенств следует, что интегральные суммы σ_τ, σ_{τ^*} и $\sigma_{\tau^*,\,c}$ при $|\tau| \to 0$ одновременно имеют пределы или нет, причем если эти пределы существуют, то они равны. Суммы $\sigma_{\tau^*,\,c}$ — постоянные величины и, следовательно, очевидным образом имеют предел. Поэтому интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dg\,(x)$ существует и

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg\,(x) = \sigma_{\tau^*,\,c} = f(c)\,(g(c+0) - g(c-0)). \quad (47.20)$$

Если функция g — кусочно-постоянна, то она является суммой кусочно-постоянных функций, имеющих только одну точку разрыва. Применив к каждой из них формулу (47.20) и сложив результаты, получим, в силу теоремы 2, формулу (47.16). □

З а м е ч а н и е. Одним из следствий доказанной теоремы является возможность представить любую конечную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i$ как интеграл Стилтьеса. Действительно, кусочно-постоянная функция

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} u_k, & \text{если} \quad k - 1 < k,\ k = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

имеет при $u_k \neq 0$ точку разрыва $a_k = k - 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, со скачком $c_k = u_k$. Поэтому, в силу формулы (47.16), при $f = 1$ имеем

$$\int_0^n dg(x) = \sum_{i=1}^n u_i.$$

Таким образом, понятие конечной суммы входит в понятие интеграла Стилтьеса.

Обобщением утверждения об интегрируемости по Риману непрерывной на отрезке функции является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Непрерывная на отрезке функция интегрируема по монотонной на этом отрезке функции.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ монотонна на этом отрезке. Достаточно рассмотреть случай только возрастающих функций, так как если функция $g(x)$ убывает, то функция $-g(x)$ возрастает и из существования интеграла Стилтьеса $\int_a^b f(x)\,d(-g(x))$, согласно теореме 2, следует и существование интеграла Стилтьеса

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = -\int_a^b f(x)\,d(-g(x)).$$

Таким образом, случай убывающей функции сводится к случаю возрастающей.

Итак, пусть f — непрерывная, g — возрастающая функции.

Доказательство существования интеграла $\int_a^b f(x)dg(x)$ проведем методом, аналогичным методу доказательства интегрируемости по Риману непрерывной на отрезке функции.

Пусть $\tau = \{x\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $\Delta g(x_i) = g(x_i) - g(x_{i-1}) \geqslant 0$. Функция f, будучи непрерывной на отрезке $[a, b]$, принимает на отрезках $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ в некоторых точках наибольшие и наименьшие значения. Обозначим эти точки соответственно η_i и ζ_i:

$$m_i = \min_{\Delta_i} f(x) = f(\xi_i),\quad M_i = \max_{\Delta_i} f(x) = f(\eta_i),\ i = 1, 2, \ldots, i_\tau. \quad (47.21)$$

Положим

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i \Delta g(x_i),\quad S_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i \Delta g(x_i). \quad (47.22)$$

Очевидно,

$$s_\tau \leqslant S_\tau. \tag{47.23}$$

Покажем, что

$$\lim_{|\tau| \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{47.24}$$

Имеем

$$0 \underset{(47.23)}{\leqslant} S_\tau - s_\tau \underset{\substack{(47.21)\\(47.22)}}{\leqslant} \sum_{i=1}^{i_\tau} [f(\eta_i) - f(\xi_i)]\Delta g(x_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(f;\, \Delta_i)\Delta g(x_i) \leqslant \omega(f;\, |\tau|) \sum_{i=1}^{i_\tau} (g(x_i) - g(x_{i-1})] =$$

$$= \omega(f;\, |\tau|)(g(b) - g(a)). \tag{47.25}$$

Поскольку функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, она равномерно непрерывна на нем, поэтому ее модуль непрерывности $\omega(f;\, |\tau|)$ стремится к нулю при $|\tau| \to 0$:

$$\lim_{|\tau| \to 0} \omega(f;\, |\tau|) = 0. \tag{47.26}$$

Из неравенства (47.25) и равенства (47.26) следует утверждение (47.24).

Покажем теперь, что для любых двух разбиений τ_1 и τ_2 отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}. \tag{47.27}$$

Пусть сначала разбиение $\tau^* = \{x_j^*\}_{j=1}^{j=j_{\tau^*}}$ отрезка $[a, b]$ вписано в разбиение τ, $\Delta_j^* = [x_{j-1}^*, x_j^*]$, $\Delta g(x_j^*) = g(x_j^*) - g(x_{j-1}^*)$.

Обозначим через $\Delta_{j_i}^*$ те отрезки разбиения τ^*, которые содержатся в отрезке Δ_i разбиения τ, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$. Тогда

$$\Delta_i = \bigcup_{j_i} \Delta_{j_i}^*,\ \ \Delta g_i = \sum_{j_i} \Delta g(x_{j_i}^*) \tag{47.28}$$

и, если $m_j^* = \min\limits_{\Delta_j^*} f(x)$, $M_j^* = \max\limits_{\Delta_j^*} f(x)$, то

$$m_i \leqslant m_{j_i}^*(x_j^*),\ \ M_i \geqslant M_{j_i}^*(x_j^*). \tag{47.29}$$

Поэтому

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i \Delta g_i \underset{(47.28)}{\leqslant} \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i \sum_{j_i} \Delta g(x_{j_i}^*) \underset{(47.29)}{\leqslant}$$

$$\underset{(47.29)}{\leqslant} \sum_{i=1}^{i_\tau} \sum_{j_i} m_{j_i}^* \Delta g(x_{j_i}^*) = \sum_{i=1}^{i_{\tau^*}} m_j^* \Delta g(x_j^*) = s_{\tau^*}. \tag{47.30}$$

Аналогично доказывается, что

$$S_\tau \leqslant S_\tau. \tag{47.31}$$

Поэтому для любых двух разбиений τ_1 и τ_2 отрезка $[a, b]$, взяв разбиение τ этого отрезка, вписанное в разбиения τ_1 и τ_2, получим

$$s_{\tau_1} \underset{(47.30)}{\leqslant} s_\tau \underset{(47.23)}{\leqslant} S_\tau \underset{(47.31)}{\leqslant} S_{\tau_2}. \tag{47.32}$$

Положим

$$I_* = \sup_\tau s_\tau, \quad I^* = \inf_\tau S_\tau. \tag{47.33}$$

Из неравенства (47.32) следует, что

$$I_* \leqslant I^*. \tag{47.34}$$

Покажем, что на самом деле

$$I_* = I^*. \tag{47.35}$$

Из определения (47.33) и неравенства (47.34) следует, что

$$s_\tau \leqslant I^* \leqslant I_* \leqslant S_\tau, \tag{47.36}$$

поэтому и неравенство

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau. \tag{47.37}$$

Отсюда, в силу стремления правой части неравенства к нулю при $|\tau| \to 0$ (см. (47.24)), и следует равенство (47.35).

Если $I = I_* = I^*$, то из (47.36) имеем $s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau$, следовательно,

$$0 \leqslant I - s_\tau \leqslant S_\tau - s_\tau, \quad 0 \leqslant S_\tau - I \leqslant S_\tau - s_\tau. \tag{47.38}$$

Из этих неравенств снова, в силу стремления к нулю их правых частей при $|\tau| \to 0$, следует, что существуют пределы

$$\lim_{|\tau| \to 0} s_\tau = \lim_{|\tau| \to 0} S_\tau = I. \tag{47.39}$$

Для любой интегральной суммы Стилтьеса

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\zeta_i) \Delta g(x_i), \quad x_{i-1} \leqslant \zeta_i \leqslant x_i, \ i = 1, 2, \ldots, i_\tau,$$

в силу очевидных неравенств $f(\zeta_i) \underset{(47.21)}{\leqslant} f(\zeta_i) \underset{(47.21)}{\leqslant} f(\eta_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, i_\tau$, имеем $s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau$. Отсюда и из равенства (47.39) следует, что существует конечный предел $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau = I$, т. е. существует интеграл Стилтьеса от функции f по функции g. □

Укажем случай, когда интеграл Стилтьеса превращается в интеграл Римана.

ТЕОРЕМА 4′. *Если функция f непрерывна, а функция g непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то функция f интегрируема на этом отрезке по функции g и*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x)\, dx \tag{47.40}$$

(*в левой части равенства — интеграл Стилтьеса, справа — интеграл Римана*).

Эта теорема равносильна доказанному выше свойству 4^0 криволинейного интеграла второго рода (см. п. 47.2) при $f(t) = F(r(t))$, $g(t) = \varphi(t)$.

Нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Если существует интеграл Стилтьеса* $\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$ *и*

$$f^*(x) = f(a + b - x),\ \ g^*(x) = g(a + b - x),\ \ a \leqslant x \leqslant b, \qquad (47.41)$$

то существует интеграл

$$\int\limits_a^b f^*(x)\,dg^*(x) = -\int\limits_a^b f(x)\,dg(x). \qquad (47.42)$$

Таким образом, при изменении ориентации отрезка $[a, b]$, т. е. при замене переменной x на t по формуле $x = a + b - t$, интеграл Стилтьеса меняет знак. Это следует из того, что когда переменная x изменяется в обратном направлении, т. е. от точки b к точке a, приращения $\Delta g(x_i)$ функции $g(x)$ меняют знак. Точнее,

$$\Delta g(x_i) = g(x_i) - g(x_{i-1}) = -(g(x_{i-1}) - g(x_i)).$$

Поэтому интегральным суммам $\sigma_\tau(f, g)$ будут соответствовать интегральные суммы $-\sigma_\tau(f, g)$, следовательно, и их пределы будут отличаться знаком.

Левая часть формулы (47.42) обычно обозначается $\int\limits_b^a f(x)dg(x)$. При такой записи эта формула принимает вид

$$\int\limits_b^a f(x)\,dg(x) = -\int\limits_a^b f(x)\,dg(x).$$

Доказательство. Если $\tau = \{x\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$,

$$x_j^* = a + b - x_i,\ \ i + j = i_\tau,\ \ i = 0, 1, \ldots, i_\tau, \qquad (47.43)$$

$$\xi_j^* = a + b - \xi_{i+1},\ \ i + j = i_\tau,\ \ i = 0, 1, \ldots, i_\tau - 1, \qquad (47.44)$$

то $\tau^* = \{x_j^*\}_{j=1}^{j=i_\tau}$ — также разбиение отрезка $[a, b]$,

$$|\tau^*| = |\tau|,\ \ \xi_j^* \in [x_{j-1}^*, x_j^*],\ \ j = 1, 2, \ldots, i_\tau,$$

$$f^*(\xi_j^*) \underset{(47.41)}{=} f(a + b - \xi_j^*) \underset{(47.44)}{=} f(\xi_{i+1}),\ \ i + j = i_\tau,$$
$$j = 1, 2, \ldots, i_\tau, \qquad (47.45)$$

$$\Delta g^*(x_j^*) = g^*(x_j^*) - g^*(x_{j-1}^*) \underset{(47.41)}{=} g(a + b - x_j^*) - g(a + b - x_{j-1}^*) \underset{(47.43)}{=}$$
$$\underset{(47.43)}{=} g(x_i) - g(x_{i+1}) = -\Delta g(x_{i+1}),$$
$$i + j = i_\tau,\ \ j = 0, 1, 2, \ldots, i_\tau. \qquad (47.46)$$

Поэтому

$$\sigma_{\tau^*}(f^*, g^*) = \sum_{j=1}^{j_\tau} f^*(\xi_j^*)\Delta g^*(x_j^*) \underset{\substack{(47.45)\\(47.46)}}{=}$$

$$\underset{\substack{(47.45)\\(47.46)}}{=} -\sum_{i=0}^{i_{\tau-1}} f(\xi_{i+1})\,(-\Delta g(x_{i+1})) \underset{i=k-1}{=}$$

$$\underset{i=k-1}{=} -\sum_{k=1}^{i_\tau} f(\xi_k)\Delta g(x_k) = -\sigma_\tau(f, g). \qquad (47.47)$$

Отсюда

$$\int_a^b f^*(x)dg^*(x) \underset{(47.15)}{=} \lim_{|\tau^*| \to 0} \sigma_{\tau^*}(f^*, g^*) \underset{(47.47)}{=}$$

$$\underset{(47.47)}{=} -\lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau(f, g) \underset{(47.15)}{=} -\int_a^b f(x)dg(x). \square$$

Интеграл Стилтьеса $\int_a^b f(x)dg(x)$ обладает и рядом других свойств, аналогичных свойствам интеграла Римана. Например, свойством аддитивности по отрезкам интегрирования. Мы не будем останавливаться ни на подробных формулировках этих свойств, ни на их доказательствах, предоставляя это проделывать читателю по мере внутренней потребности.

47.7. Обобщение понятия криволинейного интеграла второго рода

Используя понятие интеграла Стилтьеса, дадим теперь более общее, чем раньше, определение криволинейного интеграла второго рода $\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz$ по кривой Γ.

Пусть Γ — параметрически заданная кривая: $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, $r(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$, и, следовательно, функции φ, ψ, χ непрерывны на отрезке $[a, b]$, и пусть на множестве точек этой кривой задана функция F, т. е. на отрезке $[a, b]$ задана функция $F(r(t)) = F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$.

Определение 2*. *Криволинейным интегралом второго рода $\int_\Gamma Fdx$ от функции F по кривой Γ называется интеграл Стилтьеса*

$$\int_a^b F(r(t))d\varphi(t). \qquad (47.48)$$

Если функция F непрерывна на кривой Γ, т. е. непрерывна функция $F(r(t))$ на отрезке $[a, b]$, а кривая Γ гладкая, и по-

этому функция $x = \varphi(t)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную $\varphi'(t)$, то, согласно теореме 4 п. 47.6, имеем

$$\int_a^b F(r(t))d\varphi(t) \underset{(47.40)}{=} \int_a^b F(r(t))\varphi'(t)\,dt = \int_\Gamma F dx, \qquad (47.49)$$

где, в силу формулы (47.10), в правой части равенства стоит криволинейный интеграл второго рода в смысле определения 2 п. 47.2. Из равенства (47.49) следует, что для непрерывных на гладкой кривой функций определения 2 и 2^* криволинейных интегралов второго рода равносильны.

Криволинейный интеграл второго рода в смысле определения 2^* можно брать и по кусочно-гладкой кривой, т. е. по кривой, являющейся объединением конечного множества гладких кривых. При этом указанный интеграл, в силу его аддитивности, будет равен сумме интегралов по гладким частям кривой, и тем самым он и в этом случае равен соответствующему интегралу второго рода в смысле определения 2 (см. определение 5 в п. 47.4).

Существенное обобщение понятия криволинейного интеграла в определении 2^* достигается прежде всего за счет того, что интеграл (27.24) может существовать и для «негладких» кривых, т. е. в том случае, когда нельзя использовать понятие касательных векторов, которое необходимо для того, чтобы можно было применить определение 2.

Криволинейный интеграл (47.48), подобно криволинейному интегралу (47.6) (см. определение 2), не зависит от выбора представления ориентированной кривой. Действительно, пусть $t = f(u)$, $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$, — допустимое преобразование параметра, т. е. непрерывное строго возрастающее отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$ и пусть $\tau = \{u_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ — разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$.

Положим

$$t_i = f(u_i),\ i = 0, 1, \ldots, i_\tau. \qquad (47.50)$$

Тогда $\tau^* = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ является разбиением отрезка $[a, b]$, и важно заметить, что, в силу равномерной непрерывности функции $t = f(u)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, из стремления к нулю мелкости разбиения τ следует стремление к нулю мелкости τ^*, т. е.

$$\lim_{|\tau| \to 0} |\tau^*| = 0. \qquad (47.51)$$

Если $\xi_i \in [u_{i-1}, u_i]$ и

$$\eta_i = f(\xi_i),\ i = 1, 2, \ldots, i_\tau, \qquad (47.52)$$

то для представлений $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, и $r(f(u))$, $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$, кривой Г, положив (см. (47.14))

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau\,(F \circ r \circ f,\ \varphi \circ f),\ \ \sigma_{\tau^*} = \sigma_{\tau^*}\,(F \circ r,\ \varphi), \text{ имеем}$$

$$\sigma_\tau \underset{(47.14)}{=} \sum_{i=1}^{i_\tau} F(r(f(\xi_i)))[\varphi(f(u_i) - \varphi(f(u_{i-1}))] \underset{\substack{(47.50)\\(47.52)}}{=}$$

$$\underset{\substack{(47.50)\\(47.52)}}{=} \sum_{i=1}^{i_\tau} F(r(\eta_i))[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})] \underset{(47.14)}{=} \sigma_{\tau^*}.$$

Поэтому из существования конечного предела $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \tilde{\sigma}_\tau^{\lrcorner}$ и выполнения условия (47.51) следует существование конечного предела $\lim\limits_{|\tau^*| \to 0} \sigma_{\tau^*}^{\lrcorner}$ и равенство

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sigma_{\tau^*}^{\lrcorner} = \lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau^{\lrcorner}.$$

Согласно определению интеграла Стилтьеса, это равенство представляет собой равенство интегралов

$$\int\limits_\alpha^\beta F(r(f(u)))d\varphi(f(u)) = \int\limits_a^b F(r(t))d\varphi(t),$$

что, в силу определения 2* криволинейного интеграла, означает равенство

$$\int\limits_\Gamma (F \circ r \circ f)\, d(\varphi \circ f) = \int\limits_\Gamma F d\varphi.$$

Это и означает независимость интеграла (47.48) от выбора представления кривой.

Если под гладкой кривой понимать кривую, которая имеет хотя бы одно представление, непрерывно дифференцируемое вплоть до концов отрезка, на котором оно задано, и не имеет особых точек внутри этого отрезка (см. определения 3 и 4 в п. 47.3), то для функций, непрерывных на такой кривой, определения 2 и 2* криволинейных интегралов второго рода эквивалентны, т. е. дают одно и то же значение интеграла, какое бы представление этой кривой ни выбрать. В самом деле, во-первых, для представления кривой непрерывно дифференцируемого вплоть до концов отрезка, на котором оно задано, эти определения, согласно доказанному выше, эквивалентны; во-вторых, оба эти определения не зависят от выбора параметра на кривой.

Криволинейный интеграл (47.48), подобно интегралу (47.6), меняет знак при изменении ориентации кривой, по которой

производится интегрирование. Это сразу следует из (47.42), так как изменение ориентации кривой соответствует преобразование параметра $t = a + b - t^*$, $a \leqslant t \leqslant b$, следовательно, переход от функций $F(r(t))$, $\varphi(t)$ к функциям $F(r(a + b - t^*))$, $\varphi(a + b - t^*)$, $a \leqslant t^* \leqslant b$.

На криволинейный интеграл в смысле определения 2^* переносятся и другие свойства интеграла (47.6) такие, как линейность, аддитивность по дугам, интегрирование неравенств и т. п.

Аналогично интегралу $\int\limits_\Gamma F(x, y, z)dx$ обобщаются и понятия криволинейных интегралов второго рода вида

$$\int\limits_\Gamma F(x, y, z)dy \quad \text{и} \quad \int\limits_\Gamma F(x, y, z)dz;$$

они определяются как интегралы Стилтьеса $\int\limits_a^b F(r(t))d\psi(t)$ и, соответственно, $\int\limits_a^b F(r(t))d\psi(t)$.

Таким образом, можно рассматривать в этом смысле и интеграл вида $\int\limits_a^b Pdx + Qdy + Rdz$. Этот интеграл, в силу его аддитивности по дугам, совпадает с интегралом, рассмотренным в п. 47.2, не только по гладким кривым (как это было доказано выше), но и но кусочно-гладким. Следовательно, в данном случае остается справедливой формула

$$\int\limits_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds, \qquad (47.53)$$

где $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичный касательный вектор к кривой в тех точках, в которых у нее существует касательная.

Рассмотрим два примера криволинейного интеграла второго рода в смысле определения (47.48).

Примеры. 1. Пусть кривая Г такова, что на ней можно взять за параметр одну из координат, например координату x, т. е. кривая Г имеет представление

$$y = y(x), \; z = z(x), \; a \leqslant x \leqslant b, \qquad (47.54)$$

а функция F непрерывна на этой кривой.

Тогда криволинейный интеграл $\int\limits_\Gamma Fdx$ в смысле определения 2^* равен интегралу Стилтьеса $\int\limits_a^b F(x, y(x), z(x))dx$,

который в этом случае является интегралом Римана от непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $F(x, y(x), z(x))$ и поэтому существует.

Итак, для криволинейного интеграла в смысле определения 2* при сделанных предположениях, как и для криволинейного интеграла в смысле определения 2, когда интегрирование ведется по кусочно-гладкой кривой, имеет место формула

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z)dx = \int_{a}^{b} F(x, y(x), z(x))dx. \qquad (47.55)$$

Отметим, что здесь эта формула в отличие от формулы (47.9) получена для произвольной непрерывной кривой вида (47.54), т. е. эта кривая может быть, в частности, неспрямляемой, не иметь касательной ни в одной точке и т. п.

2. Если кривая Γ лежит в плоскости, перпендикулярной оси Ox, т. е. имеет представление

$$x = x_0,\ \ y = y(t),\ \ z = z(t),\ a \leqslant t \leqslant b, \qquad (47.56)$$

то

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z)dx = 0. \qquad (47.57)$$

Это следует из того, что интеграл Стилтьеса (как это было отмечено выше) от любой функции по постоянной равен нулю.

Криволинейный интеграл второго рода в новом расширенном смысле встретится, во-первых, тогда, когда кривая $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$ является графиком непрерывной относительно одной из координат функции, например функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, на плоскости переменных x, y, а функция $F(x, y)$ непрерывна на этом графике. В этом случае

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y)\ dx \underset{(47.55)}{=} \int_{a}^{b} F(x, f(x))\ dx$$

и, следовательно,

$$\int_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y)dx = -\int_{a}^{b} F(x, f(x))dx; \qquad (47.58)$$

во-вторых, тогда, когда кривая Γ лежит в плоскости переменных x, y и является отрезком, параллельным одной из координатных осей, например оси $Oy : x = x_0$, $c \leqslant y \leqslant d$. В этом случае

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z)dx \underset{(47.57)}{=} 0. \qquad (47.59)$$

47.8. Формула Грина

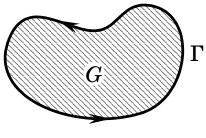
В дальнейшем для наглядности будем всегда предполагать, что на плоскости и в пространстве заданы правые прямоугольные системы координат (если, конечно, не оговорено что-то другое).

Определение 7. *Пусть простой замкнутый контур* Γ *является границей ограниченной плоскости области G. Если ориентация контура выбрана таким образом, что при движении по контуру соответственно выбранной ориентации область G остается слева* (*такой обход обычно называется обходом контура против направления движения часовой стрелки*), *то эта ориентация называется положительной, в противном же случае* (*т. е. когда обход контура производится по направлению движения часовой стрелки*) — *отрицательной* (рис. 74).

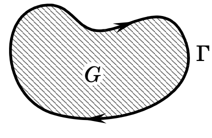
Будем говорить также, что обход контура, соответствующий положительной (отрицательной) ориентации, происходит в положительном (отрицательном) направлении.

Положительно ориентированный контур будем обозначать через Γ^+, а отрицательно ориентированный — через Γ^-. Эти понятия определены не строго, не в точных математических терминах («правая система координат», «слева», «справа» и т. п.). В дальнейшем во всяком отдельном случае рассматриваемая ориентация всегда будет конкретно указываться. Тем самым наше «общее» определение положительной и отрицательной ориентации простого замкнутого контура послужит лишь для геометрической наглядности рассматриваемых ниже вопросов.

Конечно, понятие ориентации контура можно сформулировать и в четкой математической форме. Сделаем это для случая замкнутого гладкого контура. Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат с координатными ортами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$. Пусть Γ — гладкий замкнутый ориентирован-



Положительная ориентация



Отрицательная ориентация

Рис. 74

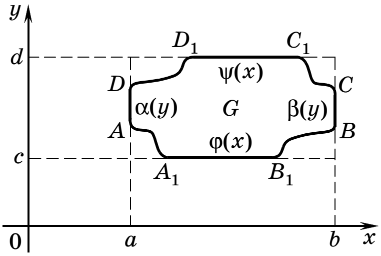


Рис. 75

ный контур, τ — единичный касательный вектор, задающий его ориентацию (см. п. 16.4) и ν — единичная нормаль, направленная в сторону конечной области, ограниченной контуром Γ (эта нормаль называется внутренней нормалью). Контур Γ называется *положительно ориентированным* относительно заданной системы координат, если упорядоченная пара векторов $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}$ имеет ту же ориентацию, что и пара координатных ортов $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$. Это означает, что определитель матрицы перехода от векторов $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}$ к базису $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ положителен.

В дальнейшем плоскую область $G \subset \boldsymbol{R}_{xy}$, замыкание которой может быть представлено одновременно в виде (45.1) и (45.28), т. е. область, граница которой может быть представлена как в виде объединения графиков непрерывных функций от переменной x, так и в виде объединения графиков непрерывных функций от переменной y и, быть может, еще отрезков, параллельных соответствующим координатным осям, будем для краткости называть *элементарной областью* (рис. 75).

Ясно, что элементарные области и объединения конечного множества элементарных областей являются квадрируемыми множествами, так как их границы имеют меру нуль.

Будем говорить, что квадрируемая плоская область G разбита на конечное число квадрируемых областей G_i, $i = 1, 2, \dots, k$, если множество их замыканий $\{G_i\}_{i=1}^{i=k}$ является разбиением замкнутой области $\overline{G}$ (см. п. 44.3).

ТЕОРЕМА 5. *Пусть плоская область G может быть разбита на конечное число элементарных областей и ее граница Γ является простым замкнутым контуром. Если на замыкании $\overline{G}$ области G заданы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, непрерывные на $\overline{G}$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$,* то имеет место формула*

* Непрерывность частных производных на $\overline{G}$ понимается как их непрерывность на открытом множестве G и их непрерывная продолжаемость на границу G (см. п. 39.3).

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{\Gamma^+} Pdx + Qdy, \qquad (47.60)$$

*называемая формулой Грина**.

СЛЕДСТВИЕ. *Если в условиях теоремы контур* Γ, *являющийся границей области* G, *кусочно-гладкий и* $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ — *единичный касательный к нему вектор* (*в тех точках, где он существует*), *то*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{\Gamma} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)ds, \qquad (47.61)$$

где s — *переменная длина дуги на контуре* Γ.

Доказательство. Пусть сначала область G сама элементарна и, следовательно, ее границу можно представить как объединение графиков двух непрерывных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и, быть может, отрезков прямых $x = a$ и $x = b$, а также как объединение двух графиков непрерывных функций $\alpha(y)$ и $\beta(y)$, $\alpha(y) \leqslant \beta(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$ и, быть может, отрезков прямых $y = c$ и $y = d$.

В этом случае, применяя правило сведения двойного интеграла к повторному, теорему Ньютона—Лейбница (п. 25.3) и формулу (47.58), имеем

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) dx = \int\limits_a^b \Big(P\big(x, \psi(x)\big) - P\big(x, \varphi(x)\big)\Big) dx =$$

$$= \int\limits_a^b P\big(x, \psi(x)\big) dx - \int\limits_a^b P[x, \varphi(x)] dx = \int\limits_{\widehat{DC}} P(x, y)dx - \int\limits_{\widehat{AB}} P(x, y)dx =$$

$$= -\int\limits_{\widehat{CD}} P(x, y)dx - \int\limits_{\widehat{AB}} P(x, y)dx. \qquad (47.62)$$

Для кривых $\widehat{AB}$ и $\widehat{CD}$ ничего, кроме их непрерывности, не предполагалось, поэтому естественно, что здесь все криволинейные интегралы второго рода понимаются в смысле определения 2* (см. п. 47.7).

Замечая, что для отрезков BC и DA (см. (47.59))

$$\int\limits_{\widehat{BC}} P(x, y)dx = \int\limits_{\widehat{DA}} P(x, y)dx = 0, \qquad (47.63)$$

* Дж. Грин (1793—1841) — английский математик.

и сложив равенства (47.62) и (47.63), имеем

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx - \int\limits_{\overset{\frown}{BC}} Pdx - \int\limits_{\overset{\frown}{CD}} Pdx - \int\limits_{\overset{\frown}{DA}} Pdx = -\int\limits_{\Gamma^+} Pdx. \quad (47.64)$$

При этом получилась ориентация граничного контура Г, при которой следуют последовательно одна за другой точки A, B, C, D. Эта ориентация является положительной (см. определение 6) и обозначается через Γ^+.

Совершенно аналогично, исходя из того, что область G элементарна, выводится формула

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}dx\,dy = \int\limits_{\Gamma^+} Q\,dy.$$

Вычитая из левой и правой частей этой формулы соответственно левую и правую части формулы (47.64), получаем формулу Грина (47.60).

Рассмотрим общий случай. Пусть область G разбита на элементарные области G_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, и Γ_i — ограничивающие их контуры. В силу доказанного, для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\iint\limits_{G_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \int\limits_{\Gamma_i^+} P\,dx + Q\,dy.$$

Сложив эти равенства, получим

$$\sum_{i=1}^{k}\iint\limits_{G_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\Gamma_i^+} P\,dx + Q\,dy. \quad (47.65)$$

В силу аддитивности двойного интеграла по множествам (см. п. 44.6), имеем

$$\sum_{i=1}^{k}\iint\limits_{G_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \iint\limits_{G}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy. \quad (47.66)$$

В сумме, стоящей в правой части равенства (47.65), криволинейные интегралы берутся дважды по всем внутренним частям границ Γ_i, областей G_i, т. е. таким дугам кривых Γ_i, которые являются частью границ двух областей G_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, и, следовательно, не входят в границу области G; при этом ориентации этих дуг кривых Γ_i противоположны (рис. 76). В силу изменения знака криволинейного интеграла второго рода при изменении ориентации кривой, сумма двух криволинейных интегралов по указанным частям кривых Γ_i равна нулю. Поэтому в правой сумме формулы (47.65) останутся

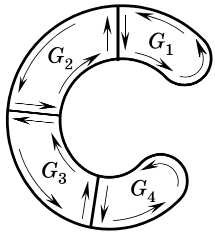


Рис. 76

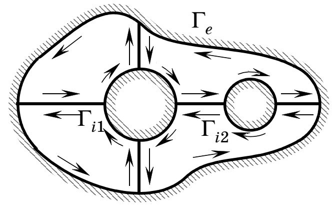


Рис. 77

только интегралы по положительно ориентированным частям границы Γ области G, дающие в сумме $\int\limits_{\Gamma^+} P\,dx + Q\,dy$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\Gamma_i^+} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\Gamma^+} P\,dx + Q\,dy. \qquad (47.67)$$

Из (47.65), (47.66) и (47.67) следует формула (47.60) в общем случае. □

Пусть G — ограниченная область на плоскости R^2 и пусть ее граница состоит из конечного числа простых контуров, которые будем называть *граничными контурами*. Если граничный контур является одновременно и границей неограниченной области, лежащей в $R^2 \backslash \overline{G}$, то будем называть его *внешним*, а если он является одновременно и границей ограниченной области, лежащей в $R^2 \backslash \overline{G}$, то *внутренним*. Так, на рис. 77 контур Γ_e внешний, а контуры $\Gamma_{i,1}$ и $\Gamma_{i,2}$ внутренние.

Если граница области G состоит из внешнего контура Γ_e и внутренних контуров $\Gamma_{i,1}$, $\Gamma_{i,2}$, ... , $\Gamma_{i,m}$ и если область G может быть разбита на конечное число элементарных областей, то справедлива формула

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\Gamma_e^+} P\,dx + Q\,dy + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_{i,j}^+} P\,dx + Q\,dy, \qquad (47.68)$$

в которой криволинейные интегралы берутся по отрицательно ориентированным внутренним контурам и по положительно ориентированному внешнему контуру.

Функции P и Q, как и выше, предполагаются непрерывными вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial D}{\partial x}$ в замкнутой области $\overline{G}$.

Доказывается эта формула так же, как и (47.60), если только заметить, что в сумме, стоящей в правой части равен-

ства (47.65), останутся криволинейные интегралы по положительно ориентированным частям внешнего контура и по отрицательно ориентированным частям внутренних контуров (рис. 76).

Отметим еще, что в формуле (47.68) все контуры (как внешние, так и внутренние) ориентированы таким образом, что при их обходе область интегрирования остается слева.

Определение 8. *Пусть граница ∂G ограниченной плоской области G состоит из конечного числа простых кусочно-гладких контуров. Совокупность этих контуров, ориентированных так, что при обходе по каждому из них область G остается слева (справа), называется положительной (отрицательной) ориентацией границы G и обозначается ∂G^+ (соответственно — ∂G^-).*

Формулу Грина можно распространить и на другой, чем указанный в теореме 1, класс областей. Для этого заметим, что, в силу этой теоремы, формула Грина справедлива для треугольника, а значит, и для любого многоугольника. Поэтому предельным переходом, аппроксимируя границу области конечнозвенными ломаными, можно получить формулу Грина для любой области (и даже просто открытого множества), граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых. Мы не будем останавливаться на доказательстве этого факта, а ограничимся лишь его формулировкой. При этом, используя определение 8, запишем формулу (47.68) в более компактном виде.

ТЕОРЕМА 5′. *Пусть граница плоской ограниченной области G состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых. Тогда если функции P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial D}{\partial x}$ непрерывны на замыкании $\overline{G}$, области G, то*

$$\int\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\partial G^+} P\,dx + Q\,dy,$$

где ∂G^+ — положительно ориентированная граница области G.

Формула Грина является для кратных интегралов аналогом формулы Ньютона—Лейбница для однократных интегралов: и в той и в другой формуле интегралы от производных по области интегрирования выражаются через значения функции на границе указанной области (в случае формулы Грина эти значения еще интегрируются).

47.9. Вычисление площадей с помощью криволинейных интегралов

Положив в формуле Грина $Q = x$, $P = 0$, получим $\iint\limits_G dx\ dy = \int\limits_{\Gamma^+} x\,dy$ и, следовательно,

$$\mu G = \int\limits_{\Gamma^+} x\,dy. \qquad (47.69)$$

Аналогично, положив $P = -y$, $Q = 0$, получим

$$\mu G = -\int\limits_{\Gamma^+} y\,dx. \qquad (47.70)$$

Складывая формулы (47.69) и (47.70), имеем

$$\mu G = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma^+} x\,dy - y\,dx. \qquad (47.71)$$

Примеры. 1. Найдем с помощью формулы (47.71) площадь S, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Используем его параметрическое представление: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Применив формулу (47.71), получим искомую площадь:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma^+} x dy - y dx = \frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \pi ab.$$

Сравнивая этот метод вычисления площади, ограниченной эллипсом, с приведенным раньше (см. пример 4 в п. 28.1), легко убедиться, насколько здесь меньше объем вычислений.

2. Найдем площадь, ограниченную астроидой (см. в т. 1 рис. 92) $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Замечая, что здесь возрастание параметра t соответствует положительной ориентации контура, имеем

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma^+} x dy - y dx = \frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(\cos^4 t\,\sin^2 t + \sin^4 t\,\cos^2 t)\,dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2t\ dt = \frac{3a^2}{16}\int\limits_0^{2\pi}(1 - \cos 4t)dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

47.10. Геометрический смысл знака якобиана отображения плоской области

Пусть F — взаимно-однозначное непрерывно дифференцируемое отображение плоской области $G \subset \boldsymbol{R}^2_{uv}$ в плоскость $\boldsymbol{R}^2_{xy}$ с якобианом, всюду в G не равным нулю. Тогда, в силу принципа сохране-

ния области, множество $G^* = F(G)$ также является областью (см. следствие 2 теоремы 7 в п. 41.7), а якобиан, в силу его непрерывности, сохраняет знак на G (см. следствие 2 теоремы 8 в п. 36.9), т. е. либо всюду на G положителен, либо всюду отрицателен.

Пусть в координатной записи отображение F задается формулами

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \tag{47.72}$$

ЛЕММА 2. *Если Γ — кусочно-гладкая кривая, лежащая в G, то ее образ $\Gamma^* = F(\Gamma)$ при отображении F также является кусочно-гладкой кривой.*

Доказательство. Пусть сначала Γ — гладкая кривая, т. е. непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек (см. определения 15 и 16 в п. 16.4), и пусть $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — некоторое ее представление. Тогда на отрезке $[a, b]$ функции $u(t)$ и $v(t)$ непрерывно дифференцируемы и

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 > 0.$$

Представлением кривой $\Gamma^* = F(\Gamma)$ является пара функций $x = x(u(t), v(t))$; $y = y(u(t), v(t))$; $a \leqslant t \leqslant b$, которые, в силу свойств композиции непрерывно дифференцируемых функций (см. п. 36.3 и 37.3), также непрерывно дифференцируемы. Покажем, что кривая Γ^* также не имеет особых точек. В самом деле, так как

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt},$$

то, рассматривая эти равенства как систему линейных уравнений относительно $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$, видим, что если в некоторой точке $t \in [a, b]$ выполнялись бы равенства $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$, то, в силу необращения в нуль якобиана

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

указанная система имела бы единственное решение, которым является нулевое решение, т. е. в той же точке t были бы справедливыми равенства $\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0$ и тем самым соответствующая точка кривой Γ была бы особой, что, по предположению, не имеет места.

Итак, если кривая Γ — гладкая, то кривая $\Gamma^* = F(\Gamma)$ также гладкая. Отсюда сразу следует, что образ кусочно-гладкой

кривой при рассматриваемом отображении также является кусочно-гладкой кривой, ибо кусочно-гладкая кривая (см. определение 16 в п. 16.4) представляет собой объединение конечного числа гладких кривых. □

Пусть теперь $D \subset G$, D — ограниченная область и ее граница ∂D является простым кусочно-гладким контуром Γ (такие границы называются *кусочно-гладкими*). Пусть далее $D^* = F(D)$. Тогда, в силу принципа сохранения области, множество D^* также область и, кроме того, ее граница ∂D^* есть образ границы ∂D области D (см. (46.40) в п. 46.2), т. е. $\partial D^* = F(\partial D)$. Поэтому граница ∂D^* также является простым (в силу взаимной однозначности отображения F) кусочно-гладким (согласно лемме 1 этого пункта) контуром Γ^*. Следовательно, по контурам $\Gamma = \partial D$ и $\Gamma^* = \partial D^*$ можно вычислять криволинейные интегралы. Пусть области D и D^* таковы, что к ним применима формула Грина, например, они удовлетворяют условиям, налагаемым на область в теореме 1 п. 47.8. (На самом деле, как уже отмечалось, при сделанных предположениях формула Грина всегда применима, однако это не было доказано.)

Обозначим через Γ^+, как обычно, положительно ориентированный контур Γ (см. п. 47.8). Пусть $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — представление контура Γ^+ и, следовательно,

$$x = x[u(t), v(t)],\ y = y(u(t), v(t));\ a \leqslant t \leqslant b, \tag{47.73}$$

некоторое представление контура Γ^*.

Будем предполагать еще, что существуют смешанные производные $\frac{\partial^2 y}{\partial v\, \partial u}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v}$ и что они непрерывны, следовательно, и равны друг другу во всех точках области G.

Согласно формуле (47.69),

$$\mu D^* = \varepsilon \int_{\Gamma^*} x dy, \tag{47.74}$$

где $\varepsilon = +1$, если ориентация контура Γ^* положительна, и $\varepsilon = -1$ в противоположном случае. Иначе говоря, $\varepsilon = +1$ (соответственно $\varepsilon = -1$), если положительному обходу данного контура Γ соответствует при отображении (47.72) положительный же (отрицательный) обход контура $\Gamma^* = F(\Gamma)$.

Преобразовав интеграл (47.74) по формуле (47.8) и использовав представление (47.73) контура Γ^*, имеем

$$\mu D^* = \varepsilon \int_a^b x y_t' dt = \varepsilon \int_a^b x\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right) dt =$$

$$= \varepsilon \int_{\Gamma} x\frac{\partial y}{\partial u} du + x\frac{\partial y}{\partial v} dv. \tag{47.75}$$

К получившемуся интегралу применим формулу Грина (см. теорему 1 в п. 47.8). Положив $P = x\frac{\partial y}{\partial u}$, $Q = x\frac{\partial y}{\partial v}$ и заметив, что в этом случае

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + x\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + x\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u}$$

(здесь используется потребованное выше существование вторых частных производных $\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$), получим

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)},$$

откуда

$$\mu D^* \underset{(47.75)}{=} \varepsilon\int_{\Gamma^*} P\,du + Q\,dv = \varepsilon\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right)du\,dv = \varepsilon\iint_D \frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}du\,dv.$$

Левая часть этого равенства больше нуля, значит, правая часть также положительна, и так как якобиан отображения (47.72) не меняет знака, то это возможно лишь в том случае, когда $\varepsilon\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)} > 0$, т. е. когда число ε имеет тот же знак, что и якобиан $\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}$, а в этом случае $\varepsilon\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)} = \left|\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}\right|$. Тем самым знак ε не зависит от выбора контура Γ, а определяется знаком якобиана, который один и тот же во всех точках области G. Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. *Если выполнены сделанные выше предположения, то справедлива формула*

$$\mu D^* = \varepsilon\iint_D \frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}du\,dv. \tag{47.76}$$

Следовательно, если $\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)} > 0$ *на* D, *то* $\varepsilon = +1$, *иначе говоря, если якобиан отображения* F *положителен, то положительному обходу всякого контура* $\Gamma \subset G$, *являющегося границей ограниченной области* $D \subset G$, *при отображении* F *соответствует положительный обход контура* $\Gamma^* = F(\Gamma)$. *Если же якобиан* $\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)} < 0$ *на* D, *то* $\varepsilon = -1$, *т. е. положительному обходу всякого контура* Γ *указанного типа соответствует при отображении* F *отрицательный обход контура* $\Gamma^* = F(\Gamma)$.

Таким образом, *геометрический смысл знака якобиана состоит в том, что в случае положительного якобиана ориентация контура при отображении сохраняется, а при отрицательном — меняется.*

47.11. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Все кривые (контуры), рассматриваемые в этом пункте, будут всегда предполагаться кусочно-гладкими; для краткости это каждый раз специально не оговаривается. Отметим еще, что во всякой области G любые две ее точки всегда можно соединить кусочно-гладкой кривой, например ломаной (см. лемму 1 в п.36.8), лежащей целиком в G.

Пусть задана плоская область G и на ней определены непрерывные функции $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$. Рассмотрим вопрос о том, при выполнении каких условий криволинейный интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ при произвольно фиксированных точках $A \in G$ и $B \in G$ не зависит от выбора кривой $\overset{\frown}{AB}$, их соединяющей и лежащей в G.

ЛЕММА 3. *Условие независимости рассматриваемого криволинейного интеграла от указанного пути интегрирования равносильно равенству нулю интеграла по любому замкнутому контуру, лежащему в области G.*

Доказательство 1. Действительно, пусть для любого замкнутого контура $\Gamma \subset G$ имеет место равенство $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = 0$ и даны две кривые $(\overset{\frown}{AB})_1$ и $(\overset{\frown}{AB})_2$, соединяющие в G точки A и B (рис. 78). Обозначим через $(\overset{\frown}{BA})_2$ кривую, получающуюся из $(\overset{\frown}{AB})_2$ заменой на ней ориентации на противоположную. Объединение $(\overset{\frown}{AB})_1 \cup (\overset{\frown}{BA})_2$ кривых $(\overset{\frown}{AB})_1$ и $(\overset{\frown}{BA})_2$ является замкнутым контуром, поэтому

$$\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1 \cup (\overset{\frown}{BA})_2} Pdx + Qdy = 0, \qquad (47.77)$$

но

$$\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1 \cup (\overset{\frown}{BA})_2} Pdx + Qdy =$$

$$= \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} Pdx + Qdy + \int\limits_{(\overset{\frown}{BA})_2} Pdx + Qdy =$$

$$= \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} Pdx + Qdy - \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_2} Pdx + Qdy. \qquad (47.78)$$

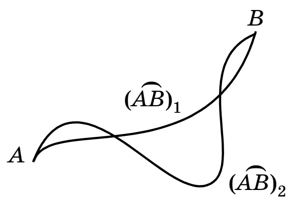


Рис. 78

Из (47.77) и (47.78) следует, что

$$\int_{(\widehat{AB})_1} Pdx + Qdy = \int_{(\widehat{AB})_2} Pdx + Qdy,$$

т. е. криволинейный интеграл $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования $\widehat{AB} \subset G$ при фиксированных $A \in G$ и $B \in G$.

2. Обратно: пусть интеграл $\int P\ dx + Q\ dy$ не зависит от пути интегрирования в указанном смысле и задан замкнутый контур Г, лежащий в G. Выберем на нем две точки A и $B \neq A$; тогда $\Gamma = \widehat{AB} \cup \widehat{BA}$ и

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int_{\widehat{AB}} + \int_{\widehat{BA}} = \int_{\widehat{AB}} - \int_{(\widehat{AB})_1} = 0,$$

где $(\widehat{AB})_1$ обозначает кривую, получающуюся из кривой $\widehat{BA}$ заменой на ней ориентации на противоположную. □

Сформулируем критерий независимости интеграла от пути интегрирования.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в плоской области G. Для того чтобы криволинейный интеграл $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$ при фиксированных точках $A \in G$ и $B \in G$ не зависел от пути интегрирования $\widehat{AB} \subset G$, необходимо и достаточно, чтобы выражение $Pdx + Qdy$ являлось полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y)$, определенной в области G:*

$$du = Pdx + Qdy \tag{47.79}$$

$\left(\text{это равносильно тому, что } \frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q, (x, y) \in G\right)$.

При выполнении этого условия для любых двух точек $A = (x_0, y_0) \in G$ и $B = (x_1, y_1) \in G$ и любой кривой $\widehat{AB}$, соединяющей эти точки в $G : \widehat{AB} \subset G$, имеет место тождество

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0). \tag{47.80}$$

Доказательство необходимости условия (47.79). Допустим, что рассматриваемый интеграл не зависит от пути интегрирования, лежащего в области G, а только от его начальной и конечной точек. Пусть $M_0 = (x_0, y_0) \in G$ и $M = (x, y) \in G$ и $\widehat{M_0M}$ — некоторая кусочно-гладкая кривая, соединяющая в G

точки M_0 и M (такая кривая, даже ломаная, всегда существует, см. лемму 1 в п. 36.8). Положим

$$u(M) = u(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\widehat{M_0M}} Pdx + Qdy.$$

Функция $u(x, y)$ однозначна, так как значение $u(M) = u(x, y)$ не зависит от выбора кривой, соединяющей в G точки M_0 и M.

Покажем, что

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \text{ и } \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

Зафиксируем точку $M = (x, y)$, а точку $M_h = (x + h, y) \in G$, $h \neq 0$, выберем так, чтобы отрезок MM_h, соединяющий M и M_h (который, очевидно, параллелен оси Ox и имеет длину $|h|$), содержался в G (рис. 79). Для всех достаточно малых чисел h это всегда имеет место (почему?). Тогда

$$u(x + h, y) - u(x, y) = \int\limits_{\widehat{M_0M_h}} Pdx + Qdy - \int\limits_{\widehat{M_0M}} Pdx + Qdy =$$
$$= \int\limits_{MM_h} Pdx + Qdy.$$

Вдоль отрезка MM_h координата y постоянна, поэтому $\int\limits_{MM_h} Qdy = 0$ и, следовательно, $u(x + h, y) - u(x, y) = \int\limits_{MM_h} Pdx = \int\limits_{x}^{x+h} P(t, y)dt$. Применив интегральную теорему о среднем, получим

$$u(x + h, y) - u(x, y) = P(x + \theta h, y)\, h, \;\; 0 < \theta < 1,$$

откуда

$$\frac{u(x + h, y) - u(x, y)}{h} = P(x + \theta h, y). \tag{47.81}$$

Правая часть этого равенства, в силу непрерывности функции $P(x,y)$, имеет предел при $h \to 0$, следовательно, и левая часть при $h \to 0$ имеет предел. Перейдя к пределу в (47.81), будем иметь

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y).$$

Совершенно аналогично доказывается и равенство $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$.

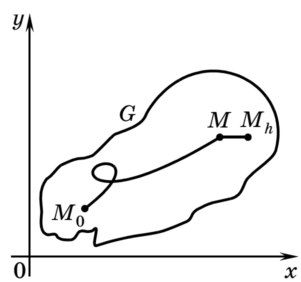


Рис. 79

Итак, существование функции $u(x, y)$, для которой имеет место соотношение (47.79), доказано.

Пусть теперь $A \in G$, $B \in G$, $\overset{\frown}{AB}$ — некоторая кривая, соединяющая в G точки A и B, и пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — ее представление и, следовательно, $A = (x(a), y(a))$, $B = (x(b), y(b))$. Тогда

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P dx + Q dy = \int\limits_a^b \Big(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\Big) dt =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) dt = \int\limits_a^b u'_t(x(t), y(t)) dt =$$

$$= u(x(b), y(b)) - u(x(a), y(a)) = u(B) - u(A),$$

т. е. формула (47.80) также доказана.

Доказательство достаточности условия (47.79) для независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования непосредственно следует из формулы (47.80). Действительно, начальная точка любого замкнутого контура Г совпадает с конечной, а поэтому, в силу (47.80),

$$\int\limits_{\Gamma} P dx + Q dy = u(A) - u(A) = 0.$$

Согласно лемме 3, это и означает независимость соответствующего криволинейного интеграла от пути интегрирования. □

Теорема, аналогичная теореме 4, имеет место и в пространственном случае для интегралов $\int\limits_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$. Ее доказательство проводится по той же схеме, что и в плоском случае.

Заметим, что, хотя доказанная теорема и дает необходимые и достаточные условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования, эти условия трудно проверяемы.

Если сузить класс рассматриваемых областей, то можно получить существенно более простой и эффективный критерий. Введем следующее определение.

Определение 9. *Плоская область G называется односвязной, если, каков бы ни был простой контур $\Gamma \subset G$, ограниченная область D, границей которой является Γ, содержится в G.*

Образно говоря, односвязность области означает, что область не имеет «дыр». Круг является примером односвязной области, круговое кольцо — неодносвязной (рис. 80).

Прежде чем формулировать другой критерий независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования, докажем лемму, которая понадобится при доказательстве этого критерия.

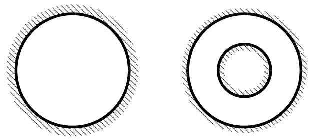


Рис. 80

ЛЕММА 4. *Пусть функции* $P(x, y)$ *и* $Q(x, y)$ *непрерывны в области* G, Γ — *гладкая кривая, лежащая в* G, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — *ее представление*, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ — *разбиение отрезка* $[a, b]$, Λ_τ — *ломаная с вершинами в точках* $(x(t_i), y(t_i))$, $i = 0, 1, \ldots, i_\tau$ (см. п. 16.5). *Тогда*

$$\lim_{|\tau| \to 0} \int_{\Lambda_\tau} P dx + Q dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy. \qquad (47.82)$$

Заметим, что, в силу равномерной непрерывности на отрезке $[a, b]$ функций $x(t)$ и $y(t)$, длины звеньев ломаной Λ_τ, т. е. длины отрезков с вершинами в точках $(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))$ и $(x(t_i), y(t_i))$, при $|\tau| \to 0$ также стремятся к нулю.

Доказательство. Кривая Γ является компактом; так как этот компакт не пересекается с замкнутым множеством $\boldsymbol{R}^2_{xy} \backslash G$, то расстояние между ними больше нуля (см. лемму 7 п. 35.2). Пусть η — какое-либо число такое, что $\rho(\Gamma, \boldsymbol{R}^2_{xy} \backslash G) > \eta > 0$. Обозначим через Γ_η совокупность всех точек плоскости, находящихся от Γ на расстоянии, не большем чем η. Множество Γ_η ограничено, замкнуто (см. в п. 35.3 лемму 11) и $\Gamma_\eta \subset G$.

В силу равномерной непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ на отрезке $[a, b]$, существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любых двух точек $t' \in [a, b]$ и $t'' \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|t' - t''| < \varepsilon$, выполняется неравенство

$$\rho(M', M'') = \sqrt{[x(t'') - x(t')]^2 + [y(t'') - y(t')]^2} < \eta,$$

где $M' = (x(t'), y(t'))$, $M'' = (x(t''), y(t''))$. Все точки отрезка с концами в точках M' и M'', очевидно, также находятся от точки M' на расстоянии, не большем чем η, и поэтому лежат в множестве Γ_η и, следовательно, в G. Это означает, что если мелкость $|\tau|$ разбиения τ отрезка $[a, b]$ такова, что $|\tau| < \varepsilon$, то все точки ломаной Λ_τ лежат в G и для таких разбиений τ имеет смысл интеграл $\int\limits_{\Lambda_\tau} P dx + Q dy$.

Рассмотрим интегралы $\int\limits_{\Gamma} Pdx$ и $\int\limits_{\Lambda_\tau} Pdx$. Положим

$$x_i = x(t_i),\ y_i = y(t_i),\ P_i = P(x_i, y_i),\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, 2, \dots, i_\tau,$$

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} P_i \Delta x_i.$$

Как известно (см. и. 47.2, свойство 4^0),

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau = \int\limits_{\Gamma} Pdx. \tag{47.83}$$

Пусть далее $M_i = (x_i, y_i)$ — вершины ломаной Λ_τ; тогда

$$\int\limits_{\Lambda_\tau} Pdx = \sum_{i=1}^{i_\tau} \int\limits_{M_{i-1}M_i} Pdx. \tag{47.84}$$

С другой стороны, заметим, что (используя обозначения из п. 47.2)

$$\int\limits_{M_{i-1}M_i} dx = \int\limits_{M_{i-1}M_i} \cos\alpha \, ds = |M_{i-1}M_i| \cos\alpha = \Delta x_i,$$

поэтому

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} P_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{i_\tau} \int\limits_{M_{i-1}M_i} P_i dx. \tag{47.85}$$

Обозначим через L_τ длину ломаной Λ_τ, через S — длину кривой Γ, а через $\omega(\delta; P)$ — модуль непрерывности функции $P(x, y)$ на компакте Γ_η и положим $\delta_\tau = \max\limits_{i = 1, 2, \dots, i_\tau} |M_{i-1}M_i|$. В силу равномерной непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ на отрезке $[a, b]$, будем иметь $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \delta_\tau = 0$. Заметив, что, в силу определения длины кривой, $L_\tau \leqslant S$, из (47.84) и (47.85) получим

$$\left| \int\limits_{\Lambda_\tau} Pdx - \sigma_\tau \right| \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} \left| \int\limits_{M_{i-1}M_i} |P - P_i| dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \omega(|\tau|; P) \sum_{i=1}^{i_\tau} |\Delta x_i| \leqslant \omega(|\tau|; P) L_\tau \leqslant \omega(|\tau|; P) S.$$

Отсюда, в силу равномерной непрерывности функции $P(x, y)$ на множестве Γ_η, имеем $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \left(\int\limits_{\Lambda_\tau} Pdx - \sigma_\tau \right) = 0$ и, значит, согласно (47.83),

$$\lim_{|\tau| \to 0} \int\limits_{\Lambda_\tau} Pdx = \int\limits_{\Gamma} Pdx. \tag{47.86}$$

Аналогично доказывается и равенство

$$\lim_{|\tau| \to 0} \int\limits_{\Lambda_\tau} Qdy = \int\limits_{\Gamma} Qdy. \tag{47.87}$$

Из (47.86) и (47.87) непосредственно и следует утверждение леммы, т. е. формула (47.82). □

З а м е ч а н и е. Утверждение, аналогичное лемме, справедливо и для криволинейных интегралов в пространстве, причем доказательство пространственного случая проводится по той же схеме, что и для плоского.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в плоской области G. Для того чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$ при произвольно фиксированных точках $A \in G$ и $B \in G$ не зависел от пути интегрирования $\widehat{AB} \subset G$, необходимо, а если область G односвязна, то и достаточно, чтобы во всех точках области G выполнялось равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о н е о б х о д и м о с т и. Пусть рассматриваемый интеграл не зависит от пути интегрирования, лежащего в области G, а зависит только от его начальной и конечной точек. Тогда существует функция $u = u(x, y)$ такая, что $du = Pdx + Qdy$, т. е. такая, что $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и, по условиям теоремы, производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, а следовательно, и смешанные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ непрерывны, то (см. п. 38.1) они равны, т. е. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о д о с т а т о ч н о с т и. Пусть сначала Γ — замкнутая ломаная без самопересечений, $\Gamma \subset G$, и D — ограниченная ею конечная часть плоскости, лежащая в силу односвязности области G в этой области: $D \subset G$. Очевидно, функции P и Q определены в замыкании $\overline{D}$ области D, поскольку $\overline{D} = D \cup \Gamma \subset G$. Многоугольник D можно разбить на треугольники, а каждый треугольник является областью, элементарной относительно обеих координатных осей. Поэтому для области D, согласно теореме 1 п. 47.8, имеет место формула Грина, а так как $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то

$$\int\limits_{\Gamma^+} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

Отсюда следует, что и для любой замкнутой ломаной Γ (быть может, самопересекающейся), лежащей в области G, также имеет место равенство

$$\int_{\Gamma^+} P dx + Q dy = 0, \tag{47.88}$$

поскольку любая ломаная распадается на конечное число замкнутых ломаных без самопересечений и отрезков, проходимых и в одном, и в другом направлениях. И по первым, и по вторым частям ломаной Γ рассматриваемый интеграл равен нулю.

Наконец, если $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — произвольный простой кусочно-гладкий контур $\Gamma \subset G$, то при достаточно мелких разбиениях $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ отрезка $[a, b]$ ломаные Λ_τ с вершинами в точках $r(t_i)$, $i = 0, 1, \ldots, i_\tau$, лежат в G. Поэтому, по доказанному, $\int\limits_{\Lambda_\tau} P dx + Q dy = 0$. Отсюда предельным переходом при $|\tau| \to 0$, согласно формуле (47.82), следует, что и

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = 0. \ \square$$

Иногда условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ называют *критерием полного дифференциала в односвязной области*, поскольку это условие необходимо и достаточно для того, чтобы выражение $P dx + Q dy$ в односвязной области G являлось дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, $(x, y) \in G$.

В заключение этого пункта отметим, что требование односвязности рассматриваемой области при доказательстве достаточности условий теоремы 7 для независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования является существенным и его нельзя отбросить. Подтвердим это примером.

Пример. $P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

Легко проверить, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{47.89}$$

для всех точек плоскости, исключая начало координат (0, 0). При $x \neq 0$ это следует, например, из того, что

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 > 0; \tag{47.90}$$

равенство (47.89) означает равенство смешанных вторых производных функции $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Таким образом, в этом случае за область G можно взять всю плоскость с «выколотым» началом координат: $G = R^2\setminus\{(0, 0)\}$. Область G, очевидно, не односвязна. В качестве замкнутого контура возьмем единичную окружность $\Gamma_0 = \{x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$; тогда

$$\int_{\Gamma_0} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma_0} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Следовательно, в этом случае условия (47.89) выполнены и существует замкнутый контур Γ_0, по которому интеграл не равен нулю. Нетрудно убедиться, что вообще по любой окружности Γ_r радиуса r с центром в начале координат

$$\int_{\Gamma_r} Pdx + Qdy = 2\pi. \tag{47.91}$$

Далее, каков бы ни был простой кусочно-гладкий контур Γ, являющийся границей ограниченной области D, содержащей начало координат (в этом случае говорят, что контур Γ содержит внутри себя начало координат), для него также

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = 2\pi. \tag{47.92}$$

Для доказательства этого возьмем окружность Γ_r такого радиуса r, что $\Gamma_r \subset D$; тогда Γ и Γ_r не пересекаются. Соединив контуры Γ и Γ_r отрезками Λ_1 и Λ_2, как показано на рис. 81, получим два замкнутых контура Γ_1 и Γ_2, не содержащих внутри себя начала координат и состоящих из дуг Γ_r' и Γ_r'', окружности Γ_r, частей Γ' и Γ'' контура Γ и отрезков Λ_1 и Λ_2.

В силу условия (47.89), для этих контуров справедливы равенства

$$\int_{\Gamma_1} Pdx + Qdy = 0, \quad \int_{\Gamma_2} Pdx + Qdy = 0.$$

Сложив эти равенства и опустив для краткости подынтегральные выражения, получим (рис. 81)

$$0 = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma'^+} + \int_{\Lambda_1^+} + \int_{\Gamma_r'^-} + \int_{\Lambda_2^+} + \int_{\Gamma''^+} + \int_{\Lambda_2^-} + \int_{\Gamma_r''^-} + \int_{\Lambda_1^-} = \int_{\Gamma'^+} + \int_{\Gamma''^+} - \int_{\Gamma_r'^+} - \int_{\Gamma_r''^+} = \int_{\Gamma^+} - \int_{\Gamma_r^+}.$$

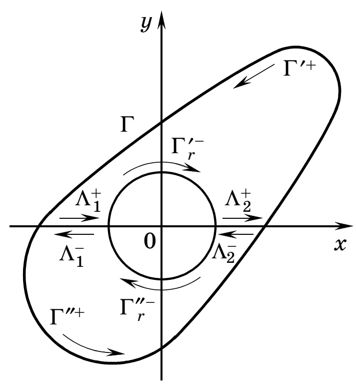


Рис. 81

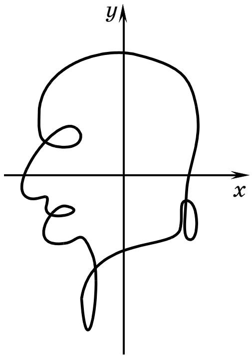


Рис. 82

Отсюда, в силу (47.91), и следует (47.92). Более того, это равенство выполняется и в случае, если контур Г, обходя «один раз» вокруг начала координат, образует конечное число «петель», не охватывающих начало координат (рис. 82), поскольку интеграл по этим петлям равен нулю.

Если M_0 — фиксированная точка рассматриваемой области G, $M_0 \in G$, $M \in G$, $\widehat{M_0M}$ — какая-либо кривая, соединяющая в G точки M_0 и M, то $u(M) = \int\limits_{\widehat{M_0M}} P dx + Q dy$ является уже многозначной функцией, значения которой определяются выбором различных путей, соединяющих точки M_0 и M. Если Γ_0 — какая-либо фиксированная кривая, соединяющая M_0 и M, то все значения функции u в точке M задаются формулой

$$u(M) = \int\limits_{\Gamma_0} P dx + Q dy + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

и каждый обход вокруг начала координат изменяет значение функции $u(M)$ на величину $\pm 2\pi$ в зависимости от направления обхода.

В данном случае в этом легко убедиться и непосредственно: из формулы (47.90) следует, что

$$\int\limits_{\Gamma_0} P dx + Q dy = \int\limits_{\Gamma_0} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \left(\operatorname{Arctg} \frac{y}{x}\right)_0,$$

где $\left(\operatorname{Arctg} \frac{y}{x}\right)_0$ — некоторое фиксированное значение $\operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$; поэтому $u(M) = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$ — многозначная функция.

Вдумчивый читатель заметил, что многие рассуждения, проведенные в этом примере, не зависят от конкретного вида функции P и Q и являются справедливыми всегда, когда мы имеем дело с одной изолированной «особой точкой», т. е. точкой, в которой нарушается условие (47.89). Конечно, при однократном «обходе» такой особой точки будет получаться не 2π, а, вообще говоря, какое-то другое число (может быть, нуль).

Результат, аналогичный теореме 5, имеет место и когда Г — пространственная кривая (см. п. 52.6).

УПРАЖНЕНИЕ 3. Доказать формулу

$$\iint_G v\Delta u dxdy = -\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy + \int_{\Gamma^+} v\frac{\partial u}{\partial \nu}ds,$$

где G — плоская область, для которой справедлива формула Грина, Γ — ограничивающий ее контур, ν — единичная внешняя нормаль к контуру Γ, а Δ — оператор Лапласа (см. п. 41.10).

§ 48
Несобственные кратные интегралы

48.1. Основные определения

Как и ранее для однократных интегралов, введем понятие несобственного кратного интеграла, т. е. кратного интеграла от функций, которые могут быть неограниченными и определенными на неограниченных областях. Определение кратного несобственного интеграла сформулируем в таком виде, что оно будет охватывать оба указанных случая (ср. с п. 29.1).

Определение 1. *Пусть G — открытое множество* (*ограниченное или неограниченное*) *в n-мерном пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Последовательность открытых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, будем называть последовательностью, монотонно исчерпывающей открытое множество G, если*:

1) $\overline{G}_k \subset G_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$;

2) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k = G$.

Здесь $\overline{G}$, как всегда, обозначает замыкание (см. п. 35.2) множества G.

З а м е ч а н и е. Мы уже встречались с понятием последовательности открытых измеримых по Жордану множеств монотонно исчерпывающих измеримое же (и, следовательно, ограниченное) открытое в R^n множество (см. замечание 3 в п. 44.6). Докажем, что для любого открытого множества $G \subset \boldsymbol{R}^n$ существует монотонно исчерпывающая его последовательность измеримых по Жордану открытых множеств.

Если $Q_k = \{x : |x| < k\}$ — шар радиуса $k \in N$, а $s_k = s_k(G \cap Q_k)$ — совокупность всех кубов ранга k, содержащихся в множестве

$G \cap Q_k$, то существует такая подпоследовательность k_m последовательности натуральных чисел, что последовательность открытых множеств $G_m = (s_{k_m})_{\text{int}}$, $m = 1, 2, \ldots$, состоящих из внутренних точек многогранников s_{k_m}, монотонно исчерпывает множество G. Выполнение условия $\overline{G}_m \subset G_{m+1}$ при выборе подпоследовательности k_m можно осуществить, выбрав для каждого номера m такой номер k_{m+1}, что $\overline{G}_m = s_{k_m} \subset$ $\subset (s_{k_{m+1}})_{\text{int}} = G_{m+1}$. Номер k_{m+1} существует, так как расстояние $\rho(s_{k_m}, \partial G)$ границы ∂G открытого множества G до компакта s_{k_m} положительно, а диаметры кубов, входящих в многогранники s_k, стремятся к нулю при $k \to \infty$. Условие $G =$ $= \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_{k_m}$ следует из того, что $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} s_k(G)$.

Определение 2. *Пусть на открытом множестве G задана функция f (ограниченная или неограниченная), интегрируемая по Риману на любом измеримом по Жордану открытом множестве D таком, что $\overline{D} \subset G$. Функция f называется интегрируемой в несобственном смысле на открытом множестве G, если для любой последовательности открытых измеримых по Жордану множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей множество G, существует предел $\lim\limits_{k \to \infty} \int f dG_k$, не зависящий от выбора указанной последовательности G_k, $k = 1, 2, \ldots$.*

Этот предел называется несобственным интегралом от функции f по открытому множеству G и обозначается через $\int f dG$, или, более подробно,

$$\iint\limits_G \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Таким образом,

$$\int f dG = \lim_{k \to \infty} \int f dG_k. \tag{48.1}$$

Если интеграл $\int f dG$ существует, то говорят также, что он сходится, а в противном случае — что он расходится.

Следует заметить, что в случае $n = 1$ данное здесь определение несобственного интеграла не эквивалентно определению несобственного интеграла от функции одного переменного, данного в § 29. Это связано не только с терминами, в которых

формируются определения (там несобственным интегралом называлась определенного вида функция), а прежде всего с тем, что в указанном параграфе мы в качестве множеств G_k брали лишь интервалы, т. е. одномерные открытые измеримые множества весьма специального вида. Поэтому введенное в настоящем параграфе понятие несобственного интеграла (48.1) будем применять только в случае $n \geqslant 2$, сохранив для случая $n = 1$ прежнее понятие несобственного интеграла.

Если открытое множество G измеримо по Жордану и функция f интегрируема на G, то несобственный интеграл от функции f совпадает с обычным интегралом Римана; это следует из полной аддитивности интеграла Римана (см. п. 44.6).

Определение (48.1) позволяет перенести на несобственные интегралы ряд свойств собственных интегралов: аддитивность интеграла по множествам, линейность интеграла, интегрирование неравенств, сведение кратного интеграла к повторному, формулу замены переменного и др.

Например, если $x = F(u)$ — непрерывно дифференцируемое взаимно-однозначное отображение открытого множества $D \subset \boldsymbol{R}_u^n$ на открытое множество $G \subset \boldsymbol{R}_x^n$ и якобиан $J(u)$ этого отображения нигде не обращается в нуль на D, то для любой непрерывной на G функции f справедлива формула замены переменного в интеграле:

$$\int f(x)dG = \int f((F(u))|J(u)|dD.$$

Доказать это можно точно так же, как доказана теорема 2 в п. 46.2; следует только вместо полной аддитивности интеграла использовать определение (48.1).

Используя аддитивность несобственного кратного интеграла по множествам интегрирования, определение (48.1) можно переписать в другом эквивалентном виде. Замечая, что для измеримого открытого множества $G_0 \subset G$ справедливо равенство

$$\int fdG - \int fdG_0 = \int fd(G \backslash \overline{G}_0),$$

можно сказать, что интеграл $\int fdG$ сходится тогда и только тогда, когда для любой последовательности измеримых открытых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей множество G, существуют интегралы $\int fd(G \backslash \overline{G}_k)$ и

$$\lim_{k \to \infty} \int fd(G \backslash \overline{G}_k) = 0. \tag{48.2}$$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Доказать формулу (48.2); в частности, показать, что интегралы $\int fdG$ и $\int fd(G \backslash \overline{G}_0)$ одновременно сходятся или расходятся.

48.2. Несобственные интегралы от неотрицательных функций

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция f неотрицательна на открытом множестве $G \subset \boldsymbol{R}^n$. Тогда, какова бы ни была последовательность $\{G_k\}$ открытых измеримых по Жордану множеств G_k, монотонно исчерпывающих множество G, предел*

$$\lim_{k \to \infty} \int f(x) dG, \tag{48.3}$$

конечный или равный $+\infty$, всегда существует и не зависит от выбора указанной последовательности $\{G_k\}$.

Если он конечен, то интеграл $\int f(x)dG$ существует и, следовательно, предел (48.3) равен этому интегралу, если же предел (48.3) бесконечен, то интеграл $\int f(x)dG$ не существует.

В последнем случае пишут $\int f(x)dG = +\infty$. Это оправдывается тем, что, в силу сформулированной теоремы, для любой другой последовательности $\{D_k\}$ открытых измеримых множеств D_k, монотонно исчерпывающих множеств G, также имеем $\lim\limits_{k \to \infty} \int f(x)dG_k = +\infty$.

Доказательство. Пусть G_k, $k = 1, 2, \ldots$, — последовательность измеримых открытых множеств, монотонно исчерпывающая открытое множество G. Тогда, согласно определению такой последовательности, $G_k \subset G_{k+1}$, а так как $f \geqslant 0$, то $\int f dG_k \leqslant \int f dG_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, всегда существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{k \to \infty} \int f dG_k = I_1$.

Пусть теперь D_k, $k = 1, 2, \ldots$, — какая-либо другая последовательность измеримых множеств, монотонно исчерпывающая открытое множество G. В силу доказанного выше, существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{k \to \infty} \int f dD_k = I_2$.

Покажем, что

$$I_1 = I_2. \tag{48.4}$$

Для любого фиксированного элемента G_k первой последовательности существует номер $k_0 = k_0(k)$ такой, что

$$\overline{G}_k \subset D_{k_0}. \tag{48.5}$$

В самом деле, $\overline{G_k}$ — измеримое и, следовательно, ограниченное множество, поэтому его замыкание $\overline{G_k}$ также ограничено, т. е. является компактом. В силу этого, существование такого номера k_0, что имеет место включение $D_{k_0} \supset \overline{G}_k$, вытекает из леммы Гейне—Бореля (см. п. 35.3), так как

система множеств $\{D_k\}$ образует открытое покрытие компакта $\overline{G_k}$ и, следовательно, из него можно выделить конечное покрытие $\{D_1, D_2, \dots, D_{k_0}\}$. Ясно, что, в силу включений $D_1 \subset \subset D_2 \subset \dots \subset D_{k_0}$, выполняется включение (48.5).

Теперь заметим, что, в силу условия $f \geqslant 0$, из включения (48.5) вытекает, что $fdG_k \leqslant fdD_{k_0}$. Но, очевидно, $fdD_{k_0} \leqslant I_2$, поэтому при любом $k = 1, 2, \dots, \int fdG_k \leqslant I_2$. Перейдя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим $I_1 \leqslant I_2$.

Подобным же образом доказывается и неравенство $I_1 \geqslant I_2$. □

Пример. Рассмотрим интеграл $I = \iint\limits_{\boldsymbol{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$. Положим $G_k = \{(x, y) : x^2 + y^2 < k^2\}$, $k = 1, 2, \dots$. Эта последовательность является последовательностью открытых квадрируемых множеств (в данном случае просто кругов), монотонно исчерпывающей всю плоскость $\boldsymbol{R}^2$.

Пусть $I_k = \iint\limits_{G_k} e^{-x^2-y^2}dxdy$. Перейдем к полярным координатам:

$$I_k = \iint\limits_{G_k} e^{-r^2} r dr d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^k e^{-r^2} r dr = -2\pi \frac{e^{-r^2}}{2}\bigg|_0^k = \pi(1 - e^{-k^2}).$$

Отсюда, согласно определению (48.1),

$$I = \lim_{k \to \infty} I_k = \pi. \qquad (48.6)$$

Формула (48.6) позволяет найти величину интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx,$$

называемого *интегралом Пуассона** и часто встречающегося в приложениях. Действительно, обозначая через D_k квадрат $\{(x, y): |x| \leqslant k, |y| \leqslant k\}$, $k = 1, 2, \dots$, и, применив к интегралу по D_k от функции $e^{-x^2-y^2}$ формулу сведения кратного интеграла к повторному (см. п. 45.1), получим

$$I = \iint\limits_{\boldsymbol{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{k \to \infty} \iint\limits_{D^k} e^{-x^2-y^2}dxdy =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int\limits_{-k}^{k} dx \int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{k \to \infty} \int\limits_{-k}^{k} \left(\int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2}\, dx \right) \int\limits_{-k}^{k} e^{-y^2}\, dy =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left(\int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2}dx \right)^2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx \right)^2.$$

* С. Пуассон (1781—1840) — французский физик и математик.

Поэтому из (48.6) сразу следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

ТЕОРЕМА 2 (признак сравнения). *Пусть на открытом множестве G выполняются неравенства $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, $x \in G$. Тогда из сходимости интеграла $\int g(x) dG$ следует сходимость интеграла $\int f(x) dG$, а из расходимости интеграла $\int f(x) dG$ следует расходимость интеграла $\int g(x) dG$.*

Эта теорема доказывается аналогично подобной теореме в одномерном случае (см. п. 29.3).

В качестве примеров и эталонов для сравнения с другими интегралами рассмотрим интегралы

$$\int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \geqslant 1} \frac{dx_1 \dots dx_n}{\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right)^{\alpha}}, \qquad (48.7)$$

$$\int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1} \frac{dx_1 \dots dx_n}{\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right)^{\alpha}}. \qquad (48.8)$$

Первый интеграл берется по внешности единичного шара; второй — по самому шару.

Для исследования этих интегралов удобно ввести *сферические координаты* $\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ в n-мерном пространстве. Они вводятся по формулам

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho \cos\varphi_{n-1} \cos\varphi_{n-2} \dots \cos\varphi_2 \cos\varphi_1, \\
x_2 &= \rho \cos\varphi_{n-1} \cos\varphi_{n-2} \dots \cos\varphi_2 \sin\varphi_1, \\
x_3 &= \rho \cos\varphi_{n-1} \cos\varphi_{n-2} \dots \cos\varphi_3 \sin\varphi_2, \qquad (48.9) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_i &= \rho \cos\varphi_{n-1} \dots \cos\varphi_i \sin\varphi_{i-1}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n &= \rho \sin\varphi_{n-1},
\end{aligned}$$

где

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi_i \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1.$$

С помощью этих формул декартовым координатам $x_1, \dots, x_n$ точки пространства сопоставляются сферические координаты $\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ и обратно. При этом следует иметь в виду, что, подобно полярным координатам на плоскости, здесь не существует полного взаимно-однозначного соответствия между

множествами n чисел $(x_1, \dots, x_n)$ и $(\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$. Отметим, что $\rho = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Элементарными, но несколько громоздкими вычислениями, которые не будем здесь приводить, можно показать, что якобиан этого преобразования имеет вид

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} = \rho^{n-1} \cos\varphi_2 \cos^2\varphi_3 \dots \cos^{n-2}\varphi_{n-1}.$$

Положим для краткости

$$\Phi(\varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) = \cos\varphi_2 \cos^2\varphi_3 \dots \cos^{n-2}\varphi_{n-1}.$$

Легко убедиться, что $\Phi(\varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) \geqslant 0$ и что

$$c = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \dots \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi(\varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} > 0.$$

Это сразу следует из следствия свойства 9^0 кратных интегралов в п. 44.6.

Исследуем теперь сходимость интеграла (48.7). В качестве последовательности открытых измеримых множеств G_k, $k = 1, 2, \dots$, монотонно исчерпывающей внешность единичного шара Q, возьмем последовательность множеств

$$G_k = \left\{x = (\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) : 1 + \frac{1}{k} < \rho < k\right\}, \ k = 1, 2, \dots .$$

Перейдя к сферическим координатам, получим

$$\int \dots \int\limits_{G_k} \frac{dx_1 \dots dx_n}{(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})^\alpha} =$$

$$= \int\limits_{1+1/k}^{k} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \dots \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^{n-1-\alpha}\, \Phi(\varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) d\rho d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} =$$

$$= c \int\limits_{1+1/k}^{k} \rho^{n-1-\alpha} d\rho.$$

Таким образом, вопрос о сходимости интеграла (48.7) свелся к сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \rho^{n-1-\alpha} d\rho$, который, как известно (см. п. 33.3), сходится при $n - 1 - \alpha < -1$, т. е. при $\alpha > n$, и расходится при $\alpha \leqslant n$. Итак, доказана следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Интеграл* (48.7) *сходится, если* α *больше размерности пространства, и расходится в противном случае.*

Рассмотрим теперь интеграл (48.8). Положив

$$G_k = \left\{x = (\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) : \frac{1}{k} < \rho < 1 - \frac{1}{k}\right\}, \ k = 3, 4, \dots ,$$

получим

$$\int\limits_{G_k}\dots\int \frac{dx_1, \dots, dx_n}{(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})^\alpha} =$$

$$= \int\limits_{1/k}^{1-1/k}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\dots\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^{n-1-\alpha}\Phi(\varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})d\rho d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} =$$

$$= c\int\limits_{1/k}^{1-1/k}\rho^{n-1-\alpha}d\rho.$$

Таким образом, вопрос о сходимости интеграла (48.8) свелся к сходимости интеграла $\int\limits_0^1 \rho^{n-1-\alpha}d\rho$. Этот интеграл, как известно, сходится, если $n - 1 - \alpha > -1$, т. е. если $\alpha < n$, и расходится в противном случае. Полученный результат сформулируем снова в виде леммы.

ЛЕММА 2. *Интеграл* (48.8) *сходится, если* α *меньше размерности пространства, и расходится в противном случае.*

Подобно одномерному случаю (см. п. 29.3), с помощью интегралов (48.7) и (48.8) можно сформулировать критерии сходимости несобственных кратных интегралов, однако мы не будем на этом подробно останавливаться.

48.3. Несобственные интегралы от функций, меняющих знак

Определение 3. *Несобственный интеграл* $\int f dG$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл* $\int |f| dG$.

Для изучения абсолютной сходимости интеграла от функции $f(x)$ будут полезны функции

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } f(x) < 0; \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{если } f(x) \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } f(x) > 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$f_+ = \frac{|f| + f}{2}, \quad f_- = \frac{|f| - f}{2}, \tag{48.10}$$

$$0 \leqslant f_+(x) \leqslant |f(x)|, \quad 0 \leqslant f_-(x) \leqslant |f(x)|, \tag{48.11}$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x). \tag{48.12}$$

Из формул (48.10) следует, что если функция f интегрируема по Риману на некоторой измеримой по Жордану области, то и функции f_+ и f_- интегрируемы по Риману на этой облас-

ти; из первой формулы (48.12) следует обратное утверждение. Поэтому из (48.10)—(48.12) следует, что интеграл $\int f dG$ *абсолютно сходится тогда и только тогда, когда сходятся интегралы* $\int f_+ dG$ *и* $\int f_- dG$.

Как и в случае несобственных интегралов от функции одного переменного, из абсолютной сходимости кратного интеграла следует его сходимость (при этом, конечно, рассматриваются только такие функции, которые интегрируемы на каждом открытом измеримом множестве, содержащемся вместе со своим замыканием в открытом множестве, по которому производится интегрирование). Это сразу получается на основании формул (48.11), первой формулы (48.12) и из теоремы 2 настоящего параграфа (см. п. 48.2). Однако для кратных несобственных интегралов справедлива и обратная теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Если кратный интеграл* $\int f dG$ ($n \geqslant 2$) *сходится, то он и абсолютно сходится.*

Эта неожиданная на первый взгляд теорема связана с отличием определения несобственных интегралов от функции одного из n переменных ($n > 1$), указанных в начале этого параграфа*.

Доказательство теоремы. Пусть интеграл $\int f dG$ абсолютно расходится, т. е. для некоторой (значит, и для всякой, см. теорему 1 в п. 48.2) последовательности открытых измеримых по Жордану множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей открытое множество G, имеем $\lim\limits_{k \to \infty} \int |f| dG_k = +\infty$. Без ограничения общности (переходя, если надо, к подпоследовательности) можно предполагать, что

$$\int |f| dG_{k+1} > 3 \int |f| dG_k + 2k, \quad k = 1, 2, \ldots . \qquad (48.13)$$

---

* Отметим, однако, что можно было бы и в n-мерном случае получить ту же связь между сходимостью и абсолютной сходимостью интеграла, что и в одномерном случае, если соответствующим образом ввести определение несобственного n-кратного интеграла. Например, в случае интегралов по всему пространству для этого достаточно в определении интеграла в качестве элементов монотонно исчерпывающей последовательности брать только n-мерные шары с центром в начале координат. Впрочем, если применить к одномерному интегралу определение несобственного интеграла, данное в п. 48.1, и понимать одномерный интеграл Римана в смысле § 44, то теорема 3 вместе с ее доказательством будет справедливой и при $n = 1$.

Пусть $A_k = G_{k+1} \setminus \overline{G_k}$; тогда A_k — открытое измеримое множество, и так как $G_k \subset G_{k+1}$, то (см. рис. 221) $G_{k+1} = A_k \cup \cup \overline{G_k}$ и

$$\int |f| dG_{k+1} = \int |f| dA_k + \int |f| dG_k.$$

Отсюда, в силу неравенства (48.13), $\int |f| dA_k > 2\int |f| dG_k + 2k$. Используя вторую формулу (48.12), получим

$$\int f_+ dA_k + \int f_- dA_k > 2\int |f| dG_k + 2k.$$

Пусть для определенности $\int f_+ dA_k \geqslant \int f_- dA_k$; тогда

$$2\int f_+ dA_k \geqslant \int f_+ dA_k + \int f_- dA_k > 2\int |f| dG_k + 2k$$

и, следовательно,

$$\int f_+ dA_k > \int |f| dG_k + k. \qquad (48.14)$$

Нашей целью является получение неравенства подобного типа не для функции f_+, а для функции f. Для этого, казалось бы, можно просто отбросить точки, в которых функция f_+ обращается в нуль; тогда на оставшемся множестве мы имели бы $f = f_+$. Однако получившееся множество может, вообще говоря, оказаться неизмеримым, а поэтому мы будем действовать обходным путем.

Из неравенства (48.14) следует, что при любом достаточно мелком разбиении $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ множества A_k (см. п. 44.3) для любой интегральной суммы Римана имеем

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} f_+(\xi_i)\mu E_i > \int |f| dG_k + k, \quad \xi_i \in E_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad i_\tau.$$

Выберем указанное разбиение τ открытого измеримого множества A_k таким, чтобы все элементы E_i этого разбиения, имеющие положительную меру, также были открытыми измеримыми по Жордану множествами. Обозначим через E_i^* те множества положительной меры $E_i \in \tau$, для которых $f_+(\xi) > 0$ во всех точках $\xi \in E_i$. Пусть $\tau^* = \{E_i^*\}$. Выбрав для тех $E_i \notin \tau^*$, у которых $\mu E_i > 0$, точки $\xi_i \in E_i$ так, что $f(\xi_i) = 0$, получим

$$\sum_i{}' f_+(\xi_i)\mu E_i^* > \int |f| dG_k + k, \qquad (48.15)$$

где (а также и в дальнейшем) знак «штрих» у суммы означает, что суммирование распространяется только на те индексы i,

для которых $E_i = E_i^*$. Положим $B_k = \bigcup_i{}' E_i^*$ (см. рис. 83). Очевидно, что B_k — открытое измеримое множество, лежащее в множестве A_k, а $\tau^* = \{E_i^*\}$ является его разбиением. На множестве B_k имеем $f_+ > 0$ и, следовательно, $f_+ = f$. Из неравенства (48.15) следует, что для нижней суммы Дарбу s_τ^* функции f на множестве B_k справедливо неравенство $s_{\tau^*}^* \geqslant \int f dG_k + k$. Отсюда при $|\tau| \to 0$, очевидно, имеем, что

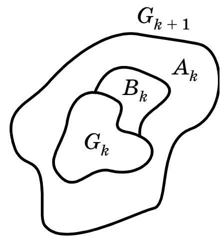


Рис. 83

$$\int f dB_k \geqslant \int |f| dG_k + k. \tag{48.16}$$

Заметим, что $f \geqslant -|f|$ и, следовательно,

$$\int f dG_k \geqslant -\int |f| dG_k. \tag{48.17}$$

Сложив неравенства (48.16) и (48.17), получим

$$\int f dB_k + \int f dG_k \geqslant k. \tag{48.18}$$

Пусть $D_k = B_k \cup G_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Очевидно, D_k — открытое измеримое множество и

$$G_k \subset D_k \subset G_{k+1}, \ k = 1, 2, \ldots . \tag{48.19}$$

В силу того что множества B_k и G_k не пересекаются (так как не пересекаются множества A_k и G_k из (48.18), имеем $\int f dD_k \geqslant k$, откуда

$$\lim_{k \to \infty} \int f dD_k = +\infty. \tag{48.20}$$

Из включения (48.19) следует, что множества D_k, $k = 1, 2, \ldots$, образуют последовательность измеримых открытых множеств, монотонно исчерпывающую открытое множество G, так как таковой являлась заданная последовательность G_k, $k = 1, 2, \ldots$, поэтому равенство (48.20) означает, что интеграл $\int f dG$ расходится. □

Итак, для кратных интегралов сходимость несобственного интеграла $\int f dG$ эквивалентна его абсолютной сходимости.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Заменив в определении кратного несобственного интеграла всюду открытые множества областями (в частности, рассматривая только монотонно исчерпывающие данную область последовательности, состоящие только из измеримых областей), показать, что и при таком «более узком» определении кратного несобственного интеграла сохраняется аналог теоремы 3.

§ 49
Некоторые геометрические и физические приложения кратных интегралов

49.1. Вычисление площадей и объемов

Пусть E — измеримое множество в $\boldsymbol{R}^n$. Как известно (см. п. 44.6),

$$\mu E = \int dE. \tag{49.1}$$

Таким образом, с помощью n-кратного интеграла можно вычислять меру измеримых множеств в n-мерном пространстве (площадь — в двухмерном, объем — в трехмерном). Если n-кратный интеграл (49.1) можно свести к повторному (см. § 45), то вычисление меры измеримого множества E n-мерного пространства сведется к вычислению $(n-1)$-кратного интеграла.

Пусть, например, D — открытое измеримое множество в $(n - 1)$-мерном пространстве и $\boldsymbol{R}^{n-1}_{x_1, \ldots, x_{n-1}}$, $x_n = f(x_1, \ldots$ $\ldots, x_{n-1})$ — неотрицательная функция, определенная и непрерывная на замыкании $\overline{D}$ множества D, а

$$G = \{x = (x_1, \ldots, x_n);\ (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D,\ 0 < x_n < f(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

(таким образом, G является n-мерным аналогом криволинейной плоской трапеции, рассмотренной нами в п. 28.1). Тогда

$$\mu G = \int dG = \int dD \int\limits_0^{f(x_1, \ldots, x_{n-1})} dx_n = \int f(x_1, \ldots, x_{n-1}) dD,$$

т. е.

$$\mu G = \overbrace{\int \cdots \int}^{n-1 \text{ раз}}_{D} f(x_1, \ldots, x_{n-1}) dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Меру произвольных (не обязательно измеримых по Жордану), в частности неограниченных, открытых множеств пространства $\boldsymbol{R}^n$, $n \geqslant 2$, если ее понимать в смысле определения п. 27.1 и 27.2, т. е. как нижнюю меру Жордана μ_*, можно вычислить с помощью несобственных интегралов. Действительно, пусть G — произвольное открытое множество в $\boldsymbol{R}^n$ и G_k, $k = 1, 2, \ldots$, — последовательность открытых измеримых множеств, монотонно исчерпывающих множество G (см. п. 48.1). Тогда, как известно (см. п. 27.2), $\lim\limits_{k \to \infty} \mu G_k = \mu_* G$. Но, в силу (49.1), $\mu G_k = \int dG_k$, поэтому $\mu_* G = \lim\limits_{k \to \infty} \int dG_k$.

По определению же кратного несобственного интеграла, $\lim\limits_{k \to \infty} \int dG_k = \int dG$. Таким образом,

$$\mu_* G = \int dG,$$

где интеграл в правой части равенства понимается, вообще говоря (а именно: если G не является измеримой областью), как несобственный.

Напомним, что для вычисления объемов тел часто оказывается удобным метод сечений (см. формулу (45.38)).

49.2. Физические приложения кратных интегралов

С помощью кратных интегралов можно вычислить различные физические величины: массу и заряд тела, центр тяжести, момент инерции, поток жидкости.

Найдем в качестве примера центр тяжести плоской фигуры. Пусть в некоторой квадрируемой области G, расположенной в первом координатном квадрате, т. е. в множестве точек (x, y), в которых $x > 0$, $y > 0$, распределена некоторая масса, вообще говоря, с переменной поверхностной плотностью $\rho(x, y)$, т. е. на замыкании $\overline{G}$ области G задана некоторая неотрицательная и непрерывная функция $\rho(x, y)$. Область G с распределенной в ней массой будем называть *фигурой* S, а величину

$$M = \iint\limits_G \rho(x, y)dx\, dy \tag{49.2}$$

— ее *массой*. Если $\rho(x, y)$ — не тождественный нуль, то $M > 0$.

Определим и найдем центр тяжести фигуры S. Возьмем какое-либо разбиение $\tau = \{G_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, области G (см. п. 44.3). Множество G_i с распределенной в нем массой плотности $\rho(x, y)$, $(x, y) \in G_i$, назовем фигурой S_i. Выберем по некоторой точке $(\xi_i, \eta_i) \in G_i$. Величину $m_i = \rho(\xi_i, \eta_i)\mu G_i$ назовем приближенным значением массы фигуры S_i (естественность такого названия следует из формулы (49.2)). Величины же $m_i\xi_i$ и $m_i\eta_i$ назовем приближенными значениями статистических моментов фигуры S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, соответственно относительно координатных осей Oy и Ox (естественность этого названия следует из того, что статическими моментами материальной точки массы m с координатами (x, y) относительно

осей Ox и Oy называются величины my и mx, см. п. 28.6). Наконец величины

$$S_x(\tau) = \sum_{i=1}^{k} \eta_i m_i = \sum_{i=1}^{k} \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i)\mu G_i,$$
$$S_y(\tau) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i m_i = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i)\mu G_i \tag{49.3}$$

назовем приближенными статическими τ-моментами фигуры S относительно осей Ox и Oy, а их пределы при $|\tau| \to 0$

$$\lim_{|\tau|\to 0} S_x(\tau) = S_x, \quad \lim_{|\tau|\to 0} S_y(\tau) = S_y$$

— *статическими моментами фигуры* S относительно осей Ox и Oy. Эти пределы при сделанных предположениях существуют. Действительно, из формул (49.3) видно, что $S_x(\tau)$ и $S_y(\tau)$ являются интегральными суммами Римана для функций $y\rho(x, y)$ и $x\rho(x, y)$, поэтому

$$S_x = \iint_G y_\rho(x, y)dxdy, \quad S_y = \iint_G x_\rho(x, y)dxdy. \tag{49.4}$$

Определение 1. *Точка* (x_0, y_0) *называется центром тяжести (центром масс, центром инерции) фигуры* S, *если статические моменты относительно координатных осей материальной точки массы* M, *равной массе всей фигуры* S *и находящейся в точке* (x_0, y_0), *равны соответствующим статическим моментам фигуры* S, *т. е. если* $Mx_0 = S_y$, $My_0 = S_x$.

Из формул (49.2) и (49.4) получаем

$$x_0 = \frac{\iint_G x\rho(x, y)dxdy}{\iint_G \rho(x, y)dxdy}, \quad y_0 = \frac{\iint_G y\rho(x, y)dxdy}{\iint_G \rho(x, y)dxdy}.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что центр тяжести фигуры не зависит от выбора системы координат.

В качестве примера рассмотрим «криволинейную трапецию» G, порожденную графиками непрерывных неотрицательных функций $f(x)$ и $g(x)$, $0 \leqslant g(x) < f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$:

$$G = \{(x, y) : a < x < b,\ g(x) < y < f(x)\}.$$

Пусть $\rho(x, y) \equiv 1$. Так как $\iint_G dxdy \equiv \mu G$, то

$$x_0 = \frac{1}{\mu G}\iint_G xdxdy = \frac{1}{\mu G}\int_a^b xdx\int_{g(x)}^{f(x)} dy = \frac{1}{\mu G}\int_a^b [f(x) - g(x)]xdx,$$

$$y_0 = \frac{1}{\mu G}\iint_G ydxdy = \frac{1}{\mu G}\int_a^b dx\int_{g(x)}^{f(x)} ydy = \frac{1}{2\mu G}\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx,$$

отсюда

$$2\pi y_0 \mu G = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx - \pi\int\limits_a^b g^2(x)dx.$$

Здесь в правой части равенства стоит объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции G вокруг оси Ox. Мы пришли ко второй теореме Гульдина.

ТЕОРЕМА (теорема Гульдина). *Объем тела, полученного вращением плоской фигуры вокруг не пересекающей ее оси, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести фигуры.*

Пример. Вычислим с помощью второй теоремы Гульдина объем μQ тора Q, полученного вращением круга $(x-a)^2 + y^2 \leqslant r^2$, $0 < r \leqslant a$, вокруг оси O_y: $\mu Q = 2\pi a \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 a r^2$.

§ 50
Элементы теории поверхностей

50.1. Векторные функции нескольких переменных

Пусть на плоскости $\boldsymbol{R}^2$ задана декартова прямоугольная система координат u, v, множество $X \subset \boldsymbol{R}^2$ и каждой точке $M = (u, v) \in X$ поставлен в соответствие вектор $\boldsymbol{r}(M) = \boldsymbol{r}(u, v) \in \boldsymbol{R}^3$. Такие функции называются векторными функциями двух переменных u, v.

Аналогично случаю векторной функции одной переменной (см. § 15) для них вводятся понятия предела, непрерывности, дифференцируемости. Это было уже сделано раньше в § 36 и § 41 даже в более общем случае отображений $f\colon E \to \boldsymbol{R}^m$, $E \subset \boldsymbol{R}^n$. Напомним эти понятия в тех обозначениях, которые будут здесь употребляться для случая функций $\boldsymbol{r}(u, v)$.

Вектор $\boldsymbol{a}$ называется пределом при $(u, v) \to (u_0, v_0)$ векторной функции $\boldsymbol{r}(u, v)$, заданной на множестве $E \subset \boldsymbol{R}^2$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $(u, v) \in E$, для которых $|u - u_0| < \delta$, $|v - v_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\boldsymbol{r}(u, v) - \boldsymbol{a}| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$\lim_{(u,\, v) \to (u_0,\, v_0)} \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{a}.$$

Функция $\boldsymbol{r}(u, v)$ называется *непрерывной в точке* (u_0, v_0), если

$$\lim_{(u,\, v) \to (u_0,\, v_0)} \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}(u_0, v_0).$$

Если функция $\boldsymbol{r}(u, v)$ определена в окрестности точки (u_0, v_0), то ее частная производная $\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ в этой точке определяется равенством

$$\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0, v_0)}{\partial u} = \left.\frac{d\boldsymbol{r}(u, v_0)}{du}\right|_{u = u_0}.$$

Аналогично определяются и другие частные производные первого и высших порядков. При этом легко убедиться (см. п. 15.1), что если в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ введена декартова прямоугольная система координат x, y, z и $r\,(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ называются координатными функциями, то

$$\frac{\partial^n \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial u^k \partial v^{n-k}} = \left(\frac{\partial^n x(u, v)}{\partial u^k \partial v^{n-k}}, \frac{\partial^n y(u, v)}{\partial u^k \partial v^{n-k}}, \frac{\partial^n z(u, v)}{\partial u^k \partial v^{n-k}}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Векторная функция $\boldsymbol{r}\,(u, v)$ называется *дифференцируемой в точке* (u_0, v_0), если существуют такие постоянные векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, что

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) - \boldsymbol{r}(u_0, v_0) = \boldsymbol{a}\Delta u + \boldsymbol{b}\Delta v + \varepsilon(\Delta u, \Delta v)\rho,$$

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta u, \Delta v) = 0, \quad \Delta u = u - u_0, \quad \Delta v = v - v_0, \; \rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}.$$

Аналогично скалярному случаю легко убедиться, что в этом случае $\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0, v_0)}{\partial u}$, $\boldsymbol{b} = \frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0, v_0)}{\partial v}$ и, таким образом (опускаем обозначения аргумента),

$$\Delta \boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} dv + \boldsymbol{\varepsilon}\rho, \tag{50.1}$$

$$\lim_{\rho \to 0} \boldsymbol{\varepsilon} = 0, \quad du \stackrel{\text{def}}{=} \Delta u, \quad dv \stackrel{\text{def}}{=} \Delta v.$$

Функция

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} dv \tag{50.2}$$

называется *дифференциалом дифференцируемой функции* $\boldsymbol{r}(u, v)$ в данной точке. Из формул (50.1) и (50.2) следует, что

$$\Delta \boldsymbol{r} = d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\varepsilon}\rho, \quad \lim_{\rho \to 0} \boldsymbol{\varepsilon} = 0.$$

Подобно скалярному случаю для векторной функции $\boldsymbol{r}(u, v)$, имеющей в окрестности точки (u_0, v_0) непрерывные частные производные до порядка n включительно, имеет место формула Тейлора

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d^k \boldsymbol{r}(u_0, v_0) + \boldsymbol{o}(\rho^n), \quad \rho \to 0, \tag{50.3}$$

где

$$d^k\boldsymbol{r}(u_0, v_0) = \left(du\frac{\partial}{\partial u} + dv\frac{\partial}{\partial v}\right)^{\{k\}}\boldsymbol{r}(u_0, v_0),$$

$$\boldsymbol{o}(\rho^n) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta u, \Delta v)\rho^n, \quad \lim_{\rho\to 0} \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta u, \Delta v) = \mathbf{0}.$$

Формулу Тейлора для векторной функции можно получить, использовав разложение по формуле Тейлора координатных векторных функций или непосредственно, рассуждая по аналогии со скалярным случаем.

Если вектор $\boldsymbol{r}(u, v) \in \boldsymbol{R}^3$ рассматривать как радиус-вектор, то векторная функция $\boldsymbol{r}(u, v)$ задает отображение множества E, на котором она задана, в пространство $\boldsymbol{R}^3$: каждой точке $(u, v) \in E$ она ставит в соответствие точку $r(u, v)$ — конец радиуса-вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$.

50.2. Элементарные поверхности

Будем рассматривать отображения плоских областей и их замыканий (напомним, что замыкание области называется замкнутой областью) в пространство $\boldsymbol{R}^3$. Области будем обозначать, как правило, буквой D*, а их границу, как обычно, ∂D.

Определение 1. *Элементарной поверхностью называется непрерывное отображение*

$$f: \overline{D} \to \boldsymbol{R}^3 \tag{50.4}$$

замыкания $\overline{D}$ плоской области D в пространство $\boldsymbol{R}^3$, а образ $f(\overline{D})$ множества $\overline{D}$ в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ при рассматриваемом отображении — носителем этой поверхности.

Таким образом,

$$f(M) \in \boldsymbol{R}^3, \ M \in \overline{D} \subset \boldsymbol{R}^2.$$

Подчеркнем, что при определении элементарной поверхности не предполагается, что отображение (50.4) является взаимно-однозначным. Точка носителя поверхности (50.4), в которую отображаются по крайней мере две точки замыкания $\overline{D}$ области D, называется *кратной точкой* поверхности (50.4) или ее точкой *самопересечения*.

Таким образом, если точка P является кратной точкой поверхности (50.4), то существуют по крайней мере две такие точки $M_1 \in \overline{D}_1$ и $M_2 \in \overline{D}$, что $f(M_1) = f(M_2) = P$.

---

* От англ. domain — область.

Если элементарная поверхность (50.4) не имеет кратных точек, т. е. отображение (50.4) взаимно-однозначно отображает замыкание $\overline{D}$ области D в пространство $\boldsymbol{R}^3$, то элементарная поверхность называется *простой*.

В дальнейшем на плоскости $\boldsymbol{R}^2$ всегда будет введена прямоугольная система координат, например u, v. В этом случае будем употреблять следующие обозначения:

$$r\,(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} f(M), \quad M = (u, v). \tag{50.5}$$

Тем самым отображение (50.4) будет записываться в виде

$$r\,(u, v) \in \boldsymbol{R}^3, \quad (u, v) \in \overline{D}, \tag{50.6}$$

или в векторной форме

$$\boldsymbol{r}(u, v) \in \boldsymbol{R}^3, \quad (u, v) \in \overline{D}, \tag{50.7}$$

($r(u, v)$ — конец радиуса-вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$). При такой записи элементарной поверхности переменные u, v называются *координатами поверхности*, или ее *параметрами*.

Если в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ задана прямоугольная система координат (иногда будем выбирать ее специальным образом, исходя из целей, которые ставятся при изучении элементарной поверхности), то отображение (50.4) можно записать в координатном виде:

$$x = x(u, v), \;\; y = y(u, v), \;\; z = z(u, v), \;\; (u, v) \in \overline{D}, \tag{50.8}$$

где

$$f(M) \underset{(50.5)}{=} r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Отображения (50.4), (50.6) и (50.8) называются *представлениями элементарной поверхности*.

Если за параметры u и v поверхности можно взять две какие-либо координаты пространства $\boldsymbol{R}^3$, например x и y, то отображение (50.8) можно записать так: $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$; здесь $x = u$, $y = v$, $z = f(x, y)$. Такое задание элементарной поверхности называется *явным*.

Ясно, что элементарная поверхность, имеющая явное задание, является простой элементарной поверхностью.

В дальнейшем будут изучаться прежде всего дифференциальные свойства поверхностей определенных классов, состоящих из «достаточно гладких», т. е. достаточное число раз непрерывно дифференцируемых поверхностей. Поэтому определим понятие n раз непрерывно дифференцируемой элементарной поверхности.

Элементарная поверхность (50.4) называется n раз непрерывно дифференцируемой, если векторная функция (50.7) или, что равносильно, координатные функции (50.8), задающие отображение (50.4), n раз непрерывно дифференцируемы на замыкании $\overline{D}$ области D.

Напомним, что непрерывность частных производных в замыкании $\overline{D}$ области D понимается в смысле существования непрерывного продолжения этих производных с области D на ее границу ∂D (см. п. 39.3). В случае если в некоторой точке границы какая-либо частная производная, быть может, односторонняя, существует в обычном смысле, то ее значение совпадает с указанным непрерывным продолжением (см. там же упражнение 1).

Пример. Для элементарной бесконечно непрерывно дифференцируемой поверхности, заданной отображением

$$x = R\cos\psi\cos\varphi,\ \ y = R\cos\psi\sin\varphi,\ \ z = R\sin\psi,$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ \ -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

ее носителем является сфера с центром в начале координат и радиусом R. Весь меридиан $\varphi = 0$ этой сферы состоит из кратных точек.

Иногда термин «элементарная поверхность» (в случаях, где это не может привести к недоразумению) употребляется и в смысле «носитель элементарной поверхности».

50.3. Эквивалентные элементарные поверхности. Параметрически заданные поверхности

Если вспомнить определение кривой (см. п. 16.1 и 16.2), то понятие элементарной поверхности окажется аналогичным понятию пути. Кривая определялась как класс в определенном смысле эквивалентных путей. Подобным же образом естественно считать некоторые элементарные поверхности эквивалентными между собой и определить поверхность как класс эквивалентных элементарных поверхностей.

Определение 2. *Элементарная поверхность*

$$f(M) \in \boldsymbol{R}^3,\ \ M \in \overline{D} \tag{50.9}$$

называется эквивалентной элементарной поверхности

$$f_1(M) \in \boldsymbol{R}^3,\ \ M \in \overline{D}_1 \tag{50.10}$$

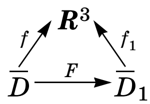
(*здесь* D *и* D_1 *— плоские области*), *если существует такое гомеоморфное* (*см. определение* 5 *в п.* 36.7) *отображение* F *замкнутой области* $\overline{D}$ *на замкнутую область* $\overline{D}_1$, *при котором внутренние точки переходят во внутренние, а граничные — в граничные* (*т. е.* D *отображается на* D_1, *а* ∂D *— на* ∂D_1), *и для каждой точки* $M \in \overline{D}$ *выполняется равенство*

$$f(M) = f_1(F(M)), \tag{50.11}$$

т. е. $f = f_1 \circ F$.

В этом случае F называется отображением, осуществляющим эквивалентность элементарной поверхности (50.9) с элементарной поверхностью (50.10) (или, что то же самое, отображения f с отображением f_1). Если f эквивалентно f_1, то пишут $f \sim f_1$.

Схематически определение эквивалентных отображений можно изобразить диаграммой, где стрелками изображены рассматриваемые отображения и результат отображений не зависит от выбора пути на диаграмме:



Очевидно, что:

1^0. *Всякое отображение эквивалентно самому себе*: $f \sim f$ (здесь отображением, осуществляющим эквивалентность, является тождественное отображение) — с в о й с т в о р е ф л е к с и в н о с т и.

2^0. *Если* $f \sim f_1$, *то* $f_1 \sim f$ — с в о й с т в о с и м м е т р и ч н о с т и.

3^0. *Если* $f \sim f_1$ *и* $f_1 \sim f_2$, *то* $f \sim f_2$ — с в о й с т в о т р а н з и т и в н о с т и.

Если f и f_1 — эквивалентные непрерывные отображения соответственно замкнутых областей $\overline{D}$ и $\overline{D}_1$, то из (50.11) следует, что образы множеств $\overline{D}$ и $\overline{D}_1$ при отображениях f и f_1 совпадают:

$$f(\overline{D}) = f_1(\overline{D}), \tag{50.12}$$

т. е. две эквивалентные элементарные поверхности имеют одинаковый носитель.

Заметим еще, что условия, наложенные на эквивалентные отображения в определении 2, независимы. Именно: из того, что F является гомеоморфным отображением замкнутой области $\overline{D}$ на замкнутую область $\overline{D}_1$, не следует, что оно перево-

дит внутренние точки во внутренние. Например, если $D = \{(u, v) : u^2 + v^2 < 1\}$ — круг, а $D_1 = \{(u, v) : 0 < u^2 + v^2 < 1\}$ — круг с «выколотым» центром, то тождественное отображение (очевидно, являющееся гомеоморфным) $\overline{D}$ на $\overline{D}_1$ переводит внутреннюю точку (0, 0) области D в граничную точку (0, 0) области D_1.

Перейдем теперь к определению поверхности.

Определение 3. *Всякий класс S эквивалентных элементарных поверхностей называется поверхностью, или, более подробно, непрерывной параметрически заданной поверхностью.*

Каждая элементарная поверхность из этого класса, т. е. отображение $r(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, называется *представлением* поверхности S, тройка соответствующих координатных функций (50.6) — ее *координатным представлением*, а соответствующая векторная функция (50.7) — ее *векторным представлением*.

Очевидно, что поверхность S однозначно определяется каждым из своих представлений, так как если имеется какая-нибудь элементарная поверхность, то все эквивалентные ей элементарные поверхности получаются с помощью всевозможных отображений, осуществляющих эквивалентность. Таким образом, чтобы задать поверхность, надо задать некоторое ее представление.

Поверхность S, заданную каким-либо своим представлением, записанным в виде (50.4), (50.6), (50.7) или (50.8), будем обозначать соответственно одним из следующих способов:

$$S = \{f(M);\ M \in \overline{D}\},$$
$$S = \{r(u, v);\ (u, v) \in \overline{D}\}, \tag{50.13}$$
$$S = \{\boldsymbol{r}(u, v);\ (u, v) \in \overline{D}\},$$
$$S = \{x(u, v);\ y(u, v),\ z(u, v);\ (u, v) \in \overline{D}\}.$$

Для того чтобы поверхность могла быть задана тремя последними способами, на плоскости $\boldsymbol{R}^2$ должна быть задана система координат, а для того чтобы четвертым — еще и система координат в пространстве $\boldsymbol{R}^3$.

Поверхность однозначно определяется каждым из своих представлений, поэтому это позволяет (что часто очень удобно) правую часть каждого из равенств (50.13) понимать не как совокупность всех представлений поверхности S, а как некоторое вполне определенное ее представление.

Если $r\ (u,\ v)$; $(u,\ v) \in \overline{D}$ и $\rho(u_1,\ v_1)$, $(u_1\ v_1) \in \overline{D}_1$ — представления одной и той же поверхности S, то всякое отображение F, осуществляющее эквивалентность отображения $r(u,\ v)$ с отображением $\rho(u_1,\ v_1)$, в координатной записи имеет вид

$$u_1 = \varphi(u,\ v), \quad v_1 = \psi(u,\ v), \tag{50.14}$$

$$(u,\ v) \in \overline{D}, \quad (u_1,\ v_1) \in \overline{D}_1,$$

и называется *допустимым преобразованием параметров* u, v.

Как отмечалось выше, две эквивалентные поверхности имеют один и тот же носитель, поэтому носители всех элементарных поверхностей, составляющих поверхность, т. е. элементарных поверхностей, эквивалентных между собой, совпадают. Это делает естественным следующее определение.

Определение 4. *Общий носитель всех элементарных поверхностей, составляющих поверхность, называется носителем этой поверхности.*

Определим теперь, что называется точкой поверхности.

Точкой элементарной поверхности $f : \overline{D} \to \boldsymbol{R}^3$ назовем пару $(M,\ P)$, где $M \in \overline{D}$, $P = f(M) \in \boldsymbol{R}^3$, т. е. точку M замкнутой области $\overline{D}$ и ее образ P при отображении f. Коротко точка поверхности $f\colon\ \overline{D} \to \boldsymbol{R}^3$ обычно обозначается $f(M)$, соответственно $r\ (u,\ v)$ или $(x\ (u,\ v),\ y\ (u,\ v),\ z\ (u,\ v))$, где $M = (u,\ v) \in \overline{D}$.

Носителем точки $f(M)$ *элементарной поверхности* называется пространственная точка $P = f(M) \in \boldsymbol{R}^3$.

Определение 5. *Пусть элементарные поверхности* (50.9) *и* (50.10) *эквивалентны между собой и отображение* $F : \overline{D} \to \overline{D}_1$ *осуществляет их эквивалентность.*

Точка $f(M)$ *элементарной поверхности* (50.9) *называется эквивалентной точке* $f_1(M_1)$ *элементарной поверхности* (50.10), *если*

$$M_1 = F(M). \tag{50.15}$$

В этом случае будем писать

$$f(M) \sim f_1(M_1).$$

Легко проверить, что это соотношение эквивалентности обладает свойством рефлексивности, симметричности и транзитивности:

1^0. $f(M) \sim f(M)$.

2^0. *Если* $f(M) \sim f_1(M_1)$, *то* $f_1(M_1) \sim f(M)$.

3^0. *Если* $f(M) \sim f_1(M_1)$ *и* $f_1(M_1) \sim f_2(M_2)$, *то* $f(M) \sim f_2(M_2)$.

Очевидно, что из выполнения условий (50.15) и (50.11) следует, что две эквивалентные точки эквивалентных элементарных поверхностей имеют в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ один и тот же носитель.

Определение 6. *Каждый класс* $\{f(M)\}$ *эквивалентных между собой точек элементарных поверхностей, составляющих некоторую поверхность, называется точкой этой поверхности, а их общий носитель — носителем этой точки поверхности.*

Если M — внутренняя (граничная) точка области D, то точка $f(M)$ элементарной поверхности (50.9) называется ее *внутренней* (соответственно *краевой*) точкой. Краевые точки элементарной поверхности (50.9) — это те ее точки, которые задаются сужением отображения f на границу ∂D области D. Совокупность всех краевых точек элементарной поверхности называется ее *краем*.

Если $f(M) \sim f_1(M_1)$ и M — внутренняя (граничная) точка замкнутой области D (см. (50.9) и (50.10)), то, согласно определению 2, точка M_1 также является внутренней (соответственно граничной) точкой замкнутой области $\overline{D}_1$.

Точка $\{f(M)\}$ поверхности S называется *внутренней* (соответственно *краевой*) ее точкой, если каждая точка M (а для этого достаточно, чтобы хотя бы одна из них) является внутренней (соответственно граничной) точкой замкнутой области $\overline{D}$, на которой задано отображение f.

Совокупность всех краевых точек поверхности называется ее *краем*. Ясно, что край поверхности представляет собой совокупность всех краев ее представлений.

Каждая точка $\{f(M)\}$ поверхности S однозначно определяется каждой отдельной точкой $f(M)$, входящей в нее, т. е. в класс эквивалентных точек всевозможных представлений поверхности S, а каждая точка $f(M)$ элементарной поверхности (50.9) однозначно определяется точкой $M \in \overline{D}$, следовательно, и ее координатами, если задана координатная система. Таким образом, каждая точка поверхности S при выборе какого-либо ее представления, например, вида $r\,(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, однозначно определяется значениями параметров u, v. Поэто-

му в этом случае точку поверхности S вместо $\{(u, v), r(u, v))\}$ будем просто обозначать $r(u, v)$ (или, соответственно, $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ или $f(M)$).

Очевидно, что совокупность всех носителей точек поверхности составляет ее носитель.

Точка носителя поверхности, являющаяся носителем по крайней мере двух различных точек поверхности, называется *кратной точкой* или *точкой самопересечения* поверхности.

Если поверхность имеет хотя бы одно представление $f(M)$, $M \in \overline{D}$, которое взаимно однозначно отображает плоскую замкнутую область D в пространство $\boldsymbol{R}^3$, то и все другие ее представления взаимно однозначно отображают соответствующие плоские замкнутые области, на которых они заданы, в пространство. В этом случае поверхность не имеет кратных точек и называется *простой поверхностью*.

Для простых поверхностей, как и для простых дуг, точка носителя поверхности однозначно определяет точку поверхности. Поэтому можно не делать между ними различия.

Отметим, что поверхность, имеющая хотя бы одно явное представление, является простой поверхностью.

Понятие эквивалентных отображений замкнутых плоских областей можно вводить не только для непрерывных отображений, но и для других классов отображений, например для непрерывно дифференцируемых. В применении к параметрически заданным поверхностям это приводит к непрерывно дифференцируемым поверхностям. Их определение базируется на понятии отображений, эквивалентных относительно непрерывно дифференцируемых преобразований.

Определим это понятие. Как и раньше (см. п. 39.3), под функцией, непрерывно дифференцируемой в замыкании некоторой области, будем понимать такую функцию, которая имеет непрерывные в самой области производные, непрерывно продолжаемые на ее границу.

Отображение некоторой замкнутой области называется *непрерывно дифференцируемым*, если каждая координатная функция, задающая это отображение (см. п. 36.2), является непрерывно дифференцируемой функцией на рассматриваемой замкнутой области. При этом продолженные функции в этих случаях обозначаются теми же символами, что и исходные продолжаемые функции.

Если некоторое отображение $u_1 = \varphi(u, v)$, $v_1 = \psi(u, v)$ непрерывно дифференцируемо на замыкании $\overline{D}$ области D, то, согласно сделанному соглашению, это означает, в частности, что

якобиан $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ этого отображения непрерывно продолжаем с области D на ее замыкание $\overline{D}$ и его продолжение, обозначаемое тем же символом $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$, также будет называться якобианом.

Прежде всего сформулируем, что будем понимать под эквивалентными непрерывно дифференцируемыми отображениями. Для этого введем понятие регулярных отображений.

Определение 7. *Гомеоморфное отображение F замыкания $\overline{D}$ плоской области D на замыкание $\overline{D}_1$ плоской области D_1, переводящее внутренние точки во внутренние, а граничные — в граничные, называется регулярным отображением замкнутой области $\overline{D}$ на замкнутую область $\overline{D}_1$, если как само это отображение F, так и обратное ему F^{-1} непрерывно дифференцируемы соответственно на замкнутых областях $\overline{D}$ и $\overline{D}_1$.*

Заметим, что всякое регулярное отображение F замкнутой области $\overline{D}$ имеет во всех точках области D не равный нулю якобиан. Действительно, согласно определению 7, при отображении F образ каждой внутренней точки является внутренней точкой. В этих точках прямое и соответственно обратное отображения непрерывно дифференцируемы, поэтому их якобианы не могут обратиться в нуль, ибо их произведение равно единице (см. п. 41.6).

Отсюда следует, что якобиан регулярного отображения F не равен нулю и на замкнутой области $\overline{D}$. Действительно, в силу непрерывной продолжаемости якобианов как прямого, так и обратного отображений соответственно на замыкания $\overline{D}$ и $\overline{F(D)}$ областей D и $F(D)$, произведение этих якобианов равно единице и для всех точек замкнутой области $\overline{D}$.

Определение 8. *Пусть f и f_1 — непрерывные отображения замыканий $\overline{D}$ и $\overline{D}_1$ плоских областей D и D_1 в пространство $\boldsymbol{R}^3$ и пусть эти отображения непрерывно дифференцируемы в замкнутых областях $\overline{D}$ и $\overline{D}_1$. Отображения f и f_1 называются эквивалентными относительно непрерывно дифференцируемых преобразований, если существует такое регулярное отображение F замкнутой области $\overline{D}$ на замкнутую область $\overline{D}_1$, что для каждой точки $M \in \overline{D}$ выполняется условие* (50.11).

Это соотношение эквивалентности обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности и, следовательно, порождает разбиение множества всех элементарных поверхностей, задаваемых непрерывно дифференцируемыми представлениями, на классы эквивалентности.

Определение 9. *Всякое множество элементарных поверхностей, задаваемых непрерывно дифференцируемыми отображениями*

$$r = r\ (u, v),\ (u, v) \in \overline{D}, \tag{50.16}$$

*замыканий $\overline{D}$ плоских областей D в пространство $\boldsymbol{R}^3$ и эквивалентных относительно непрерывно дифференцируемых преобразований, называется непрерывно дифференцируемой поверхностью, а каждое отображение (*50.16) *— ее представлением.*

Подчеркнем, что если поверхность $S = \{r(u,\ v);\ (u,\ v) \in \overline{D}\}$ непрерывно дифференцируема, то это, в частности, означает, что каждое ее векторное представление $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,\ v),\ (u,\ v) \in \overline{D}$, имеет частные производные $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$, непрерывные в области D и непрерывно продолжаемые на ее границу. Согласно принятому соглашению, продолженные функции обозначаются теми же символами, что и продолжаемые*, поэтому можно считать, что функции $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ непрерывны на замкнутой области $\overline{D}$.

Аналогичным образом можно определить и другие классы параметрически заданных поверхностей, например дважды непрерывно дифференцируемые или вообще n раз непрерывно дифференцируемые параметрически заданные поверхности, а также понятие их точки и носителя.

Подобно тому, как в п. 47.3 было обобщено понятие непрерывно дифференцируемой кривой, можно обобщить и понятие непрерывно дифференцируемой поверхности. Это делается следующим образом. Взаимно-однозначное отображение замыкания одной плоской области на другую, переводящее внутренние точки во внутренние, граничные — в граничные, называется *регулярным в широком смысле*, если как само

---

* Точнее, это соглашение было принято (см. п. 39.3) для скалярных функций и, следовательно, для координат векторных функций, поэтому его естественно принять и для самих векторных функций.

это отображение, так и ему обратное непрерывны на замыканиях областей, на которых они заданы, и непрерывно дифференцируемы в самих этих областях. Если в определении 8 регулярные отображения заменить на регулярные в широком смысле, то получится определение отображений, эквивалентных относительно непрерывно дифференцируемых отображений в широком смысле.

Множество непрерывных отображений замыканий плоских областей в трехмерное пространство, непрерывно дифференцируемых в этих областях и эквивалентных в широком смысле относительно непрерывно дифференцируемых преобразований, называется *параметрически заданной непрерывно дифференцируемой поверхностью в широком смысле*, если среди рассматриваемых отображений существует хотя бы одно отображение, непрерывно дифференцируемое вплоть до границы.

Примером непрерывно дифференцируемой поверхности в широком смысле является полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$, заданная явным представлением $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Это представление не непрерывно дифференцируемо вплоть до границы $x^2 + y^2 = 1$ круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Однако если этот круг спроектировать из точки $(0,\ 0,\ -1)$ на рассматриваемую полусферу, то получится ее представление, непрерывно дифференцируемое вплоть до границы указанного круга.

При этом можно рассматривать поверхности, представления которых определены не на замыканиях плоских областей, а только на самих областях и даже на произвольных открытых множествах. Такие поверхности будем называть *открытыми*. Их носители могут быть неограниченными множествами, например гиперболоиды, параболоиды.

Окончательно можно сказать, что *параметрически заданной поверхностью какого-либо класса является некоторая совокупность эквивалентных между собой в определенном смысле отображений плоских областей или их замыканий в пространство, называемых ее представлениями.*

Понятие эквивалентности определяется в зависимости от выбора класса.

Определение 10. *Преобразования параметров, осуществляющие переход от одного представления поверхности к другому, ему эквивалентному, называются допустимыми.*

Таким образом, если $r(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, и $\rho(u_1, v_1)$, $(u_1, v_1) \in \overline{D}_1$ — два представления одной и той же параметрически заданной поверхности некоторого класса, а отображение $u_1 = \varphi(u, v)$, $v_1 = \psi(u, v)$ замкнутой области $\overline{D}$ на замкнутую область $\overline{D}_1$ является допустимым преобразованием параметров, то для всех точек $(u, v) \in \overline{D}$ выполняется соотношение (см. (50.1)) $r(u, v) = \rho(\varphi(u, v), \psi(u, v))$.

Параметрически заданная поверхность при заданном классе допустимых преобразований параметров однозначно определяется каждым своим представлением, поэтому, чтобы задать такую поверхность, достаточно задать лишь одно ее представление.

Следовательно, для таких поверхностей, как и для непрерывных поверхностей, имеет однозначный смысл их обозначение с помощью только одного их представления, т. е. только одной из элементарных поверхностей, составляющих заданную поверхность. Таким образом, при обозначении поверхности S некоторого класса одним из способов (50.13) можно считать, что в правой части каждого из равенств стоит не совокупность всех представлений рассматриваемой поверхности, а лишь одно из них. Так обычно мы и будем поступать.

Аналогично случаю элементарных поверхностей термин «поверхность» иногда употребляется (если это не может привести к недоразумению) и в смысле носителя поверхности.

Определим теперь понятие части поверхности.

Определение 11. *Пусть S — поверхность некоторого класса и $f(M)$ — какое-либо ее представление, $M \in \overline{D}$, D — плоская область.*

Если U — область, содержащаяся в D, то поверхность, представлением которой является сужение отображения f на замыкании $\overline{U}$ области U, называется частью поверхности S.

Можно в качестве U брать и произвольное открытое множество, лежащее в D, и рассматривать сужение отображения не на замыкании $\overline{U}$ множества U, а на самом U; в этом случае *открытую поверхность*, задаваемую сужением отображения f на множестве U, будем называть *открытой частью поверхности S*, а иногда и просто *частью поверхности S*. Эта открытая поверхность называется *окрестностью на поверхность S* всякой точки $f(M)$ поверхности S, где $M \in U$.

50.4. Поверхности, заданные неявно

Отметим еще один подход к понятию поверхности. Если $F(x, y, z)$ — непрерывная в некоторой трехмерной области функция, то поверхность, координаты точек носителя которой удовлетворяют уравнению

$$F(x, y, z) = 0, \tag{50.17}$$

называется *поверхностью, заданной неявно*. Не останавливаясь подробно на анализе такого подхода к понятию поверхности, отметим лишь, что в том случае, если функция F удовлетворяет в некоторой точке (x_0, y_0, z_0) условиям теоремы о неявных функциях (см. п. 41.1), часть поверхности (50.17) в некоторой окрестности указанной точки (т. е. пересечение этой окрестности с данной поверхностью) допускает явное представление, и можно сказать, что в этой ситуации часть поверхности, заданной неявно, локально сводится к поверхности, заданной явным представлением (см. п. 50.1). Только такой случай поверхностей, заданных неявно, встретится в дальнейшем, поэтому не будем специально останавливаться на разъяснении тех или иных понятий для общего случая поверхностей, заданных неявно.

В качестве простейшего примера поверхности, заданной неявно, отметим уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Точки, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, образуют поверхность шара единичного радиуса с центром в начале координат.

50.5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть

$$S = \{\boldsymbol{r}\ (u, v);\ \ (u, v) \in \overline{D}\} \tag{50.18}$$

—непрерывно дифференцируемая поверхность, заданная ее некоторым векторным представлением. Как и всякое ее векторное представление, оно является непрерывно дифференцируемой векторной функцией на замкнутой плоской области $\overline{D}$.

Будем для простоты считать, что пересечение каждой прямой $u = u_0$ или $v = v_0$ с замкнутой областью $\overline{D}$ состоит из одного отрезка (быть может, вырождающегося в точку) или пусто. Пусть, например, пересечение $\overline{D}$ с прямой $v = v_0$ не пусто; тогда $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v_0)$, $(u, v_0) \in \overline{D}$, ($v_0$ фиксировано) является представ-

лением некоторой непрерывно дифференцируемой кривой, которая называется *координатной линией* (*u-линией*). Вектор $\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (x_u, y_u, z_u)$ является касательным к ней вектором. Аналогично определяются другие координатные линии (*v-линии*) с помощью представления $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u_0, v)$, $(u_0, v) \in \overline{D}$ (u_0 фиксировано) и касательные к ним векторы $\boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (x_v, y_v, z_v)$.

Определение 12. *Точка $r(u, v)$ поверхности* (50.18), *для которой векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ не коллинеарны (линейно независимы), называется неособой при данном представлении этой поверхности. В противном случае, т. е. когда векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ коллинеарны в данной точке, она называется особой точкой поверхности при данном ее представлении.*

Если точка поверхности неособая, то в ней, в частности, $\boldsymbol{r}_u \neq 0$, $\boldsymbol{r}_v \neq 0$. Очевидно, что точка поверхности является неособой при данном представлении поверхности в том и только в том случае, когда в этой точке

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0. \tag{50.19}$$

Если поверхность задана явным представлением

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}, \tag{50.20}$$

то она не имеет особых точек. В самом деле, в этом случае $u = x$, $v = y$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} &x_u = 1, \ y_u = 0, \ z_u = f_x, \\ &x_v = 0, \ y_v = 1, \ z_v = f_y, \end{aligned} \tag{50.21}$$

поэтому $\boldsymbol{r}_x = (1, 0, f_x)$, $\boldsymbol{r}_y = (0, 1, f_y)$; отсюда явствует, что $|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} > 0$.

Рассмотрим кривую на поверхности (50.18). Пусть эта кривая задана непрерывно дифференцируемыми функциями

$$u = u(t), \ v = v(t), \ (u(t), \ v(t)) \in D, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

т. е. непрерывно дифференцируемым векторным представлением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}[u(t), v(t)], \quad (u(t), v(t)) \in D, \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{50.22}$$

причем $|\bar{r}_t'|^2 = u'^2 + v'^2(t) > 0$ на $[a, b]$.

Продифференцировав равенство (50.22), получим

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv; \tag{50.23}$$

здесь $du = u'(t)dt$, $dv = v'(t)dt$. Если точка поверхности, в которой рассматривается равенство (50.23), неособая, то она

неособая и для кривой (50.22), поэтому вектор $d\boldsymbol{r} \neq 0$ и является касательным к кривой (50.22). Равенство (50.23) показывает, что в данной точке $r\ (u_0,\ v_0)$ поверхности (50.18) касательная к любой кривой (50.22) на этой поверхности, проходящей через точку $r\ (u_0,\ v_0)$, лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{r}_u(u_0,\ v_0)$ и $\boldsymbol{r}_v(u_0,\ v_0)$.

Определение 13. *Плоскость, проходящая через точку* $r(u_0,\ v_0)$ *поверхности* (50.18), *в которой лежат все касательные к кривым* (50.22), *проходящим через эту точку, называется касательной плоскостью к поверхности в данной точке* (*называемой точкой касания*).

Если данная точка поверхности (50.18) неособая, то в ней всегда существует, и притом единственная, касательная плоскость: именно, в силу (50.23), ею является плоскость, проходящая через точку $r(u_0,\ v_0)$ параллельно векторам $\boldsymbol{r}_u(u_0,\ v_0)$ и $\boldsymbol{r}_v(u_0,\ v_0)$. Отсюда легко написать ее уравнение в векторном виде. Обозначив через $\boldsymbol{r}_0$ радиус-вектор точки касания, а через $\boldsymbol{r}$ — текущий радиус-вектор точек на касательной плоскости, получим (рис. 84) $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0,\ \boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v) = 0$ (в левой части равенства стоит смешанное произведение указанных векторов).

Если $\boldsymbol{r} = (x,\ y,\ z)$, $r_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$, $\boldsymbol{r}'_u = (x_u,\ y_u,\ z_u)$, $\boldsymbol{r}_v = (x_v,\ y_v,\ z_v)$, то уравнение касательной плоскости в координатном виде принимает следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0.$$

В случае явного задания поверхности, т. е. в виде $z = f(x,\ y)$ (см. (50.20)), в силу формул (50.21), уравнение касательной плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$z - z_0 = (x - x_0)f_x + (y - y_0)f_y, \qquad (50.24)$$

где f_x и f_y — частные производные $f_x(x,\ y)$ и $f_y(x,\ y)$ в точке $(x_0,\ y_0)$.

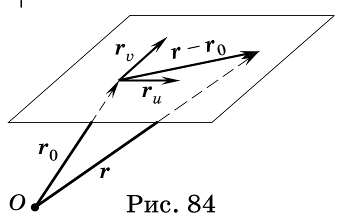


Рис. 84

Из этой формулы следует, что два определения касательной плоскости для поверхности с явным представлением (50.20), данные в настоящем пункте и ранее в п. 37.5, эквивалентны. В самом деле, оба определения приводят к одному и тому же уравнению (50.24).

Определение 14. *Прямая, проходящая через точку касания поверхности с касательной плоскостью и перпендикулярная этой плоскости, называется нормальной прямой к поверхности в указанной точке.*

Ее уравнение в общем случае в неособой точке поверхности имеет вид

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}.$$

В случае явного представления (50.20) эти уравнения принимают вид

$$\frac{x - x_0}{f_x} = \frac{y - y_0}{f_y} = -(z - z_0). \qquad (50.25)$$

Определение 15. *Всякий ненулевой вектор, коллинеарный нормальной прямой, проходящей через данную точку поверхности, называется нормалью к этой поверхности в указанной точке.*

Примером нормали в неособой точке поверхности является векторное произведение $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$, взятое в этой точке.

Согласно данному определению, в каждой неособой (при заданном представлении) точке $r\ (u,\ v)$ рассматриваемой поверхности при фиксированных значениях параметров u и v существует, и притом единственная, нормальная прямая. Следует иметь в виду, что если точка P пространства является кратной точкой поверхности, т. е. существуют по крайней мере две пары параметров (при заданном представлении) $(u_1,\ v_1)$ и $(u_2,\ v_2)$ таких, что $P = r(u_1,\ v_1) = r\ (u_2,\ v_2)$, то может, конечно, случиться, что этим парам параметров будут соответствовать различные нормальные прямые, тем самым в указанной точке P нормальная прямая будет не единственна.

Для поверхности, заданной неявно уравнением $F(x,\ y,\ z) = 0$, где $F(x,\ y,\ z)$ — непрерывно дифференцируемая в окрестности точки $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ функция, $F(x_0,\ y_0,\ z_0) = 0$, и в этой точке $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$, уравнение касательной плоскости в точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ имеет вид

$$(x - x_0)F_x + (y - y_0)F_y + (z - z_0)F_z = 0,$$

где F_x, F_y и F_z обозначают значения соответствующих частных производных, взятых в точке (x_0, y_0, z_0).

Вспомнив, что вектор с координатами F_x, F_y, F_z, т. е. вектор $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$, называется *градиентом функции* F (см. п. 37.6), видим, что градиент функции в данной точке поверхности $F(x, y, z) = 0$ перпендикулярен касательной плоскости в этой точке, т. е. коллинеарен нормальной прямой.

Поэтому уравнение нормальной прямой к поверхности имеет вид

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z}.$$

Все эти формулы сразу следуют из (50.24) и (50.25). Действительно, если, например, $F_z \neq 0$ и $z = f(x, y)$ — функция, определяемая уравнением $F = 0$ в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), то достаточно заметить, что $f_x = -\frac{F_x}{F_z}$, $f_y = -\frac{F_y}{F_z}$ (см. п. 41.1).

Если функция $F(x, y, z)$ задана и непрерывно дифференцируема в области G, то для любой точки поверхности, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = c$ (c — постоянная), получим уравнение касательной плоскости и нормальной прямой того же вида, что и в случае $F = 0$, если только в этой точке $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$. Множество точек $(x, y, z) \in G$, для которых $F = c$, называется, как мы знаем, поверхностью уровня функции F (см. п. 36.1).

Таким образом, градиент $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$ в точке (x_0, y_0, z_0) поверхности уровня $F(x, y, z) = c$ направлен по нормальной прямой к этой поверхности в точке (x_0, y_0, z_0). Иначе говоря, градиент функции ортогонален к поверхности уровня (т. е. перпендикулярен касательной плоскости к поверхности уровня в рассматриваемой точке).

Мы доказали существование касательной плоскости в неособой точке у непрерывно дифференцируемой поверхности при фиксированном ее представлении. Возникает вопрос: что будет, если перейти к другому представлению этой поверхности? Прежде всего, останется ли неособая точка неособой, а особая — особой? Оказывается, что да. Докажем это.

Пусть $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$ и $\boldsymbol{\rho}(u_1, v_1)$, $(u_1, v_1) \in \overline{D}_1$ — суть два представления одной и той же непрерывно дифференцируемой поверхности. Переход от любого представления непрерывно дифференцируемой поверхности к другому ее представлению осуществляется посредством регулярного отображения, поэтому существует такое регулярное отображение

$$u_1 = \varphi(u, v), \quad v_1 = \psi(u, v) \tag{50.26}$$

замкнутой области $\overline{D}$ на замкнутую область $\overline{D}_1$, что для всех точек $(u, v) \in \overline{D}$ справедливо равенство

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{\rho}(\varphi(u, v), \psi(u, v)). \tag{50.27}$$

При этом, как было доказано, якобиан отображения (50.26) не равен нулю нигде в замкнутой области $\overline{D}$:

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u, v) \in \overline{D}.$$

Продифференцировав тождество (50.27), получим

$$\boldsymbol{r}_u = \varphi_u \boldsymbol{\rho}_{u_1} + \psi_u \boldsymbol{\rho}_{v_1}, \quad \boldsymbol{r}_v = \varphi_v \boldsymbol{\rho}_{v_1} + \psi_v \boldsymbol{\rho}_{v_1}. \tag{50.28}$$

Следовательно, пара векторов $\boldsymbol{\rho}_{u_1}$, $\boldsymbol{\rho}_{v_1}$ преобразуется в пару векторов $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ с помощью матрицы $\left\| \begin{matrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{matrix} \right\|$.

Поэтому для данной точки (u, v) векторы $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ линейно независимы тогда и только тогда, когда линейно независимы векторы $\boldsymbol{\rho}_{u_1}$, $\boldsymbol{\rho}_{v_1}$ в точке (u_1, v_1), получающейся из точки (u, v) с помощью преобразования (50.26), причем в случае их линейной независимости плоскость векторов $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ и плоскость векторов $\boldsymbol{\rho}_{u_1}$ и $\boldsymbol{\rho}_{v_1}$ совпадают.

Итак, *неособая* (*особая*) *при данном представлении точка непрерывно дифференцируемой поверхности будет неособой* (*особой*) *и при любом другом представлении этой поверхности*, *а плоскость*, *касательная к поверхности в неособой точке при одном представлении поверхности*, *будет касательной и при другом ее представлении*.

Определение 16. *Непрерывно дифференцируемая поверхность, у которой нет особых точек*, *называется гладкой поверхностью.*

В силу доказанного выше, чтобы проверить, что данная поверхность является гладкой, достаточно убедиться, что у нее имеется одно непрерывно дифференцируемое представление и при этом представлении нет особых точек.

Следует обратить внимание на то, что у гладкой поверхности $S = \{\boldsymbol{r}(u, v), (u, v) \in \overline{D}\}$ векторные функции $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ не только непрерывны на замыкании $\overline{D}$ области D, но, согласно определению, и не коллинеарны на этом замыкании. Иначе говоря, у гладкой поверхности (50.18) всюду на замкнутой области $\overline{D}$ выполняется неравенство (см. (50.19)) $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$.

З а м е ч а н и е. Из формул (50.28) следует, что

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = (\varphi_u \boldsymbol{\rho}_{u_1} + \psi_u \boldsymbol{\rho}_{v_1}) \times (\varphi_v \boldsymbol{\rho}_{u_1} + \psi_v \boldsymbol{\rho}_{v_1}) =$$

$$= \varphi_u \psi_v (\boldsymbol{\rho}_{u_1} \times \boldsymbol{\rho}_{v_1}) + \varphi_v \psi_u (\boldsymbol{\rho}_{v_1} \times \boldsymbol{\rho}_{u_1}) = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} (\boldsymbol{\rho}_{u_1} \times \boldsymbol{\rho}_{v_1}).$$

При допустимых преобразованиях параметров (50.26) якобиан $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ нигде в $\overline{D}$ не обращается в нуль, поэтому из полученной формулы следует, что векторные произведения $r_u \times r_v$ и $\boldsymbol{\rho}_{u_1} \times \boldsymbol{\rho}_{v_1}$ в данной точке поверхности могут обращаться в нуль только одновременно. Но было показано, что необходимым и достаточным условием того, что данная точка поверхности при данном представлении поверхности $\boldsymbol{r}(u, v)$ неособая, является неравенство нулю в этой точке векторного произведения $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$. Тем самым еще раз доказано, что неособая (особая) точка поверхности при одном представлении поверхности будет такой же и при другом ее представлении.

Введем понятие гладкой поверхности в широком смысле. Представление поверхности называется *гладким*, если оно непрерывно дифференцируемо на замкнутой области, на которой оно задано, и не имеет на ней особых точек.

Допустимым преобразованием параметров гладкого представления поверхности называется отображение, непрерывно дифференцируемое на замкнутой области, на которой оно определено. Непрерывная дифференцируемость обратного отображения вплоть до границы не предполагается. Таким образом, производные обратного отображения могут не иметь конечного предела при приближении к границе отображающейся области. Этим допустимое преобразование параметров гладкого представления поверхности отличается от регулярного отображения. Поверхность называется *гладкой в широком смысле*, если у нее существует гладкое представление, а любое другое представление получается гладким преобразованием параметров некоторого ее гладкого представления.

Примером гладкой поверхности в широком смысле является полусфера, заданная представлением

$$z = \sqrt{1 - x^2 + y}\,, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1,$$

которое не является гладким: на границе круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$ частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ бесконечны. Примером гладкого представления этой полусферы является проектирование на

нее единичного круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$ координатной плоскости переменных x и y из точки $(0, 0, -1)$. Это представление задается формулами

$$x = \frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \quad y = \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \quad z = \frac{1 + u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2}.$$

Первые две из этих формул представляют собой допустимое преобразование параметров (u, v) в параметры (x, y) рассматриваемой полусферы.

50.6. Явные представления поверхности

Явное представление поверхности не является, как это может показаться на первый взгляд, специальным способом ее задания. Нетрудно показать, что локально во внутренней неособой точке непрерывно дифференцируемая поверхность всегда имеет явное представление. Это означает следующее.

Пусть непрерывно дифференцируемая поверхность S задана своим представлением

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \ (u, v) \in \overline{D} \qquad (50.29)$$

и $r(u_0, v_0)$ — ее внутренняя неособая точка $(u_0, v_0) \in D$, следовательно, в этой точке $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$, а так как

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| = \sqrt{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}^2},$$

то хотя бы один из определителей, стоящих под знаком радикала, отличен от нуля. Пусть, для определенности,

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда, согласно теореме о неявных функциях, для отображения

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \qquad (50.30)$$

(см. (50.29)) существуют такие окрестности U и V соответственно точек (u_0, v_0) и (x_0, y_0), где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, что U отображается на V взаимно-однозначно и, следовательно, система (50.30), рассматриваемая как система уравнений относительно переменных u, v, может быть однозначно разрешена относительно их при $(x, y) \in V$:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Подставив эти формулы в выражение для z в (50.29), получим

$$z = f(x, y) \overset{\text{def}}{=} z(u(x, y), v(x, y)), \quad (x, y) \in V. \qquad (50.31)$$

Таким образом, часть поверхности S, соответствующая окрестности U точки (u_0, v_0), имеет явное представление (50.31).

Под частью поверхности S здесь понимается открытая поверхность, задаваемая представлением $\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in U$. Для этой поверхности непрерывно дифференцируемое взаимно-однозначное отображение (50.30) является допустимым преобразованием параметров.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Доказать, что в любой внутренней неособой точке непрерывно дифференцируемой поверхности существует ее явное локальное представление, заданное на замкнутой области.

Итак, при локальном изучении поверхности в неособой внутренней точке можно ограничиться изучением поверхностей, заданных явным представлением. Следует, однако, иметь в виду, что формулы для вычисления тех или иных величин, связанных с поверхностью, полезно получать и для поверхностей, которые заданы общим параметрическим представлением, так как при конкретном их использовании не всегда бывает целесообразно переходить к явному представлению поверхности, не говоря уже о том, что это бывает практически неосуществимо.

Иногда бывает полезным и более специальное явное задание поверхности, чем (50.31). Для того чтобы установить его возможность, докажем предварительно лемму.

ЛЕММА 1. *Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности U точки (x_0, y_0) и пусть $z_0 = f(x_0, y_0)$. Тогда у точки (x_0, y_0, z_0) существует такая окрестность V в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ и такая окрестность W на касательной плоскости Π к графику функции f в этой точке, что пересечение графика функции f с окрестностью V взаимно-однозначно проектируется на окрестность W при проектировании в направлении, перпендикулярном плоскости* Π (рис. 85).

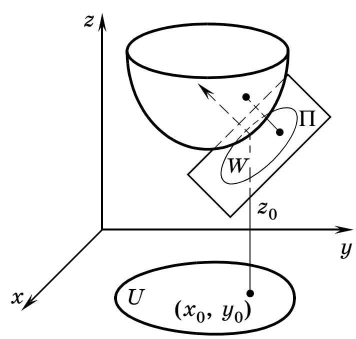


Рис. 85

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$f_x^0 = f_x(x_0, y_0), \ \ f_y^0 = f_y(x_0, y_0).$$

Если $f_x^0 = f_y^0 = 0$, то координатная плоскость переменных x, y параллельна касательной плоскости П и утверждение леммы очевидно: $W = U$.

Пусть $f_x^{0^2} + f_y^{0^2} > 0$ и, для определенности,

$$f_x^0 \neq 0. \qquad (50.32)$$

Напишем уравнение прямой, параллельной нормали в точке (x_0, y_0, z_0). Вектор $\boldsymbol{\nu} = (f_x, f_y, -1)$ параллелен этой нормали (см. (50.25)), и уравнение указанной прямой в векторной форме имеет вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\nu} t, \ \ -\infty < t < +\infty, \qquad (50.33)$$

где $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и $\boldsymbol{a}$ — вектор, параллельный касательной плоскости π. Его можно записать в виде

$$\boldsymbol{a} = (\alpha, \beta, \alpha f_x^0 + \beta f_y^0), \qquad (50.34)$$

где α и β — произвольные параметры (при любых α и β, имеет место $\boldsymbol{a\nu} = 0$).

В координатной форме после исключения параметра t уравнение прямой (50.33) принимает вид

$$(x - x_0 - \alpha)f_y^0 - (y - y_0 - \beta)f_x^0 = 0,$$

$$x - x_0 - \alpha + (z - x_0 - (\alpha f_x^0 + \beta f_y^0))f_x^0 = 0. \qquad (50.35)$$

Подставив в эту систему уравнений $z = f(x, y)$, для определения координат x, y точки пересечения прямой (50.35) с графиком функции f получим систему уравнений

$$(x - x_0 - \alpha)f_y^0 - (y - y_0 - \beta)f_x^0 = 0,$$

$$x - x_0 - \alpha + (f(x, y) - z_0 - (\alpha f_x^0 + \beta f_y^0))f_x^0 = 0. \qquad (50.36)$$

Ее якобиан по переменным x, y не зависит от α и β и имеет вид

$$J(x, y) \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} f_y^0 & -f_x^0 \\ 1 + f_x f_x^0 & f_y f_y^0 \end{vmatrix} = (1 + f_x f_x^0 + f_y f_y^0) f_x^0. \qquad (50.37)$$

Левые части уравнений (50.36) являются непрерывно дифференцируемыми функциями переменных x, y, α и β, значения $x = x_0$, $y = y_0$, $\alpha = \beta = 0$ удовлетворяют этим уравнениям и

$$J(x_0, y_0) \underset{(50.37)}{=} (1 + f_x^{0^2} = f_y^{0^2}) f_x^0 \neq 0.$$

Поэтому, согласно теореме о неявных функциях, существуют такие окрестности U_0 точки (x_0, y_0), $U_0 \subset U$, и окрестность V_0 точки $(0, 0)$ на плоскости параметров α, β, что система (50.36) может быть единственным образом разрешена относительно переменных x и y

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta) \tag{50.38}$$

таким образом, что отображение (50.38) отображает окрестность V_0 на окрестность U_0. При этом окрестность V_0 всегда можно выбрать круговой (уменьшив в случае необходимости данную окрестность V_0: любая плоская окрестность точки содержит ее круговую окрестность), т. е. такой, что для некоторого $\varepsilon > 0$ будет иметь место равенство

$$V_0 = \{(\alpha, \beta) : \alpha^2 + \beta^2 < \varepsilon^2\}.$$

Таким образом, для любого вектора $\boldsymbol{a}$ (см. (50.34)), для которого

$$\alpha^2 + \beta^2 < \varepsilon^2, \tag{50.39}$$

прямая (50.33) имеет, и притом единственную, точку пересечения с графиком сужения функции f на окрестность U_0 точки (x_0, y_0).

Координаты x, y этой точки находятся по формулам (50.38), а $z = f(x, y)$.

Теперь заметим, что

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha f_x^0 + \beta f_y^0)^2} \geqslant \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Поэтому если

$$|a| < \varepsilon, \tag{50.40}$$

то заведомо выполняется (50.39) и, следовательно, прямая (50.33) пересекает график функции f в единственной точке.

Концы всевозможных радиусов-векторов $\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}$, где вектор $\boldsymbol{a}$ удовлетворяет условию (50.40), образуют искомую окрестность V точки (x_0, y_0, z_0) на касательной плоскости Π, а совокупность точек всех прямых (50.33), проходящих через точки окрестности V, образуют искомую пространственную окрестность W той же точки (x_0, y_0, z_0). $\square$

Из доказанной леммы следует, что при локальном изучении поверхности, заданной явным представлением (50.31), в окрестности U точки (x_0, y_0) можно за новую координатную плоскость независимых переменных взять касательную плос-

кость к данной поверхности в точке (x_0, y_0, z_0), $z_0 = f(x_0, y_0)$. При этом в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) для поверхности снова получится явное представление. Параметры поверхности, конечно, изменятся, но новая область изменения параметров получится проектированием параллельно оси Oz на касательную плоскость некоторой окрестности точки (x_0, y_0) на плоскости переменных x, y. Это преобразование взаимно-однозначно и взаимно бесконечно дифференцируемо (оно линейно) и поэтому для некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) на поверхности является допустимым преобразованием старых параметров, декартовых координат x, y, в новые — декартовы координаты на касательной плоскости.

50.7. Первая квадратичная форма поверхности

Зафиксируем какое-либо векторное представление $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$ данной гладкой поверхности и рассмотрим касательную к ней плоскость в некоторой ее точке. Как мы видели, векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ образуют в этой плоскости базис. Векторы, лежащие в касательной плоскости, будем обозначать символом $d\boldsymbol{r}$, а их координаты относительно базиса $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ — через du и dv*. Таким образом,

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v du.$$

Найдем квадрат длины вектора, лежащего в касательной плоскости, выраженный через координаты естественного базиса $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ (в линейной алгебре это выражение обычно называется *основной метрической формой* рассматриваемого пространства, в данном случае плоскости):

$$|d\boldsymbol{r}|^2 = d\boldsymbol{r}^2 = (\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv)^2 = \boldsymbol{r}_u^2\, du^2 + 2\, \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v du dv + \boldsymbol{r}_v^2 dv^2.$$

Введем следующие обозначения:

$$E = \boldsymbol{r}_u^2,\ F = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v,\ G = \boldsymbol{r}_v^2; \tag{50.41}$$

тогда

$$|d\boldsymbol{r}|^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2. \tag{50.42}$$

---

* Это обозначение естественно, так как если вектор в касательной плоскости является касательным к некоторой кривой (50.22) на поверхности, то при соответствующем выборе параметра вектор $d\boldsymbol{r}$ является дифференциалом вектора (50.22) и, следовательно, для него выполняется равенство (50.23).

Определение 17. *Квадратичная форма* $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ *называется первой квадратичной формой поверхности.*

Посмотрим, как она меняется или, что то же самое, как меняется ее матрица $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ при переходе к другому представлению поверхности (см. формулы (50.26)). Как известно (см. (50.28)), при этом базисы в рассматриваемой плоскости преобразуются с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{pmatrix}.$$

Следовательно, координаты векторов преобразуются с помощью транспонированной матрицы, т. е. матрицы Якоби

$$J = \begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{pmatrix}.$$

Если матрицу первой квадратичной формы (50.42) при представлении поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ обозначить через A, а при представлении $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u_1, v_1)$ — через A_1, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad E = \boldsymbol{r}_u^2, \quad F = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v, \quad G = \boldsymbol{r}_v^2,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix}, \; E_1 = \boldsymbol{\rho}_{u_1}^2, \quad F_1 = \boldsymbol{\rho}_{u_1} \boldsymbol{\rho}_{v_1}, \; G_1 = \boldsymbol{\rho}_{u_1}^2,$$

то, как известно из курса линейной алгебры, для первой квадратичной формы поверхности, как и вообще для всякой квадратичной формы, $A = J^* A_1 J$, где через J^* обозначена матрица, транспонированная с матрицей Якоби J.

Отсюда для соответствующих определителей имеем

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}^2,$$

или

$$EG - F^2 = (E_1 G_1 - F_1^2) \left| \frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)} \right|^2. \qquad (50.43)$$

Заметим, что по самому своему определению первая квадратичная форма положительно определена (действительно, если $du^2 + dv^2 > 0$, т. е. $d\boldsymbol{r} \not\equiv 0$, то $|d\boldsymbol{r}|^2 > 0$), поэтому по критерию Сильвестра ее дискриминант положителен: $EG - F^2 > 0$. В силу же отсутствия особых точек, выполняются неравенства $\boldsymbol{r}_u \neq 0$, $\boldsymbol{r}_v \neq 0$, поэтому из определения коэффициентов E и G (50.17) непосредственно следует, что $E > 0$ и $G > 0$.

Если известна первая квадратичная форма поверхности, то можно, даже не располагая уравнением поверхности и не зная ее формы, решать ряд относящихся к ней задач, например находить длины лежащих на ней кривых и углы между ними, вычислять площадь частей поверхности. Совокупность всех свойств поверхности, которые можно установить, исходя из одной лишь первой квадратичной формы, называется внутренней геометрией поверхности. К рассмотрению подобных задач мы и перейдем.

50.8. Кривые на поверхности, вычисление их длин и углов между ними

Рассмотрим непрерывно дифференцируемую кривую (50.22), лежащую на данной поверхности (50.18). Предположим, что отсчет длины дуг $s = s(t)$ на кривой производится в направлении возрастания параметра, т. е. что $\frac{ds}{dt} > 0$. Как известно, в этом случае (см. п. 16.5) $\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$, откуда $ds = |dr|$; следовательно (см. (50.42)),

$$ds^2 = |d\boldsymbol{r}|^2 = d\boldsymbol{r}^2 = E\,du^2 + 2F du\,dv + Gdv^2,$$

поэтому

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

Таким образом, для длины L кривой (50.22) получаем формулу

$$L = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Перейдем теперь к вычислению углов между кривыми на поверхности.

Определение 18. *Если две кривые пересекаются в некоторой точке, то углом между ними в этой точке называется угол, образованный их касательными в указанной точке (если, конечно, эти касательные существуют).*

Пусть две гладкие кривые, лежащие на рассматриваемой поверхности, пересекаются в некоторой точке. Обозначим дифференциалы их представлений в этой точке соответственно через $d\boldsymbol{r}$ и $\delta\boldsymbol{r}$, а коэффициенты разложений по векторам $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ — через du, dv и δu, δv; тогда

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv, \quad \delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u \delta u + \boldsymbol{r}_v \delta v.$$

Поэтому если φ — искомый угол между кривыми, т. е. между векторами $d\boldsymbol{r}$ и $\delta\boldsymbol{r}$, то

$$\cos\varphi = \frac{d\boldsymbol{r}\delta\boldsymbol{r}}{|d\boldsymbol{r}||\delta\boldsymbol{r}|} = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 2. Доказать, что, для того чтобы координатные u- и v-линии на поверхности были ортогональными, необходимо и достаточно, чтобы всюду на поверхности выполнялось равенство $F = 0$.

50.9. Площадь поверхности

Пусть непрерывно дифференцируемое векторное представление $\boldsymbol{r}(u, v)$ рассматриваемой гладкой поверхности S определено на замыкании $\overline{D}$ квадрируемой области D. Рассмотрим разбиение T_k плоскости переменных u и v на квадраты некоторого ранга k. Из квадрируемости области следует ее ограниченность, поэтому замкнутая область $\overline{D}$ окажется покрытой конечным числом квадратов Q_i ранга k. Пронумеруем каким-либо образом все непустые пересечения этих квадратов с замкнутой областью $\overline{D}$ и обозначим их через E_i, $i = 1, 2, \dots, i_\tau$. Тогда

$$\tau = \{E_i : E_i = Q_i \cap \overline{D} \neq \varnothing,\ Q_i \in T_k,\ i = 1, 2, \dots, i_\tau\}$$

образует разбиение замкнутой области $\overline{D}$ (определение разбиения см. в п. 44.3).

Рассмотрим множества E_i, которые представляют собой полные замкнутые квадрата, лежащие в области D (при достаточно малой мелкости разбиения τ такие непустые множества E_i всегда существуют; почему?). Совокупность всех указанных множеств E_i обозначим через $\tau(\partial D)$ (ср. с п. 44.3).

Возьмем какой-либо квадрат $E_i \in \tau(\partial D)$ (рис. 86). Пусть длина его стороны равна h, а P_i — одна из его вершин. Тогда при переходе от вершины P_i к соседним вершинам радиус-вектор $\boldsymbol{r}(u, v)$ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем h, получит приращения, равные по абсолютной величине соответственно числам $|\boldsymbol{r}_u h|$ и $|\boldsymbol{r}_v h|$, так как

$$\boldsymbol{r}(u + h, v) - \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}_u h + o(h),$$

$$\boldsymbol{r}(u, v + h) - \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}_i h + o(h).$$

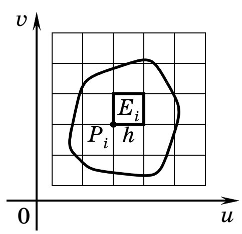


Рис. 86

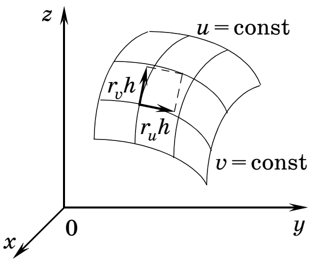


Рис. 87

При определении площади поверхности будем образы квадратов $E_i \in \tau(\partial D)$ заменять прямолинейными параллелограммами, построенными на векторах $\boldsymbol{r}_u h$ и $\boldsymbol{r}_v h$ (рис. 87). Найдем площадь такого параллелограмма. Обозначив ее через $\Delta\sigma_i$, получим

$$\Delta\sigma_i = |\boldsymbol{r}_u h \times \boldsymbol{r}_v h|_{P_i} = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v h|_{P_i} h^2 = \\ = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v h|_{P_i} \mu E_i.$$

Функции $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ непрерывны на замкнутой квадрируемой области $\overline{D}$; поэтому

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sum_{E_i \in \tau(\partial D)} \Delta\sigma_i = \iint_D |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| du dv, \qquad (50.44)$$

где $|\tau|$, как всегда, обозначает мелкость разбиения τ. Очевидно, условие, что мелкость разбиения $|\tau|$ стремится к нулю, равносильно тому, что ранги $\boldsymbol{k}$ квадрильяжей плоскости, из которых мы исходили, стремятся к бесконечности.

Для доказательства справедливости равенства (50.44) достаточно заметить, что при произвольном выборе точек $P_i \in E_i \in \tau$, $i = 1, 2, \ldots$, справедливо равенство

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sum_{E_i \in \tau(\partial D)} \Delta\sigma_i = \lim_{|\tau| \to 0} \sum_{i=1}^{i_\tau} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v h|_{P_i} \mu E_i = \iint_D |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| du dv. \qquad (50.44)$$

Действительно, во-первых, предел интегральных сумм интегрируемой функции не зависит от выбора в данном случае точек $P_i \in E_i \in \tau$, а, во-вторых, выбрасывание из интегральных сумм слагаемых, соответствующих множествам $E_i \in \tau$, не входящих в $\tau(\partial D)$, иначе говоря, элементам разбиения τ, пересекающихся с границей ∂D области D, т. е. пересекающихся с множеством меры нуль, не влияет, как известно (см. п. 44.3), на величину предела интегральных сумм, в данном случае на величину предела (50.44).

Определение 19. *Предел* (50.44) *называется площадью или мерой* μS *поверхности* S:

$$\mu S = \lim_{|\tau| \to 0} \sum_{E_i \in \tau(\partial D)} \Delta\sigma_i.$$

Для вычисления площади поверхности из (50.44) непосредственно получается формула

$$\mu S = \iint_D |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| du dv. \qquad (50.45)$$

Запишем ее в другом виде, выразив подынтегральное выражение через коэффициенты первой квадратичной формы. Прежде всего заметим, что для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ справедливы формулы

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin \widehat{\boldsymbol{ab}}, \quad \boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos \widehat{\boldsymbol{ab}},$$

где $\widehat{\boldsymbol{ab}}$ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Возведем в квадрат и сложим эти формулы:

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 + (\boldsymbol{ab})^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$$

(это равенство называют тождеством Лагранжа). Отсюда следует, что

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|^2 = \boldsymbol{r}_u^2\boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)^2 = EG - F^2, \tag{50.46}$$

поэтому формула (50.45) может быть записана также в виде

$$\mu S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv. \tag{50.47}$$

Иногда для краткости записи выражение $\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$ обозначается символом dS:

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv \tag{50.48}$$

и называется *элементом площади поверхности*. Применяя это обозначение, формулу (50.47) можно переписать в виде

$$\mu S = \iint\limits_D dS.$$

Покажем, что величина площади поверхности не зависит от выбора ее представления (при этом рассматриваются только представления, заданные на замкнутых квадрируемых областях). Перейдем к другому представлению $\rho = \rho(u_1, v_1)$ данной непрерывно дифференцируемой поверхности, которое задано на замыкании $\overline{D}_1$ квадрируемой области D_1 и, следовательно, для которого преобразование (50.26) параметров u, v в параметры u_1, v_1 является регулярным отображением $\overline{D}$ на $\overline{D}_1$.

В новой системе координат рассмотрим интеграл

$$\mu S = \iint\limits_{D_1} \sqrt{F_1G_1 - F_1^2}\,du_1\,dv_1.$$

Для сравнения его с интегралом (50.47) выполним замену переменных (50.26), что возможно, так как все предпосылки теоремы 2′ п. 46.3 в данном случае выполнены. Использовав (50.43), получим

$$\mu S_1 = \iint\limits_{D_1} \sqrt{F_1D_1 - F_1^2}\,du_1\,dv_1 = \iint\limits_{D_1} \sqrt{E_1G_1 - F_1^2}\left|\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}\right|du\,dv \underset{(50.43)}{<}$$

$$\underset{(50.43)}{<} \iint\limits_{D_1} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \mu S.$$

Таким образом, действительно, величина площади поверхности не зависит от выбора ее представления.

Найдем выражение для площади поверхности, имеющей явное представление $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$. В этом случае $u = x$, $v = y$, $\boldsymbol{r} = (x, y, f(x, y))$ и, следовательно (см. формулы (50.21)),

$$\boldsymbol{r}_u = (1, 0, f_x), \ \boldsymbol{r}_v = (0, 1, f_y),$$

$$E = \boldsymbol{r}_u^2 = 1 + f_x^2, \quad F = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v = f_x f_y, \quad G = \boldsymbol{r}_v^2 = 1 + f_y^2, \tag{50.49}$$

$$EG - F^2 = (1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - f_x^2 f_y^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2;$$

$$\mu S = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy.$$

УПРАЖНЕНИЕ 3. Доказать, что площадь поверхности вращения, определенная в п. 28.4, совпадает с площадью этой поверхности, определенной в настоящем пункте.

50.10. Ориентация гладкой поверхности

В этом параграфе для наглядности будем считать, что в пространстве выбрана правая система координат. Это означает следующее. Пусть $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — единичные орты координатных осей. Если смотреть из конца вектора $\boldsymbol{k}$ на плоскость xOy, то вектор $\boldsymbol{i}$ надо повернуть на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, чтобы он совпал с вектором $\boldsymbol{j}$. В этом случае говорят также, что упорядоченная тройка векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ согласована по «правилу штопора».

Аналитический аналог наглядного подхода к понятию правой и левой системы координат можно сформулировать, например, следующим образом: что в пространстве точек (x, y, z) рассматриваются только такие упорядоченные базисы e_1, e_2, e_3, которые получаются из упорядоченного базиса $\boldsymbol{i} = (1; 0; 0)$, $\boldsymbol{j} = (0; 1; 0)$, $\boldsymbol{k} = (0; 0; 1)$ (называемого по определению «правым») с помощью матриц, имеющих положительный определитель (точнее, равный 1). Таким образом, если

$$\boldsymbol{e}_m = c_{m1}\boldsymbol{i} + c_{m2}\boldsymbol{j} + c_{m3}\boldsymbol{k}, \quad m = 1, 2, 3$$

является базисом, задающим правую систему координат, то

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = 1.$$

Пусть S — гладкая поверхность (см. определение 16). Это означает, что всякое ее векторное представление $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, непрерывно дифференцируемо и $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$ на замкнутой области $\overline{D}$. Следовательно, в каждой точке поверхности S определен нормальный единичный вектор

$$\nu = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}, \tag{50.50}$$

являющийся непрерывной функцией на $\overline{D}$. Кратко это обстоятельство выражают, говоря, что на поверхности S существует непрерывная единичная нормаль.

Определение 20. *Всякая непрерывная единичная нормаль* $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, *гладкой поверхности* $S = \{\boldsymbol{r}(u, v); (u, v) \in \overline{D}\}$ *называется ориентацией поверхности* S.

Очевидно, что если вектор $\boldsymbol{\nu}$ является ориентацией поверхности S, то и вектор $-\boldsymbol{\nu}$ также является ориентацией той же поверхности, и легко показать, что других ориентаций нет.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Доказать, что поверхность может иметь только две ориентации.

Одна из двух ориентаций $\boldsymbol{\nu}$ или $-\boldsymbol{\nu}$ (произвольно выбранная) называется *положительной*, а другая — *отрицательной*.

Таким образом, понятие положительности и отрицательности ориентации в этом смысле не определяется однозначно самой поверхностью. Положительная и отрицательная ориентации поверхности называются *противоположными* ориентациями этой поверхности.

Для определенности в дальнейшем для гладкой поверхности, заданной фиксированным векторным представлением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, за положительную ориентацию будем принимать всегда вектор (50.50).

Подчеркнем, что непрерывность нормали $\boldsymbol{\nu}$ рассматривается относительно переменных u, v, а не относительно пространственных переменных x, y и z. Если поверхность имеет кратные точки, то может случиться, что в точке пространства, являющейся носителем разных точек поверхности, может оказаться несколько различных нормалей.

Чтобы при регулярном преобразовании параметров u и v у поверхности сохранялась ориентация, необходимо дополнительно потребовать, чтобы якобиан этого преобразования был положительным. Действительно, для преобразования пара-

метров $u_1 = \varphi(u, v)$, $v_1 = \psi(u, v)$ из формул (50.28), как мы видели (см. замечание в конце п. 50.5), следует, что

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}(\boldsymbol{\rho}_{u_1} \times \boldsymbol{\rho}_{v_1}),$$

и, следовательно, если якобиан $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ положителен, то векторы $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ и $\boldsymbol{\rho}_{u_1} \times \boldsymbol{\rho}_{v_1}$ направлены в одну и ту же сторону, а если он отрицателен, то в противоположные.

Таким образом, для поверхностей, у которых выбрана ориентация, допустимыми преобразованиями будем считать такие непрерывно дифференцируемые преобразования, у которых якобиан положителен.

Поверхность S с положительной ориентацией будем обозначать S^+, а с отрицательной — S^-.

Подчеркнем, что всякая гладкая параметрически заданная поверхность всегда ориентируема, т. е. у нее всегда существует ориентация.

Если гладкая поверхность S имеет явное представление $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$, D — область на плоскости переменных x, y, то

$$\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x \boldsymbol{i} - f_y \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$$

откуда, в силу формулы (50.50),

$$\boldsymbol{\nu} = \left(-\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, -\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}\right) \qquad (50.51)$$

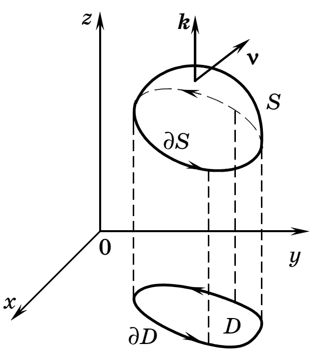


Рис. 88

и, следовательно (рис. 88),

$$\cos \widehat{\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{k}} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} > 0,$$

т. е. ориентация $\boldsymbol{\nu}$ образует острый угол с осью z. Это означает, что вектор $\boldsymbol{\nu}$ направлен вверх от поверхности S. Поэтому в этом случае поверхность S, ориентированная единичной нормалью $\boldsymbol{\nu}$, называется *верхней стороной* поверхности S и обозначается $\widehat{S}$, а ориентированная противо-

положной нормалью $-\mathbf{v}$ (направленной вниз) — ее *нижней стороной*, которая обозначается $\check{S}$.

Определение 21. *Поверхность, у которой фиксирована одна из ее ориентаций, называется ориентированной.*

Данное выше определение ориентации, разумеется, не переносится на негладкие поверхности. Примером поверхности, не дифференцируемой в одной точке, на которой уже нельзя выбрать непрерывную нормаль, является конус:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \leqslant a^2. \tag{50.52}$$

В этом случае векторное представление имеет вид

$$\boldsymbol{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2});$$

следовательно,

$$\boldsymbol{r}_x = \left(1; 0; \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad \boldsymbol{r}_y = \left(0; 1; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right),$$

$$\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; 1\right), \quad |\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y| = \sqrt{2}.$$

Пределы $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ не существуют (почему?), поэтому и единичная нормаль

$$\mathbf{v} = \frac{\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y}{|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y|} = \left(-\frac{x}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}; -\frac{y}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

не имеет предела при $(x, y) \to (0, 0)$. Следовательно, на конусе (50.52) нельзя выбрать нормаль, непрерывную на

$$\overline{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant a^2\}.$$

Простым примером негладкой поверхности S, на которой существует целая линия, вдоль которой нормали при любом их выборе терпят разрыв, является часть двугранного угла, изображенная на рис. 89. Указанной линией на этой поверхности является отрезок AB.

З а м е ч а н и е 1. На первый взгляд может показаться, что понятие ориентации поверхности не является обобщением понятия ориентации плоской кривой. Это, однако, не так. Если гладкая кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ ориентирована в направлении возрастания длин ее дуг s, то в каждой ее точке определен единичный касательный вектор $\boldsymbol{t} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$, ко-

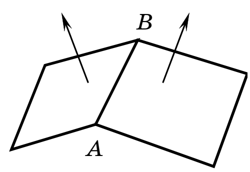


Рис. 89

торый, очевидно, является непрерывной на кривой Γ векторной функцией. Поставим в соответствие вектору $\boldsymbol{t}$ вектор $\boldsymbol{n}$, получающийся из вектора $\boldsymbol{t}$ поворотом против часовой стрелки на прямой угол. Вектор $\boldsymbol{n}$ является единичным нормальным к кривой Γ вектором, непрерывно меняющимся вдоль нее. Таким образом, ориентация гладкой кривой порождает выбор единичной непрерывной вдоль этой кривой нормали.

Верно и обратное: если на гладкой кривой задана непрерывная единичная нормаль, то по этой нормали, в силу указанного выше соответствия, однозначным образом определяется непрерывный на кривой единичный касательный к ней вектор, который, в свою очередь, однозначно задает направление возрастания параметра s, т. е. ориентацию кривой.

З а м е ч а н и е 2. Понятия «поворот против часовой стрелки», «слева», «справа», «правило штопора» и т. п. не являются, конечно, математическими понятиями, но они очень удобны при решении конкретных задач.

Подобно ориентации кривой на плоскости (см. п. 16.4), можно дать определение ориентации поверхности в математических терминах, при условии, что в пространстве фиксирована прямоугольная декартова система координат, т. е. задан ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ (тем самым, образно говоря, в самом пространстве уже задана «ориентация»).

В этом случае *положительной* (*отрицательной*) *ориентацией гладкой поверхности* $S = \{\boldsymbol{r}(u, v); (u, v) \in \overline{D}\}$ называется всякая непрерывная на поверхности S упорядоченная тройка вектор-функций $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, т. е. непрерывных на замкнутой области $\overline{D}$ функций $\boldsymbol{a}_1(u, v)$, $\boldsymbol{a}_2(u, v)$, $\boldsymbol{a}_3(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$ таких, что векторы $\boldsymbol{a}_1(u, v)$ и $\boldsymbol{a}_2(u, v)$ являются линейно-независимыми касательными к поверхности S в точке $r(u, v)$, а не нулевой вектор a_3 (u, v) — ортогонален к ним, и определитель матрицы перехода от векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ к векторам базиса положителен (отрицателен).

Например, тройка векторов $\bar{\boldsymbol{r}}_u$, $\bar{\boldsymbol{r}}_v$, $\bar{\boldsymbol{r}}_u \times \bar{\boldsymbol{r}}_v$ задает положительную, а тройка векторов $\bar{\boldsymbol{r}}_u$, $\bar{\boldsymbol{r}}_v$, $-(\bar{\boldsymbol{r}}_u \times \bar{\boldsymbol{r}}_v)$ — отрицательную ориентацию гладкой поверхности S при заданной системе координат в пространстве.

50.11. Склеивание поверхностей

Данное выше определение параметрически заданной непрерывной поверхности не охватывает все то, что интуитивно входит в понятие поверхности. Так, можно показать, что по-

верхность шара не является носителем какой-либо непрерывной параметрически заданной поверхности без кратных точек. Считать же, что поверхность шара имеет кратные точки, представляется неоправданным усложнением. Существуют различные пути для преодоления этого неудобства. Мы выберем способ, основанный на склеивании конечного числа поверхностей. Склеивание поверхностей естественным образом возникает при рассмотрении самых простых задач. Например, боковую поверхность цилиндра естественно рассматривать как результат склеивания противоположных сторон прямоугольника, полную поверхность цилиндра — как результат склеивания его боковой поверхности и двух оснований, полную поверхность конуса — как результат склеивания его боковой поверхности с основанием и т. д.

Перейдем к точным определениям. Будем говорить, что у поверхности $S = \{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v);\ (u, v) \in \overline{D}\}$ ее край (см. п. 50.2) является кривой, если граница ∂D области D является кривой (точнее, носителем кривой): $\partial D = \{u(t), v(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$. В этом случае край ∂S поверхности S можно также рассматривать как кривую $\partial S = \{\boldsymbol{r}(u(t), v(t));\ a \leqslant t \leqslant b\}$.

Определим операцию склеивания поверхностей для поверхностей, края которых являются кривыми.

Пусть заданы поверхности $S_i = \{\boldsymbol{r}_i(u_i, v_i);\ (u_i, v_i) \in \overline{D}_i\}$, края ∂S_i которых суть кривые, т. е. границы ∂D_i, областей D_i, являются кривыми:

$$u_i = u_i(t_i),\ \ v_i = v_i(t_i);\ \ \ a_i \leqslant t_i \leqslant b_i,\ \ \ i = 1, 2, \dots, m.$$

Тогда края поверхностей ∂S_i будут представлять собой кривые $\Gamma_i = \{\boldsymbol{r}_i(u_i(t_i), v_i(t_i));\ a_i \leqslant t_i \leqslant b_i\}$. Пусть для некоторых пар (i, j), $i, j = 1, 2, \dots, m$, $i \neq j$, задано конечное число отрезков $[a_{ij}^k, b_{ij}^k] \subset [a_i, b_i]$, $a_{ij}^k \leqslant b_{ij}^k$, и отрезков $[a_{ji}^k, b_{ji}^k] \subset [a_j, b_j]$, $a_{ji}^k \leqslant b_{ji}^k$, $k = 1, 2, \dots, n_{ij} = n_{ji}$, причем как отрезки $[a_{ij}^k, b_{ij}^k]$, так и отрезки $[a_{ji}^k, b_{ji}^k]$ попарно не имеют общих внутренних точек, а также гомеоморфизмы $\varphi_{ij}^k : [a_{ij}^k, b_{ij}^k] \to [a_{ji}^k, b_{ji}^k]$, называемые *склеивающими гомеоморфизмами*. При этом для любого $t_i \in [a_{ij}^k, b_{ij}^k]$ имеет место «склеивание»:

$$\boldsymbol{r}_i(u_i(t_i), v_i(t_i)) = \boldsymbol{r}_j(u_j(\varphi_{ij}^k(t_i)), v_j(\varphi_{ij}^k(t_i)). \qquad (50.53)$$

Обозначим через Γ_{ij}^k кривую с представлением

$$\boldsymbol{r}_i(u_i(t_i), v_i(t_i)),\ \ t_i \in [a_{ij}^k, b_{ij}^k].$$

Кривые Γ_{ij}^k называются *кривыми склейки* или *кривыми, по которым производится склеивание.*

Очевидно, что, в силу (50.53), отображение

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_j(u_j(t_j), v_j(t_j)), \ \ t_j \in [a_{ji}^k, b_{ji}^k]$$

также является представлением кривой Γ_{ij}^k, ибо гомеоморфизмы φ_{ij}^k представляют собой допустимое преобразование параметра для кривой Γ_{ij}^k.

Будем предполагать, кроме того, что при $j' \neq j$ отрезки

$$[a_{ij}^l, b_{ij}^k] \text{ и } [a_{ij'}^k, b_{ij'}^l], \quad k = 1, 2, \ldots, n_{ij}, \quad l = 1, 2, \ldots, n_{ji'},$$

также не имеют общих внутренних точек, следовательно, каждый конец отрезка $[a_{ij}^k, b_{ij}^k]$ может принадлежать еще не более чем одному отрезку $[a_{ij'}^l, b_{ij'}^l]$. Это условие означает, что каждая кривая склейки Γ_{ij}^k является частью только двух кривых Γ_i и Γ_j, образующих края поверхностей S_i и S_j.

Поверхности S_i и S_j называются соседними, если они склеиваются по крайней мере по одной кривой Γ_{ij}^k. Система поверхностей $S_1, \ldots, S_m$ называется *связной*, если для любых ее поверхностей S_p и S_q существуют такие поверхности $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_r}$, что $S_{i_1} = S_p$, $S_{i_r} = S_q$, и каждая поверхность S_{i_ν} является соседней с $S_{i_{\nu+1}}$, т. е. склеена с ней по одной или нескольким кривым, $\nu = 1, 2, \ldots, r-1$.

Определение 22. *Связная система поверхностей $S_1, S_2, \ldots, S_m$ называется поверхностью, склеенной из поверхностей $S_1, \ldots, S_m$, и обозначается $S = \{S_i\}$.*

Это определение, несмотря на свою формальную громоздкость, имеет, очевидно, простой геометрический смысл. Образно говоря, склеенная поверхность $S = \{S_i\}$ представляет собой поверхности $S_1, \ldots, S_m$, у некоторых пар которых S_i, S_j отождествлены (склеены) точки, лежащие на кривых Γ_{ij}^k и отображающиеся друг в друга при гомеоморфизмах φ_{ij}^k, — в этом и состоит условие склеивания (50.53). Безусловно, как отмечалось, кроме того, предполагается, что от каждой поверхности S_i можно через конечное число шагов перейти к любой другой поверхности S_j, переходя каждый раз с некоторой поверхности на одну из соседних с ней.

Если $S = \{S_i\}$ склеенная поверхность, то совокупность всех дуг, являющихся такими частями кривых ∂S_i, что никакие точки этих частей, кроме, быть может, концевых, не склеиваются ни с какими точками других кривых ∂S_i, называется краем ∂S склеенной поверхности S.

Можно показать, что, объединяя соответствующим образом указанные части кривых ∂S_i, принадлежащие краю поверхности $S = \{S_i\}$, можно получить конечное число замкнутых кривых (контуров). Иначе говоря, край склеенной поверхности состоит из конечного числа замкнутых контуров.

Примером склеивания поверхностей служит склеивание в сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ двух полусфер $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ и $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$, по их краю, т. е. по окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. Задавая уравнение этой окружности в параметрическом виде $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, в качестве склеивающего гомеоморфизма $\varphi : [0, 2\pi] \to [0, 2\pi]$ можно взять тождественное отображение отрезка $[0, 2\pi]$ на себя.

С помощью склеивания гладких поверхностей можно определить понятие кусочно-гладкой поверхности.

Определение 23. *Поверхность $S = \{S_i\}$, склеенная из гладких поверхностей $S_1, \dots, S_m$, называется кусочно-гладкой поверхностью.*

Поверхность кругового цилиндра, поверхность параллелепипеда дают примеры кусочно-гладких поверхностей. Прямой же круговой конус (50.27) нельзя разбить на конечное число склеенных гладких частей, поэтому он не является кусочно-гладкой поверхностью в смысле определения 23. Можно обобщить операцию склеивания поверхностей таким образом, что при формальном сохранении определения кусочно-гладких поверхностей для такой обобщенной операции склеивания в класс кусочно-гладких поверхностей попадут уже и конические поверхности. Мы не будем на этом останавливаться и предоставим проделать это в случае необходимости самому читателю.

Поверхность, склеенная из конечного множества гладких поверхностей в широком смысле (см. п. 50.5), называется *кусочно-гладкой в широком смысле*.

50.12. Ориентируемые и неориентируемые поверхности

Определим понятие ориентации для поверхностей, склеенных из параметрически заданных поверхностей.

Определение ориентации с помощью выбора непрерывной единичной нормали на поверхности в случае поверхности, склеенной из параметрически заданных поверхностей, оказывается недостаточным даже при отсутствии кратных точек и понимании непрерывности нормали как ее непрерывной зависимости от точек пространства (а не параметров склеиваемых поверхностей). Это связано с возможным нарушением гладкости поверхности на кривых, по которым происходит склеивание.

Например, часть поверхности двугранного угла, изображенную на рис. 89, можно рассматривать как результат склеивания двух прямоугольников. Если стремиться по разным граням к одной и той же точке на ребре этого угла, то пределы соответствующих единичных нормалей получатся разные. Другим примером кусочно-гладкой поверхности, не являющейся гладкой, является поверхность куба, получающаяся, очевидно, склейкой его граней (гладких поверхностей) по их ребрам. Ясно, что на поверхности куба нет непрерывной единичной нормали: в точках ребер она даже не существует. Ниже будет дано такое определение ориентируемой поверхности, при котором указанные поверхности являются ориентируемыми.

Отметим, что при склеивании поверхностей даже «гладким образом» (т. е. когда для любой кривой, по которой произведено склеивание, в каждой ее точке можно так выбрать единичную нормаль, что она будет пределом соответствующим образом выбранных в окрестности этой точки единичных нормалей двух склеивающихся поверхностей) у склеенных поверхностей могут возникнуть качественно новые особенности: в отличие от параметрически заданных поверхностей в этом случае не всегда на всей поверхности можно выбрать непрерывную единичную нормаль. Примером такой поверхности является так называемый лист Мёбиуса*.

Его можно получить, взяв прямоугольную полоску бумаги $ABCD$, один раз перекрутив ее вокруг оси симметрии MN, параллельной сторонам BC и AD, и склеив ребро AB с CD

* А. Ф. Мёбиус (1790—1868) — немецкий математик и астроном.

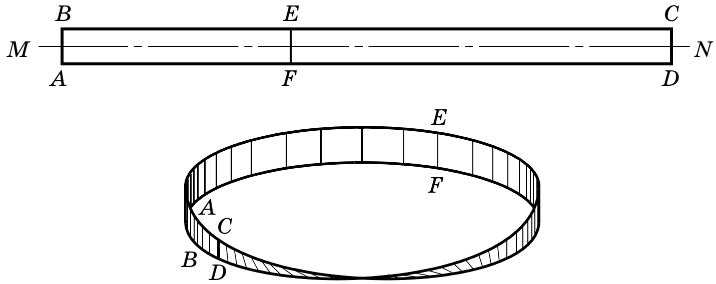


Рис. 90

(рис. 90). Правда, при таком способе образования лист Мёбиуса получается в результате склеивания поверхности самой с собой. Однако нетрудно получить его и склеиванием, описанным в определении 22, двух прямоугольников $ABEF$ и $FECD$.

Одной из характерных особенностей листа Мёбиуса является то, что у него имеется лишь одна «сторона»: его невозможно, как, например, боковую поверхность цилиндра, покрасить, скажем, с одной стороны красной, а с другой — синей краской. Кроме того, на листе Мёбиуса нельзя выбрать единичную нормаль, которая являлась бы непрерывной функцией точки пространства.

Все приведенные соображения делают естественным попытаться дать такое определение ориентации поверхности, для которого поверхности, например, типа поверхности параллелепипеда оказались бы ориентированными, а поверхности типа листа Мёбиуса — неориентированными.

Обратим внимание на то, что лист Мёбиуса может являться носителем параметрически заданной гладкой поверхности с кратными точками, и эта поверхность, как всякая гладкая параметрически заданная поверхность, будет ориентированной, имея в кратных точках своего носителя по две нормали. Это, конечно, не имеет никакого отношения к неориентируемости самого листа Мёбиуса.

50.13. Другой подход к понятию ориентации поверхности

Опишем другой подход к понятию ориентации, основанный на склеивании поверхностей, края которых суть кривые.

Пусть $S = \{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v);\ (u, v) \in \overline{D}\}$ — гладкая поверхность, краем которой является кривая. Положительная ориентация

кривой $\partial D = \{u(t),\ v(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ (т. е. ориентация против часовой стрелки на плоскости u, v с правой системой координат), в силу отображения $r(u(t),\ v(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, порождает вполне определенную ориентацию края ∂S поверхности S. Эта ориентация края ∂S поверхности S называется согласованной с ориентацией

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}$$

(см. определение 20) поверхности S.

Естественность этого определения можно пояснить следующим образом. Рассмотрим явно заданную поверхность $S: z = f(x, y),\ (x, y) \in \overline{D}$. Для нее (см. (50.51))

$$\boldsymbol{\nu} = \left(-\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},\ -\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_y^2 + f_y^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}\right).$$

Следовательно, $\cos \widehat{\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{k}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} > 0$, т. е. вектор нормали $\boldsymbol{\nu}$ образует с осью Oz острый угол и поэтому согласован с положительной ориентацией края ∂S поверхности S по правилу штопора: ориентация контура ∂S соответствует направлению вращения ручки штопора, а направление нормали $\boldsymbol{\nu}$ — движению самого штопора.

Очевидно, что если ориентация $\boldsymbol{\nu}$ рассматриваемой гладкой поверхности S согласована с ориентацией ее края ∂S, то ориентация $-\boldsymbol{\nu}$ согласована с противоположной ориентацией кривой ∂S. Таким образом, задание ориентации $\boldsymbol{\nu}$ гладкой поверхности равносильно заданию ориентации кривой ∂S, являющейся ее краем. Поэтому ориентированный край ∂S гладкой поверхности S будем, так же как и непрерывную единичную нормаль $\boldsymbol{\nu}$, называть *ориентацией поверхности* S.

Данное определение наглядно и удобно для конкретных приложений. Его математическая сущность состоит в том, что ориентация края гладкой поверхности является согласованной с ее ориентацией, если тройка векторов: касательный вектор к краю, который является кривой, нормальный к нему вектор, направленный в сторону поверхности (это понятие нетрудно определить), и вектор, задающий ориентацию поверхности (т. е. единичная непрерывная на поверхности нормаль) в точках края ориентированы так же, как координат-

ный репер в пространстве, т. е. преобразуются в него матрицей с положительным определителем.

Для произвольной параметрически заданной поверхности, т. е. без предположения о какой-либо ее гладкости, краем которой является контур, его ориентацию примем за исходное определение ориентации самой поверхности.

Пусть S_1 и S_2 — две поверхности, у которых края — кривые, и пусть эти две поверхности склеены (в смысле определения 22) по кривым $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, являющимся частями краев поверхностей S_1 и S_2. Ориентации ∂S_1 и ∂S_2 поверхностей S_1 и S_2 называются *согласованными*, если каждая из них порождает на склеивающихся кривых $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, противоположные ориентации.

Определение 24. *Поверхность S, склеенная из поверхностей $S_1, \dots, S_m$, называется ориентируемой, если существуют такие ориентации $\partial S_1, \dots, \partial S_m$ краев поверхностей $S_1, \dots, S_m$, что для любых соседних поверхностей S_i и S_j их ориентации ∂S_i и ∂S_j согласованы.*

Совокупность таких ориентаций, если она существует, называется *ориентацией поверхности* S.

Если указанной совокупности ориентаций краев ∂S_i поверхностей S_i, $i = 1, 2, \dots, m$, не существует, то поверхность S называется *неориентируемой*.

Если ориентации краев $\partial S_1, \dots, \partial S_m$ являются ориентацией поверхности $S = \{S_i\}$, то совокупность противоположных их ориентаций также является ориентацией поверхности S, называемой *противоположной данной*.

Можно показать, что если поверхность S ориентируема, то никаких других ориентаций, кроме двух указанных, у нее нет. Одна из этих двух ориентаций (произвольно какая) обычно называется положительной, а другая — отрицательной.

Аналогично ранее рассмотренному в п. 50.10 случаю ориентируемая поверхность, у которой фиксирована одна из ее ориентаций, называется *ориентированной*. При этом та из ориентированных поверхностей, ориентация которой названа положительной, обозначается S^+, а противоположно ориентированная — S^-.

Край ориентированной склеенной поверхности $S = \{S_i\}$, как край всякой склеенной поверхности, состоит, согласно

сказанному выше, из конечного числа замкнутых контуров. Каждый из этих контуров, в свою очередь, представляет собой объединение конечного числа кривых, каждая из которых является частью одного из контуров ∂S_i, а именно такой частью, что все ее точки, кроме, быть может, концевых, не склеиваются с точками других краев ∂S_j. Поэтому заданная согласованная ориентация склеенной ориентируемой поверхности $S = \{S_i\}$ порождает определенные ориентации (т. е. порядки точек) на указанных кривых. Можно показать, что эти ориентации, вместе взятые, составляют ориентации всех контуров, входящих в край ∂S склеенной поверхности S. Совокупность этих ориентаций контуров, составляющих край ∂S поверхности S, называется *ориентацией* этого *края*, порожденной заданной ориентацией поверхности S, или, что то же, согласованной с ней.

Обратим внимание на то, что как в определении склеивания поверхностей в п. 50.11, так и в определении 24 ориентации поверхности не предполагалось даже дифференцируемости склеиваемых поверхностей $S_1, \ldots, S_m$. Поэтому определение 24 ориентируемости поверхности можно использовать и для поверхностей, склеенных из поверхностей без каких-либо предположений об их дифференциальных свойствах, если только под их ориентацией понимать ориентации их краев, являющихся кривыми.

Если поверхность S склеена из гладких поверхностей $S_1, \ldots, S_m$, то для задания ее ориентации можно задать на каждой поверхности $S_1, \ldots, S_m$ непрерывные единичные нормали таким образом, чтобы согласованные с ними ориентации ∂S_i краев поверхностей S_i были согласованы между собой в смысле определения 24, т. е. являлись ориентацией поверхности S (рис. 91).

Для того чтобы при таком задании ориентации узнать, совпадают или нет две ориентации кусочно-гладкой поверхности, достаточно проверить лишь в одной произвольной точке, в которой существуют нормали, совпадают они или нет. Если в ней нормали совпадают, то они совпадают и всюду, а если они в этой точке не совпадают, т. е. противоположны, то они и всюду противоположны, поскольку, как выше отмечалось, существуют только две ориентации заданной поверхности.

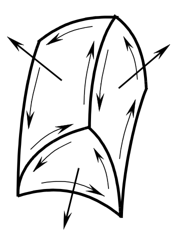


Рис. 91

Однако в случае кусочно-гладкой поверхности уже нельзя ввести понятие положительной ориентации, используя заданные представления склеиваемых гладких поверхностей и беря на них единичные нормали по формуле (50.50), так как эти ориентации могут оказаться несогласованными. Поэтому в случае кусочно-гладких поверхностей следует всегда более обстоятельно оговаривать, что именно подразумевается в данном случае под ориентациями поверхностей S_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, составляющими склеенную из них поверхность $S = \{S_i\}$.

Можно показать, что всякая кусочно-гладкая поверхность, являющаяся границей некоторой области трехмерного пространства, ориентируема. При этом одна из ориентаций состоит из единичных нормалей, направленных от поверхности в область — так называемых *внутренних нормалей*, а другая состоит из единичных нормалей, направленных от поверхности наружу от области — так называемых *внешних нормалей*. Примером такой поверхности является сфера. В качестве ее ориентации можно взять, например, единичные нормали, направленные по радиусу от точки сферы к центру (рис. 92).

Примером неориентируемой поверхности (в смысле определения 24) является лист Мёбиуса.

Иногда ориентируемые кусочно-гладкие поверхности называют также *двусторонними поверхностями*: они имеют две «стороны», соответствующие двум выборам единичных нормалей, задающим две ее ориентации. Соответственно неориентируемые поверхности называются *односторонними*. Оправдание этого термина было пояснено в п. 50.12 на примере листа Мёбиуса.

Мы не будем останавливаться на математизации всех описанных наглядных соображений и доказательстве высказанных утверждений. Это потребовало бы использование методов, изучение которых выходит за рамки настоящего курса. Упомянутые выше без доказательства общие утверждения, по существу, не используются в дальнейшем изложении. В каждом конкретном случае, о котором будет идти речь, можно будет всегда непосредственно указать, какая именно ориентация рассматривается в данном случае.

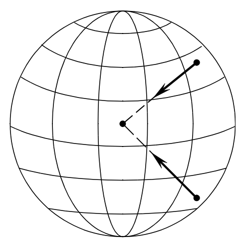


Рис. 92

УПРАЖНЕНИЕ 5. Пусть заданы вектор $\boldsymbol{\tau}$ и кривая $\Gamma = \{\rho(u),\ a \leqslant u \leqslant b\}$. *Цилиндрической поверхностью* S с образующей Γ и направляющей, параллельной вектору τ, называется поверхность, заданная представлением вида

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) \overset{\text{def}}{=} \rho(u) + v\boldsymbol{\tau}, \quad a \leqslant u \leqslant b,\ c \leqslant v \leqslant d.$$

Доказать, что если кривая Γ — кусочно-гладкая, то и поверхность S — кусочно-гладкая.

50.14. Кривизна кривых, лежащих на поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности

С помощью первой квадратичной формы были получены формулы для вычисления длин кривых на поверхности, углов между кривыми и площади поверхности. Однако знание всех этих величин еще не определяет поверхность. Например, прямоугольник можно изогнуть так, что он будет образовывать половину боковой поверхности цилиндра. Эта цилиндрическая поверхность и исходный прямоугольник — разные поверхности, однако при указанном изгибании длины кривых углы между ними и площади частей поверхности сохраняются неизменными. Вместе с тем кривизна кривых на поверхности при таком изгибании, вообще говоря, меняется: прямолинейный отрезок может перейти, например, в полуокружность.

Дальнейшие локальные исследования поверхности в окрестности заданной ее точки будем проводить, изучая всевозможные кривые, лежащие на поверхности и проходящие через рассматриваемую точку, в частности, изучая кривизны этих кривых.

Пусть

$$S = \{\boldsymbol{r}(u, v);\ (u, v) \in \overline{D}\} \tag{50.54}$$

— дважды непрерывно дифференцируемая поверхность и $r(u_0\ v_0)$ — ее внутренняя неособая точка. Рассмотрим кривую на поверхности S, заданную представлением

$$\boldsymbol{r}(s) \equiv \boldsymbol{r}(u(s), v(s)),\ 0 \leqslant s \leqslant S, \tag{50.55}$$

где функции $u(s)$ и $v(s)$ дважды дифференцируемы на отрезке $[0, S]$, s — переменная длина дуги кривой (50.55), $u(s_0) = u_0$, $v(s_0) = v_0$, $0 \leqslant s_0 \leqslant S$, и, следовательно, $\boldsymbol{r}(s_0) = \boldsymbol{r}(u_0, v_0)$. Будем предполагать, что точка $\boldsymbol{r}(s_0)$ является неособой для кривой (50.55). Вспомним, что вдоль кривой выполняется равенство

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = k\boldsymbol{n}, \tag{50.56}$$

где $\boldsymbol{n}$ — главная нормаль кривой, а k — ее кривизна. Будем предполагать, что $k \neq 0$; тогда главная нормаль $\boldsymbol{n}$ определена однозначно.

Обозначим через $\boldsymbol{\nu}$ единичную нормаль к поверхности (50.54) в ее точке $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ и через θ угол между вектором $\boldsymbol{\nu}$ и главной нормалью $\boldsymbol{n}$ кривой (50.55) в ее точке $\boldsymbol{r}(s_0)$ (рис. 93). Тогда, умножив скалярно обе части равенства (50.56) на вектор $\boldsymbol{\nu}$, получим

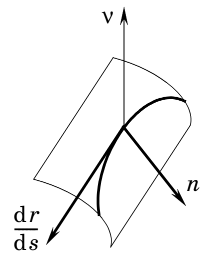


Рис. 93

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\boldsymbol{\nu} = k\cos\theta. \tag{50.57}$$

Заметив, что

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\boldsymbol{r}_u\frac{du}{ds} + \boldsymbol{r}_v\frac{dv}{ds}\right) = \boldsymbol{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \boldsymbol{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 =$$
$$= \frac{\boldsymbol{r}_{uu}du^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}du\,dv + \boldsymbol{r}_{vv}dv^2}{ds^2}, \tag{50.58}$$

из (50.57) получим

$$k\cos\theta \underset{\substack{(50.57)\\(50.58)}}{=} \frac{\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{\nu}du^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{\nu}du\,dv + \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{\nu}dv^2}{ds^2}. \tag{50.59}$$

Введя обозначения

$$L(u, v) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{\nu}, \quad M(u, v) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{\nu}, \quad N(u, v) = \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{\nu} \tag{50.60}$$

и вспомнив, что $ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2$ (см. (50.44)), запишем равенство (50.59) в виде

$$k\cos\theta = \frac{Ldu^2 + 2Mdu\,dv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2}. \tag{50.61}$$

Определение 25. *Квадратичная форма*

$$Ldu^2 + 2Mdu\,dv + Ndv^2$$

называется второй квадратичной формой поверхности.

Ее коэффициенты L, M и N, согласно определению (50.60), однозначно определяются в каждой точке поверхности при заданном ее представлении и выборе к ней единичной нормали в рассматриваемой точке (от этого выбора зависит лишь знак коэффициентов L, M, N). Коэффициенты первой квадратичной формы также однозначно определяются в каждой точке поверхности при заданном ее представлении, поэтому в этом случае дробь, стоящая в правой части формулы (50.61), зависит в данной точке поверхности только от отношения $du : dv$ (в чем легко убедиться, разделив числитель и знаменатель дроби на du или dv).

Для кривой (50.55) $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv$, поэтому отношение $du : dv$ задает положение касательной к кривой (50.55) в точке $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$. Таким образом, правая часть равенства (50.61) имеет

одно и то же значение для всех кривых (50.55), проходящих через точку $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ и имеющих одну и ту же касательную.

В левой части формулы (50.61) угол θ между векторами $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\nu}$ зависит для данной точки поверхности от вектора главной нормали кривой (50.55). Главная нормаль лежит в соприкасающейся плоскости, поэтому если задана не только касательная к кривой, но и ее соприкасающаяся плоскость, то с точностью до знака определен и $\cos\theta$ (главная нормаль может иметь одно из двух взаимно противоположных направлений, перпендикулярных касательной к кривой). Знак $\cos\theta$, а следовательно, и одно из двух указанных возможных направлений нормали определяются из формулы (50.61), поскольку кривизна всегда положительна.

Итак, если задана касательная и соприкасающаяся плоскость кривой, лежащей на поверхности и проходящей через заданную точку поверхности, то ее кривизна k однозначно определяется из формулы (50.61):

$$k = \frac{1}{\cos\theta}\frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}. \tag{50.62}$$

Иначе говоря, доказана теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Две кривые на дважды непрерывно дифференцируемой поверхности с одними и теми же касательными и главными нормалями во внутренней неособой точке поверхности имеют в этой точке одинаковую кривизну, для которой имеет место формула* (50.62).

Две такие кривые имеют одну и ту же соприкасающуюся плоскость, пересечение которой с касательной плоскостью к поверхности является касательной к кривой.

Но одну и ту же касательную и соприкасающуюся плоскость могут иметь много различных кривых, лежащих на поверхности. В каком-то смысле наиболее простой из них является плоская кривая, лежащая в соприкасающейся плоскости. Таким образом, изучение кривизны кривых, лежащих на поверхности, сводится к изучению кривизны плоских кривых — сечений данной поверхности плоскостями. Напомним, что плоская кривая полностью, с точностью до положения в пространстве, задается своей кривизной (см. п. 17.6).

Обратим внимание на то, что мы изучаем поверхность в окрестности неособой точки. Поэтому в замыкании некоторой окрестности этой точки поверхность допускает явное представление (см. п. 50.6) и, следовательно, является простой поверхностью (см. п. 50.2). Подобным образом часть кривой в

замыкании некоторой окрестности неособой точки является простой дугой (см. п. 16.2). Простые поверхности и простые дуги однозначно определяются своими носителями, поэтому мы здесь вместо «носитель поверхности» или «носитель кривой» говорим просто «поверхность или кривая».

Сечения поверхности плоскостями будут рассмотрены чуть позже, а сейчас вернемся ко второй квадратичной форме.

50.15. Свойства второй квадратичной формы поверхности

Знание первой и второй квадратичных форм на поверхности дает возможность вычислять кривизны кривых, лежащих на этой поверхности. Поэтому важно иметь удобные формулы для вычисления коэффициентов второй квадратичной формы поверхности: $S = \{\boldsymbol{r}(u, v); (u, v) \in \overline{D}\}$.

Если за единичную нормаль $\boldsymbol{\nu}$ к поверхности S в рассматриваемой ее неособой точке взять, как обычно, вектор

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}$$

и вспомнить (см. (50.46)), что $|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| = \sqrt{EG - F^2}$, то из формул (50.60) получим

$$L(u,v) = \frac{(\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}},\ M(u,v) = \frac{(\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}},\ N(u,v) = \frac{(\boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad (50.63)$$

где в числителе дробей стоят смешанные произведения векторов. Нетрудно записать эти формулы и в координатной форме. Сделаем это для случая, когда поверхность S задается явным представлением:

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in U. \qquad (50.64)$$

Здесь U — открытое плоское множество. В этом случае (см. (50.49)) $EG - F^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2$, а так как радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точек поверхности имеет вид $\boldsymbol{r} = (x, y, f(x, y))$, то

$$(\boldsymbol{r}_{xx}, \boldsymbol{r}_x, \boldsymbol{r}_y) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & f_{xx} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = f_{xx}, \quad (\boldsymbol{r}_{xy}, \boldsymbol{r}_x, \boldsymbol{r}_y) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & f_{xy} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = f_{xy},$$

$$(\boldsymbol{r}_{yy}, \boldsymbol{r}_x, \boldsymbol{r}_y) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & f_{xy} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = f_{yy}.$$

Таким образом, в этом случае, в силу формулы (50.63), имеем

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \qquad (50.65)$$

Для дальнейшего анализа второй квадратичной формы выберем более специальную систему координат: перенесем начало координат в рассматриваемую точку поверхности и за плоскость переменных x, y выберем касательную плоскость к поверхности (см. п. 50.6).

Пусть для поверхности

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in U, \qquad (50.66)$$

координатная плоскость переменных x, y является касательной плоскостью к поверхности в точке (0,0) и, следовательно,

$$f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0. \qquad (50.67)$$

Вторая квадратичная форма в точке (0, 0) в этом случае принимает вид (см. (50.65))

$$f_{xy}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2, \qquad (50.68)$$

т. е. совпадает со вторым дифференциалом функции f в этой точке.

Разложим функцию f по формуле Тейлора в окрестности точки (0, 0). В силу (50.67), получим

$$z = \frac{1}{2}(f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2) + o(x^2 + y^2),$$
$$(x, y) \to (0, 0), \qquad (50.69)$$

т. е. вторая квадратичная форма поверхности в точке (0, 0)

$$f_{xx}\, x^2 + 2f_{xy}xy + f_{yy}\, y^2,$$

с точностью до постоянного множителя 1/2 равна главной части отклонения поверхности от ее касательной плоскости при стремлении точки поверхности к точке касания.

Формулы (50.61) и (50.69) раскрывают геометрический смысл второй квадратичной формы.

50.16. Плоские сечения поверхности

Как мы видели, изучение кривизны кривых на поверхности сводится к изучению кривизны сечений поверхности плоскостями. Прежде всего покажем, что, вообще говоря, при сечении поверхности плоскостями действительно получаются кривые. Выражение «вообще говоря» добавлено, так как ука-

занное явление не всегда имеет место; например, при сечении плоскости совпадающей с ней плоскостью получается целая плоскость, а не кривая; при сечении поверхности $z = x^2 - y^2$ плоскостью $z = 0$ получается пара пересекающихся прямых: $x + y = 0$, $x - y = 0$.

При изучении сечений поверхности ограничимся рассмотрением только ее неособых точек и будем предполагать, что поверхность задана явно и что плоскость переменных x, y является касательной плоскостью к поверхности. Это не ограничивает общности рассмотрений, так как локально поверхность в неособой точке всегда имеет указанное представление (см. лемму 1 в п. 50.6), а кривизна кривых на поверхности, которая нас будет интересовать, является локальным свойством.

ЛЕММА 2. *Если*

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \tag{50.70}$$

—дважды непрерывно дифференцируемая на открытом множестве D функция, $(0, 0) \in D$,

$$f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0 \tag{50.71}$$

(*т. е. координатная плоскость переменных x и y является касательной плоскостью к графику функции f*) и Π — *плоскость, проходящая через точку* $(0, 0, 0)$ *и не касающаяся в этой точке графика S функции f, то существует такая окрестность U точки* $(0, 0, 0)$, *что пересечение поверхности S с плоскостью* Π, *содержащееся в замыкании $\overline{U}$ окрестности U, является дважды непрерывно дифференцируемой простой дугой, для которой точка* $(0, 0, 0)$ *является внутренней точкой.*

Доказательство. Уравнение плоскости Π, проходящей через начало координат, имеет вид

$$Ax + By + Cz = 0, \tag{50.72}$$

причем если эта плоскость не является касательной плоскостью в точке $(0, 0, 0)$ к поверхности S, т. е. не совпадает с координатной плоскостью переменных x, y (см. (50.71)), то коэффициенты A и B не могут одновременно обратиться в нуль:

$$A^2 + B^2 > 0. \tag{50.73}$$

Подставив в формулу (50.72) выражение (50.70) для z, получим

$$F(x, y) \overset{\text{def}}{=} Ax + By + Cf(x, y) = 0, \tag{50.74}$$

откуда

$$F_x(0, 0) \underset{(50.71)}{=} A, \quad F_y(0, 0) \underset{(50.71)}{=} B.$$

Согласно условию (50.73), хотя бы одна из этих частных производных не равна нулю. Пусть, для определенности, $F_y(0, 0) \neq 0$. Так как, кроме того, $F(0, 0) \underset{(50.71)}{=} 0$, то из теоремы о неявных функциях, примененной к уравнению (50.74), следует, что существует такая окрестность

$$U_0 = \{(x, y) : a < x < b,\ c < y < d\}$$

точки (0, 0) на плоскости переменных x, y, в которой уравнение (50.74), а следовательно, и система уравнений (50.70), (50.72) имеют единственное решение:

$$y = \varphi(x), \quad x \in (\alpha, \beta), \tag{50.75}$$

где (α, β) — некоторый интервал, содержащий точку $x = 0$ и лежащий в интервале (a, b). Это означает, что в окрестности точки (0, 0, 0) пересечение поверхности (50.70) с плоскостью (50.72) является кривой, задаваемой представлением $x = x$, $y = \varphi(x)$, $z = f(x, \varphi(x))$, $\alpha < x < \beta$.

Если теперь $\alpha < a_0 < 0 < b_0 < \beta$, то кривая

$$y = \varphi(x), \quad z = f(x, \varphi(x)), \quad a_0 \leqslant x \leqslant b_0, \tag{50.76}$$

является простой дугой (отображение (50.76) взаимно-однозначно), имеющей точку (0, 0, 0) своей внутренней точкой. Выберем теперь числа c_0 и d_0 так, чтобы $c < c_0 < 0 < d_0 < d$, и пусть

$$U = \{x, y, z) : a_0 < x < b_0,\ c_0 < y < d_0,\ -\infty < z < +\infty\}$$

— бесконечный открытый параллелепипед, являющийся, очевидно, окрестностью точки (0, 0, 0). Часть кривой (50.76), лежащая в замыкании $\overline{U}$ окрестности U точки (0, 0, 0), является простой дугой (частью простой дуги (50.76)), для которой точка (0, 0, 0) также является внутренней точкой.

Функция f, по условию, дважды непрерывно дифференцируема, поэтому по теореме о неявных функциях функция φ (см. (50.75)) также дважды непрерывно дифференцируема, а следовательно, и простая дуга (50.76) дважды непрерывно дифференцируема. □

В дальнейшем нас будет интересовать структура поверхности лишь вблизи данной точки, и мы всегда будем предполагать, что на поверхности выбрана такая окрестность этой точки, что пересечение каждой рассматриваемой плоскости с поверхностью (в наших рассмотрениях всегда участвует лишь конечное множество таких плоскостей), лежащее в замыкании указанной окрестности, будет всегда представлять собой кривую (даже простую дугу), что, согласно лемме 2, всегда имеет место для достаточно малой окрестности.

50.17. Нормальные сечения поверхности

Среди всех сечений поверхности плоскостями, проходящими через некоторую ее точку, особую роль играют так называемые *нормальные сечения,* т. е. сечения поверхности, образованные плоскостями, содержащими нормаль к поверхности в рассматриваемой ее точке. Такие плоскости называются *нормальными плоскостями.*

Нормальных сечений, проходящих через данную точку поверхности, бесконечно много. Однако если заранее задать прямую, которая должна быть касательной к нормальному сечению (эта прямая, очевидно, должна лежать в касательной плоскости к поверхности, где лежат касательные ко всем кривым на поверхности (см. п. 50.5)), то нормальное сечение определяется однозначно. В самом деле, это нормальное сечение должно лежать в плоскости, проходящей через нормаль к поверхности, и через заданную касательную, так как касательная плоской кривой лежит в той же плоскости, где и кривая. Плоскость же, проходящая через две пересекающиеся перпендикулярные прямые, определяется однозначно. Пересечением этой плоскости с касательной плоскостью к поверхности является заданная прямая, так как она лежит в обеих плоскостях. Получившееся нормальное сечение будет иметь своей касательной заданную прямую, так как его касательная должна, с одной стороны, лежать в его плоскости, а с другой — в касательной плоскости к поверхности.

Начнем изучение кривизны плоских кривых на поверхности с изучения кривизн кривых, имеющих одну и ту же касательную.

Пусть $r\ (u_0,\ v_0)$ — неособая внутренняя точка дважды непрерывно дифференцируемой поверхности S. Рассмотрим кривые на поверхности, проходящие через эту точку и имеющие общую касательную. Если через эту касательную и нормаль к поверхности S провести плоскость, то получим нормальное сечение Γ_0, кривизну которого обозначим k_0. Рассмотрим случай, когда $k_0 \neq 0$. Главная нормаль нормального сечения Γ_0 лежит, очевидно, в плоскости сечения и поэтому, будучи перпендикулярной касательной, направлена по нормали к поверхности. Выберем за нормаль $\mathbf{v}$ к поверхности S в точке $r\ (u_0,\ v_0)$ главную нормаль нормального сечения Γ_0; тогда угол между ними равен нулю и, следовательно, из формулы (50.61) имеем

$$k_0 = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}. \tag{50.77}$$

Для кривизны любой другой кривой Г, лежащей на поверхности S, которая проходит через точку $r(u_0, v_0)$ и имеет ту же касательную в этой точке, что и нормальное сечение Γ_0, справедлива формула (50.61)

$$k\cos\theta = \frac{L du^2 + 2M du\, dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2}, \qquad (50.78)$$

где θ — угол между нормалью $\boldsymbol{\nu}$ к поверхности S и главной нормалью $\boldsymbol{n}$ кривой.

Правые части формул (50.77) и (50.78) равны, так как зависят только от отношения $du : dv$, т. е. от касательной, которая у них общая. Из равенства правых частей этих формул следует и равенство левых их частей:

$$k_0 = k\cos\theta. \qquad (50.79)$$

Итак, мы пришли к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2 (теорема Менье*). *Если во внутренней неособой точке дважды непрерывно дифференцируемой поверхности у некоторого ее нормального сечения радиус кривизны R_0 конечен, то радиус кривизны R любой другой кривой, имеющей ту же касательную, что и указанное нормальное сечение, равен R_0, умноженному на косинус угла θ между нормалью к поверхности и главной нормалью к кривой*:

$$R = R_0\cos\theta. \qquad (50.80)$$

Эта формула сразу следует из формулы (50.79), так как $k = 1/R$, $k_0 = 1/R_0$.

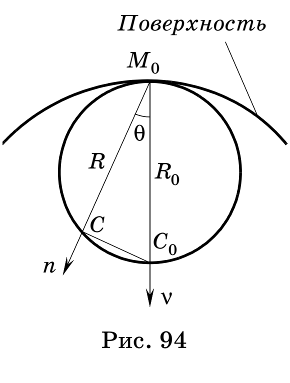


Рис. 94

Дадим геометрическую интерпретацию формулы (50.80). Рассмотрим сечение поверхности S плоскостью, проходящей через точку $M_0 = r\ (u_0, v_0)$ и перпендикулярной общей касательной рассматриваемых кривых (рис. 94). В этой плоскости лежат нормаль $\boldsymbol{\nu}$ к поверхности S и главная нормаль $\boldsymbol{n}$ кривой Г (они обе перпендикулярны общей касательной к кривым), следовательно, и центры кривизн C_0 и C соответственно кривых Γ_0 и Г. Соотно-

* Ж. Менье (1754—1793) — французский математик.

шение (50.80) показывает, что центры кривизн C составляют окружность, для которой отрезок M_0C_0 длины R_0 является диаметром.

Если рассмотреть только плоские сечения поверхности, имеющие общую касательную с нормальным сечением Γ_0, т. е. образованные плоскостями, проходящими через эту касательную, то на рис. 94 прямая M_0C_0 является следом на плоскости чертежа нормального сечения, прямая M_0C — следом секущей плоскости, а θ — углом между этими плоскостями. Формула (50.80) показывает, что центр кривизны C любого плоского сечения является основанием перпендикуляра, опущенного на секущую плоскость из центра кривизны C_0 нормального сечения, имеющего ту же касательную, что и рассматриваемое плоское сечение.

При вращении секущей плоскости от совпадения ее с нормальным сечением до совпадения с касательной плоскостью (это соответствует изменению угла θ от 0 до $\pi/2$) радиус кривизны сечения изменяется от R_0 до 0, в частности, когда секущая плоскость стремится к касательной плоскости, т. е. $\theta \to \pi/2$, радиус кривизн плоских сечений будет стремиться к нулю, а следовательно, их кривизны — к бесконечности.

Конечно, согласно теореме 1 п. 50.14, таким же будет и закон изменения кривизн кривых, которые имеют общую касательную с нормальным сечением Γ_0 и для которых указанные секущие плоскости являются соприкасающимися плоскостями.

50.18. Главные кривизны. Формула Эйлера

В том случае, когда рассматривается нормальное сечение поверхности S в данной ее точке, для его кривизны k имеет место формула (см. (50.59)—(50.61))

$$\pm k = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{ds^2} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}, \quad (50.81)$$

так как угол θ между нормалью $\boldsymbol{\nu}$ к поверхности S и главной нормалью $\boldsymbol{n}$ нормального сечения равен 0 или π, а следовательно, $\cos\theta = \pm 1$.

Рассмотрим теперь, как изменяются кривизны нормальных сечений в зависимости от положения нормального сечения в неособой внутренней точке поверхности. Как известно, в окрестности такой точки поверхность всегда можно задать

явным представлением, в котором плоскость независимых переменных является касательной плоскостью в рассматриваемой точке поверхности (см. п. 50.6). Мы и будем рассматривать поверхность, заданную таким представлением.

Пусть поверхность S задана дважды непрерывно дифференцируемой функцией $f(x, y)$ в окрестности U точки (0, 0):

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in U, \tag{50.82}$$

причем координатная плоскость переменных x, y является касательной плоскостью к поверхности S в ее точке $f(0, 0)$ и, следовательно,

$$f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0. \tag{50.83}$$

Введем следующие обозначения:

$$f^0_{xx} \overset{\text{def}}{=} f_{xx}(0, 0), \quad f^0_{xy} \overset{\text{def}}{=} f_{xy}(0, 0), \quad f^0_{yy} \overset{\text{def}}{=} f_{yy}(0, 0)$$

и зафиксируем какую-либо единичную нормаль $\boldsymbol{\nu}$ к поверхности S в точке (0, 0, 0), например $\boldsymbol{\nu} = (0, 0, 1)$.

Формула для кривизн нормальных сечений поверхности S в точке (0, 0, 0) имеет вид (см. (50.81), (50.65) и (50.83))

$$\pm k = \frac{f^0_{xx}dx^2 + 2f^0_{xy}dx\,dy + f^0_{yy}dy^2}{ds^2}. \tag{50.84}$$

Касательная к нормальному сечению лежит в плоскости переменных x, y, поэтому $\frac{dx}{ds} = \cos\varphi$, $\frac{dy}{ds} = \sin\varphi$, где (см. (16.19) и (16.22)) φ — угол между касательной к нормальному сечению и осью Ox. Поэтому формула (50.84) для нормальных сечений поверхности S имеет вид

$$\pm k = f^0_{xx}\cos^2\varphi + f^0_{xy}\cos\varphi\sin\varphi + f^0_{yy}\sin^2\varphi.$$

Для простоты записи отнесем здесь знак минус к кривизне k, т. е. будем считать кривизну нормального сечения положительной, если направления нормали к поверхности S и главной нормали нормального сечения совпадают, и отрицательной, если они имеют противоположное направление. При этом соглашении имеем

$$k = f^0_{xx}\cos^2\varphi + 2f^0_{xy}\cos\varphi\sin\varphi + f^0_{yy}\sin^2\varphi. \tag{50.85}$$

Повернем теперь координатные оси Ox и Oy в их координатной плоскости так, чтобы член с произведением косинуса и синуса в формуле (50.85) обратился в нуль. Это всегда можно сделать, согласно общей теории приведения квадратичных

форм к каноническому виду. Впрочем, в данном случае в этом легко убедиться непосредственно.

В самом деле, координаты точки x, y выражаются через ее координаты x^*, y^* в системе координат, полученной поворотом координатных осей на угол ψ, по формулам

$$x = x^* \cos\psi - y^* \sin\psi,$$

$$y = x^* \sin\psi + y^* \cos\psi.$$

Подберем угол ψ так, чтобы для функции

$$f^*(x^*, y^*) \stackrel{\text{def}}{=} f(x^* \cos\psi - y^* \sin\psi,\ x^* \sin\psi + y^* \cos\psi)$$

имело место равенство

$$f^*_{x^*y^*}(0, 0) = 0. \qquad (50.86)$$

Так как $f^*_{x^*} = f_x \cos\psi + f_y \sin\psi$, то

$$f^*_{x^*y^*} = -f_{xx}\cos\psi\sin\psi + f_{xy}(\cos^2\psi - \sin^2\psi) + f_{yy}\sin\psi\cos\psi =$$

$$= \frac{1}{2}\Big((f_{yy} - f_{xx})\sin 2\psi + 2f_{xy}\cos 2\psi\Big),$$

следовательно, для того чтобы выполнялось условие (50.86), следует выбрать угол ψ так, чтобы

$$\operatorname{ctg} 2\psi = \frac{f^0_{xx} - f^0_{yy}}{2f^0_{xy}}.$$

После поворота на этот угол ψ формула (50.85) принимает вид

$$k = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi. \qquad (50.87)$$

Здесь $k_1 = f^*_{x^*x^*}(0, 0)$, $k_2 = f^*_{y^*y^*}(0, 0)$, а φ — угол между касательной к нормальному сечению и новой координатной осью Ox^*. Для простоты новые координаты будем обозначать по-прежнему через x и y без звездочек.

Из формулы (50.87) следует, что k_1 является кривизной нормального сечения, произведенного нормальной плоскостью, проходящей через ось Ox, а k_2 — кривизной нормального сечения, произведенного нормальной плоскостью, проходящей через ось Oy.

Из формулы (50.87) следует также, что кривизны k_1 и k_2 являются экстремальными значениями нормальных кривизн. Действительно, если $k_1 = k_2$, то из формулы (50.87) получим, что для всех углов φ выполняется равенство $k = k_1 = k_2$, т. е. что кривизна не зависит от угла φ.

Если же $k_1 \neq k_2$ и, например, $k_1 > k_2$, то, записав формулу (50.87) в виде

$$k = (k_1 - k_2)\cos^2 \varphi + k_2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = (k_1 - k_2)\cos^2 \varphi + k_2,$$

получим, что $k \geqslant k_2$ и $k = (k_1 - k_2)\cos^2 \varphi + k_2 \leqslant (k_1 - k_2) + k_2 = k_1$, т. е. что $k_2 \leqslant k \leqslant k_1$.

Определение 26. *Экстремальные значения k_1 и k_2 кривизн нормальных сечений в данной точке поверхности называются главными кривизнами, соответствующие им нормальные сечения — главными нормальными сечениями, а их касательные — главными направлениями.*

Кривая на поверхности, которая в каждой своей точке имеет главное направление, называется *линией кривизны*.

Полученный выше результат можно в терминах главных направлений сформулировать в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Кривизна k любого нормального сечения во всякой внутренней неособой точке дважды непрерывно дифференцируемой поверхности выражается через кривизны k_1 и k_2 двух взаимно-перпендикулярных главных нормальных сечений по формуле*

$$k = k_1\cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi,$$

где φ — угол, образованный плоскостью нормального сечения с плоскостью главного нормального сечения с кривизной k_1.

Формула (50.87) называется *формулой Эйлера*.

В случае $k_1 \neq k_2$ для любой кривизны k, не равной ни одной из главных кривизн, существует четыре значения угла φ, для которых выполняется соотношение (50.87): φ, $\varphi + \pi/2$, $\varphi + \pi$ и $\varphi + 3\pi/2$. Углы, отличающиеся друг от друга на π, определяют одно и то же нормальное сечение, поэтому для каждой указанной кривизны k существует точно два различных нормальных сечения, имеющих данную кривизну.

Если же $k = k_1$ или $k = k_2$, то из формулы (50.87) следует, что существует только одно нормальное сечение, имеющее своей кривизной данную главную кривизну.

Отметим, в частности, что при $k_1 \neq k_2$ значение $k = 0$ (которое было исключено из рассмотрения при доказательстве теоремы Менье) может либо совсем отсутствовать в данной точке поверхности, когда главные кривизны одного знака, либо получаться при одном значении φ, когда одна из главных кривизн равна нулю, либо при двух, когда главные кривизны имеют разные знаки. Направления, которым соответствуют

нормальные сечения нулевой кривизны, называются *асимптотическими направлениями на поверхности*. В каждой точке поверхности, в которой $k_1 \neq k_2$, в силу сказанного выше, имеется не более двух асимптотических направлений. Кривая на поверхности, которая в каждой своей точке имеет асимптотическое направление, называется *асимптотической линией*.

Экстремальное свойство главных кривизн, очевидно, не зависит от выбора представления поверхности: оно определяется свойствами кривизн кривых, лежащих на поверхности, и, таким образом, главные кривизны являются характеристиками самой поверхности. Замечательным фактом является то обстоятельство, доказанное выше, что главные направления, т. е. направления, отвечающие экстремальным значениям кривизн нормальных сечений, ортогональны.

Подведем некоторые итоги. Из полученных результатов следует, что изучение кривизн кривых на поверхности в данной ее точке сводится к кривизнам плоских сечений (теорема 1), кривизны плоских сечений — к кривизнам нормальных сечений (теорема 2), а кривизны нормальных сечений выражаются через главные кривизны по формуле Эйлера (теорема 3).

50.19. Вычисление главных кривизн

Перепишем формулу (50.77) для определения нормальной кривизны в виде

$$(L - kE)du^2 + 2(M - kF)du\,dv + (N - kG)dv^2 = 0.$$

Разделив это уравнение на dv^2 и введя вспомогательную переменную $t = \frac{du}{dv}$ (значение t определяет нормальное сечение), получим

$$(L - kE)t^2 + 2(M - kF)t + (N - kG) = 0. \qquad (50.88)$$

Корни квадратного уравнения (50.88) определяют положение нормального сечения, отвечающего кривизне k. Для главных кривизн, и только для них, такое положение единственно, поэтому для них корни квадратного уравнения (50.86) должны слиться, т. е. его дискриминант должен обратиться в нуль:

$$(M - kF)^2 - (L - kE)(N - kG) = 0 \qquad (50.89)$$

или в виде, более удобном для запоминания,

$$\frac{L - kF}{M - kF} = \frac{M - kF}{N - kG}. \qquad (50.90)$$

Это и есть уравнение для определения главных кривизн.

Если главные кривизны k_1 и k_2 найдены, то, подставив их значения в уравнение (50.88), найдем значение главного направления t.

Определение 27. *Произведение главных кривизн поверхности в данной ее точке называется полной или гауссовой* кривизной поверхности*

$$K = k_1 k_2, \tag{50.91}$$

а их полусумма

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \tag{50.92}$$

— средней кривизной поверхности.

Очевидно, что знание главных кривизн в точке поверхности равносильно знанию ее полной и средней кривизн в этой точке. Однако в некоторых вопросах, в чем мы скоро убедимся, удобнее иметь дело с полной и средней кривизной, чем с главными кривизнами.

Для получения формул для полной и средней кривизн запишем уравнение (50.89) для главных кривизн в следующем виде:

$$(EG - F^2)k^2 - (EN - 2FM + GL)k + LN - M^2 = 0.$$

Отсюда по теореме Виета получим

$$K \underset{(50.91)}{=} k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \tag{50.93}$$

$$H \underset{(50.92)}{=} \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}. \tag{50.94}$$

Главные кривизны в данной точке поверхности не зависят от представления поверхности, поэтому не зависят от представления поверхности полная и средняя кривизны. Так как первая квадратичная форма поверхности положительно определенная (она равна ds^2), и, следовательно, ее дискриминант больше нуля: $EG - F^2 > 0$, то из формулы (50.93) для полной кривизны следует, что и сигнатура дискриминанта $LN - M^2$ второй квадратичной формы поверхности не зависит от представления поверхности: если полная кривизна равна нулю, то и этот дискриминант равен нулю, а если полная кривизна отлична от нуля, то его знак совпадает со знаком полной кривизны.

Пример. Вычислим полную и среднюю кривизны для гиперболического параболоида $z = x^2 - y^2$.

---

* К. Ф. Гаусс (1777—1855) — немецкий математик.

Согласно формулам (50.49) и (50.65), в этом случае

$$E = 1 + 4x^2,\ F = -4xy,\ G = 1 + 4y^2,\ EG - F^2 = 1 + 4x^2 + 4y^2,$$

$$L = 2,\ M = 0,\ N = -2,\ LN - M^2 = -4,$$

поэтому

$$K \underset{(50.91)}{=} -\frac{4}{1 + 4x^2 + 4y^2},\quad H \underset{(50.92)}{=} \frac{4(y^2 - x^2)}{1 + 4x^2 + 4y^2}.$$

50.20. Классификация точек поверхности

С помощью полной кривизны поверхности оказывается удобным классифицировать точки поверхности.

Определение 28. *Точки поверхности, в которых полная кривизна положительная, называются эллиптическими точками поверхности, в которых она отрицательная — гиперболическими, а в которых она равна нулю, но одна из главных кривизн отлична от нуля, — параболическими.*

Точки, в которых обе главные кривизны равны нулю, а следовательно, равна нулю и полная кривизна, называются *точками уплощения поверхности*.

В эллиптической точке поверхности $K = k_1k_2 > 0$. Будем считать, что $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$, так как этого всегда можно добиться, изменив в случае необходимости направление нормали к поверхности, в результате чего знаки главных кривизн изменятся на противоположные. В этом случае все кривизны нормальных сечений положительные и, следовательно, все главные нормали нормальных сечений направлены в одну и ту же сторону — в сторону нормали $\mathbf{v}$ к поверхности, — поэтому все нормальные сечения загибаются в сторону вектора $\mathbf{v}$ (см. п. 17.3). Иначе говоря, поверхность в некоторой окрестности рассматриваемой точки располагается по одну сторону от своей касательной плоскости (рис. 95).

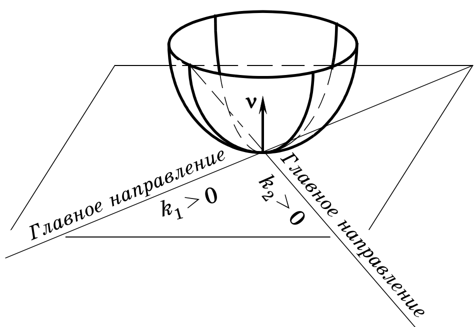


Рис. 95

Асимптотических направлений в эллиптической точке нет: если $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$, то из формулы Эйлера (50.87) следует, что для любого нормального сечения его кривизна

$$k = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi > 0.$$

Так как знак полной кривизны K совпадает со знаком дискриминанта $LN - M^2$ второй квадратичной формы поверхности (см. п. 50.19), то в эллиптической точке

$$LN - M^2 > 0. \qquad (50.95)$$

В гиперболической точке поверхности гауссова кривизна отрицательна: $K = k_1k_2 < 0$. Следовательно, главные кривизны имеют противоположные знаки, поэтому главные нормали главных нормальных сечений направлены в противоположные стороны. Это означает, что одно главное нормальное сечение загибается от касательной плоскости в сторону нормали $\boldsymbol{\nu}$ к поверхности, а другое — в противоположную.

Когда нормальное сечение непрерывно вращается от одного главного сечения до другого, его кривизна непрерывно меняется от отрицательного до положительного значения или наоборот и, следовательно, для некоторого нормального сечения обращается в нуль. Направление касательной этого сечения (а именно угол φ, который она образует с одним из главных направлений) находится из формулы Эйлера: $k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi = 0$, откуда

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{-k_1/k_2}.$$

(Так как k_1 и k_2 имеют разные знаки, то под знаком корня стоит положительная величина.) Итак, в случае гиперболической точки существует два асимптотических направления: одно — под углом $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{-k_1/k_2}$, другое — под углом $\varphi = -\operatorname{arctg}\sqrt{-k_1/k_2}$, и, следовательно, симметрично первому относительно главных направлений.

Из двух пар вертикальных углов, образованных асимптотическими направлениями, в одной паре кривизны нормальных сечений положительны, в другой — отрицательны. Поэтому нормальные сечения в одной из указанных пар вертикальных углов отклоняются от касательной плоскости к поверхности в противоположную сторону по сравнению с отклонением от этой плоскости нормальных сечений в другой паре вертикальных углов (рис. 96).

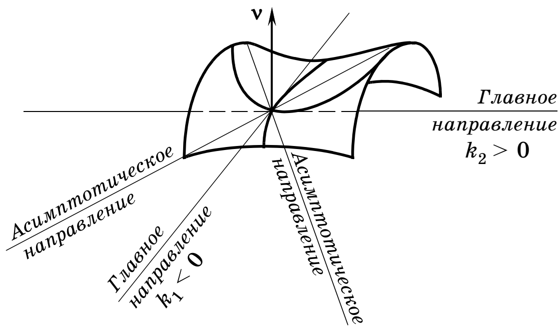


Рис. 96

Из совпадения знаков полной кривизны и дискриминанта $LN - M^2$ следует, что в гиперболических точках поверхности выполняется неравенство

$$LN - M^2 < 0. \tag{50.96}$$

В параболической точке $K = k_1 k_2 = 0$ и одна из главных кривизн отлична от нуля, например $k_1 > 0$. В этом случае главное нормальное сечение с кривизной k_1 загибается в сторону нормали $\mathbf{\nu}$ к поверхности, а другое имеет в этой точке кривизну, равную нулю, например имеет эту точку своей точкой перегиба, т. е. соответствует асимптотическому направлению (рис. 97). В этом случае из формулы Эйлера $k = k_1 \cos^2 \varphi$ следует, что других асимптотических направлений в параболической точке нет.

Из равенства нулю полной кривизны следует, что в параболической точке поверхности (см. (50.93))

$$LN - M^2 = 0. \tag{50.97}$$

Если в точке поверхности $k_1 = k_2$ и, следовательно, кривизны всех нормальных сечений равны между собой, то такая точка поверхности называется *точкой закругления* или *омбилической точкой*; ее частным случаем является точка уплощения,

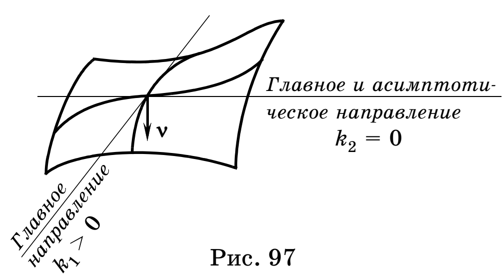


Рис. 97

т. е. точка, в которой $k_1 = k_2 = 0$. В омбилической точке все направления главные. Это означает, что уравнение (50.88) при $k = k_1 = k_2$ должно удовлетворяться при любом t, что возможно лишь в случае, когда все его коэффициенты равны нулю:

$$L - kE = M - kF = N - kG = 0.$$

Отсюда следует, что для точек уплощения, т. е. когда $k \equiv 0$, выполняются равенства $L = M = N = 0$, а для точек закругления, не являющихся точками уплощения, условие

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G};$$

каждое из этих отношений равно кривизне k.

В заключение выясним, как характеризуются различные виды точек на поверхности, если в окрестности этих точек выбрать явные представления поверхности, при которых плоскость независимых переменных x, y параллельна касательной плоскости к поверхности в рассматриваемой точке.

Пусть $z = f(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая в окрестности U точки (x_0, y_0) функция, $z_0 = f(x_0, y_0)$ и в точке (x_0, y_0, z_0) касательная плоскость к графику функции f параллельна плоскости переменных x, y. Тогда

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0. \tag{50.98}$$

Введем, как и выше, следующие обозначения:

$$f_{xx}^0 \overset{\text{def}}{=} f_{xx}(x_0, y_0),\ \ f_{xy}^0 \overset{\text{def}}{=} f_{xy}(x_0, y_0),\ \ f_{yy}^0 \overset{\text{def}}{=} f_{yy}(x_0, y_0).$$

Согласно формулам (50.65), условие (50.95) эллиптичности точки (x_0, y_0, z_0) графика функции f имеет вид

$$LN - M^2 = f_{xx}^0 f_{yy}^0 - f_{xy}^{0^2} > 0. \tag{50.99}$$

Условия (50.98) и (50.99) являются достаточными условиями строгого экстремума функции f в точке (x_0, y_0). Таким образом, если точка (x_0, y_0, z_0) графика функции f является эллиптической, то функция f имеет в точке (x_0, y_0) строгий экстремум и, следовательно, в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) график функции f (поверхность) расположена либо над касательной плоскостью, либо под ней, исключая, конечно, саму точку (x_0, y_0, z_0), которая лежит на касательной плоскости.

Условие (50.96) гиперболичности точки (x_0, y_0, z_0) имеет вид

$$f_{xx}^0 f_{yy}^0 - f_{xy}^{0^2} < 0. \tag{50.100}$$

Выполнение соотношений (50.98) и (50.100) является достаточным условием того, чтобы в точке (x_0, y_0) функция f не име-

ла экстремума. Поэтому в любой окрестности гиперболической точки имеются точки по обе стороны от касательной плоскости.

Таким образом, мы еще раз подтвердили некоторые результаты предыдущего анализа структуры поверхности вблизи эллиптических и гиперболических точек.

Наконец, условие параболичности имеет вид

$$f^0_{xx} f^0_{yy} - f^{0^2}_{xy} = 0$$

и в этом случае ничего сказать об экстремуме функции f в точке (x_0, y_0) нельзя.

Мы убедились, что с помощью первой и второй квадратичных форм можно достаточно детально изучить структуру поверхности в окрестности ее неособой внутренней точки. Оказывается, что первая и вторая квадратичные формы поверхности в известном смысле полностью описывают поверхность подобно тому, как кривизна и кручение пространственной кривой определяют ее с точностью до положения в пространстве. Например, можно доказать, что если две простые поверхности имеют такие представления, параметры которых меняются в одной и той же области, что в точках поверхностей, соответствующих одним и тем же значениям параметров, у поверхностей совпадают их первая и вторая квадратичные формы (т. е. совпадают их коэффициенты), то эти поверхности конгруэнтны (см.: *Погорелов А. В.* Лекции по дифференциальной геометрии. — Харьков: Изд-во ХГУ, 1961).

§ 51

Поверхностные интегралы

В этом и следующих параграфах будут рассматриваться гладкие поверхности, задаваемые параметрическими представлениями (см. определение 16 в § 50) и склеенные из них кусочно-гладкие (см. определение 23 в § 50).

51.1. Определение и свойства поверхностных интегралов

Пусть задана гладкая поверхность S, причем

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = \{x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v);\ (u, v) \in \overline{D}\} \quad (51.1)$$

— ее представление, т. е. непрерывно дифференцируемое отображение без особых точек, D — квадрируемая плоская область и, как обычно, E, G и F — коэффициенты первой

квадратичной формы поверхности S. Пусть, далее, на множестве точек $r(u, v)$ поверхности S задана функция Φ, т. е. функция $\Phi(r(u, v)) = \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Иногда функцию Φ будем обозначать также через $\Phi(x, y, z)$ (ср. с п. 47.1).

Определение 1. *Интеграл* $\iint\limits_S \Phi(x, y, z)dS$ *определяется равенством* (см. формулу (50.48))

$$\iint\limits_S \Phi(x, y, z)dS = \iint\limits_D \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}dudv. \quad (51.2)$$

Этот интеграл называется поверхностным интегралом первого рода.

Таким образом, в поверхностном интеграле $\iint\limits_S \Phi(x, y, z)dS$ под dS понимается элемент площади (50.48).

При определенных ограничениях, налагаемых на функцию Φ, интеграл (51.2) существует. Так, например, он существует для всякой непрерывной на гладкой поверхности S функции Φ, т. е. для непрерывной на замкнутой квадрируемой области $\overline{D}$ функции $\Phi(r(u, v))$. В самом деле, в этом случае, согласно определению 1, интеграл $\iint\limits_S \Phi(x, y, z)dS$ сводится к интегралу $\iint\limits_D (r(u, v))\ \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$ от непрерывной на $\overline{D}$ функции, который, как известно (см. п. 44.4), существует. Более общие условия существования поверхностного интеграла первого рода могут быть получены из соответствующих условий существования кратных интегралов (см. п. 44.4), примененных к интегралу, стоящему в правой части равенства (51.2).

Пусть для простоты функция Φ непрерывна на гладкой поверхности S и пусть

$$\rho = \rho(u_1, v_1) = (\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1), \chi\,(u_1, v_1))$$

— другое представление этой поверхности, которое задано на замыкании $\overline{D}_1$ квадрируемой области D_1 и для которого преобразование (50.14) параметров u, v в u_1, v_1 взаимно-однозначно и непрерывно дифференцируемо на $\overline{D}$ и имеет на $\overline{D}$ не равный нулю якобиан. Если E_1, F_1 и G_1 суть коэффициенты первой квадратичной формы, соответствующие этому представлению, то

$$\iint\limits_D \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}du\,dv =$$

$$= \iint\limits_{D_1} \Phi(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1), \chi(u, v))\sqrt{E_1G_1 - F_1^2}du_1dv_1. \quad (51.3)$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно в интеграле, стоящем в правой части этого равенства, выполнить замену переменных (50.14) и воспользоваться формулой (50.43). Таким образом, поверхностный интеграл первого рода не зависит от выбора представления поверхности. Поверхностные интегралы первого рода встречаются в различных вопросах математики и ее приложений. Например, площадь поверхности (см. п. 50.7) выражается с помощью поверхностного интеграла первого рода: если функция $\Phi(x, y, z)$ тождественно равна единице на поверхности S, то формула (51.2) превращается в формулу для площади μS поверхности S (см. (50.47)):

$$\mu S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \iint_S dS.$$

Если $\Phi(x, y, z)$ — плотность некоторой массы, распределенной по поверхности S, то интеграл (51.2) дает величину массы всей поверхности.

Пусть теперь $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$, как обычно, единичные координатные векторы,

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\boldsymbol{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\boldsymbol{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\boldsymbol{k} \quad (51.4)$$

и

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}, \quad (51.5)$$

причем, согласно предположению о гладкости поверхности, нормаль $\boldsymbol{\nu}$ непрерывно продолжаема на границу области D.

Поверхность S, на которой выбрана единичная нормаль $\boldsymbol{\nu}$, обозначим, как и раньше, через S^+, а ту же поверхность, на которой выбрана нормаль $-\boldsymbol{\nu}$, — через S^- (очевидно, $\boldsymbol{\nu}$ и $-\boldsymbol{\nu}$ суть две ориентации поверхности S). Подчеркнем, что S^+ и S^- определяются самой поверхностью «с точностью до ориентации» и поэтому зависят от выбора представления поверхности.

Через α, β, γ обозначим углы, образованные единичной нормалью $\boldsymbol{\nu}$ с координатными осями Ox, Oy, Oz, т. е.

$$\boldsymbol{\nu} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \quad (51.6)$$

Пусть на поверхности S задана векторная функция

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(r(u, v)) = (P, Q, R),$$

$$P = P(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)),\ \ Q = Q(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)),$$
$$R = R(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)). \quad (51.7)$$

Определение 2. *Поверхностным интегралом* $\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}$ *второго рода по ориентированной поверхности* S^+ *называется интеграл* $\iint\limits_{S} \boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}\, dS$, *т. е.*

$$\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} \overset{\text{def}}{=} \iint\limits_{S} \boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}\, dS. \tag{51.8}$$

Обозначение $\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}$ называется *векторной записью интеграла второго рода.* Его *координатной записью* называется выражение

$$\iint\limits_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = \iint\limits_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy, \tag{51.9}$$

так как, по определению, левая и правая части этого равенства являются разными записями одной и той же величины.

Согласно определению (51.8),

$$\iint\limits_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \underset{(51.9)}{=} \iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} \underset{(51.8)}{=} \iint\limits_{S} \boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}\, dS \underset{\substack{(51.6)\\(51.7)}}{=}$$

$$\underset{\substack{(51.6)\\(51.7)}}{=} \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS. \tag{51.10}$$

В частности, беря поочередно две из функций P, Q и R тождественно равными нулю, будем иметь

$$\iint\limits_{S^+} P dy dz = \iint\limits_{S} P\cos\alpha\, dS, \quad \iint\limits_{S^+} Q dz dx = \iint\limits_{S} Q\cos\beta\, dS,$$
$$\iint\limits_{S^+} R dx dy = \iint\limits_{S} R\cos\gamma\, dS. \tag{51.11}$$

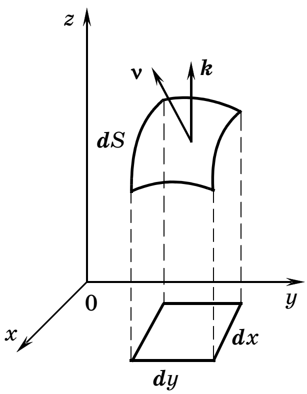


Рис. 98

Интуитивный смысл этих формул состоит в том, что элемент площади (см. (50.48)) данной поверхности, умноженный на косинус угла, который он «составляет» с некоторой координатной плоскостью, «приближенно» равен элементу площади его проекции на рассматриваемую координатную плоскость, как если бы речь шла о площади плоской фигуры и ее проекции. На рис. 98 изображен случай, когда указанное проектирование производится на плоскость переменных x и y. В этом случае $dxdy \approx$

$\approx dS\cos\gamma$, где dS — элемент площади поверхности S, а $dxdy$ — элемент площади проекции этой поверхности на плоскость переменных x, y, а γ — угол между dS и указанной плоскостью, очевидно, равный углу между нормалью ν к поверхности и единичным ортом $\boldsymbol{k}$ оси Oz.

Ориентируемая поверхность имеет две ориентации ν и $-\nu$. Поверхность с ориентацией ν обозначена S^+, поверхность с ориентацией $-\nu$, как обычно, S^-. Имеем

$$\iint\limits_{S^-} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S} \overset{\text{def}}{=} \iint\limits_{S} \boldsymbol{a}(-\nu)dS = -\iint\limits_{S} \boldsymbol{a}\nu dS \underset{(51.8)}{=} -\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S};$$

таким образом, при изменении ориентации поверхности интеграл второго рода меняет только знак.

Если векторная функция $\boldsymbol{a}$ непрерывна на поверхности S, то интеграл $\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}$ существует, так как, в силу сказанного выше о поверхностных интегралах первого рода, существует интеграл, стоящий в правой части равенства (51.8).

51.2. Формула для представления поверхностного интеграла второго рода в виде двойного интеграла

Пусть S — гладкая поверхность, заданная своим векторным представлением $S = \{\boldsymbol{r}(u, v);\ (u, v) \in \overline{D}\}$ и, как обычно, S^+ — поверхность S, ориентированная посредством нормали

$$\nu = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}.$$

Вспомнив, что (см. (50.46) и (50.48)) $dS = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du dv$, получим

$$\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S} = \iint\limits_{S} \boldsymbol{a}\nu dS = \iint\limits_{S} \boldsymbol{a}\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}\, |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du dv =$$
$$= \iint\limits_{G} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) du dv, \tag{51.12}$$

где $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)$ — смешенное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$.

Если $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$, $\boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v)\ z(u, v))$, $\boldsymbol{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$, $\boldsymbol{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$, то формула (51.12) в координатной форме имеет вид

$$\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S} = \iint\limits_{G} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du dv, \tag{51.13}$$

где $P = P(x(u, v), y(u, v)\ z(u, v))$, $Q = Q(x(u, v), y(u, v)\ z(u, v))$, $R = R(x(u, v), y(u, v)\ z(u, v))$.

Формула (51.13) справедлива и для гладких представлений гладких поверхностей в широком смысле этого термина (см. п. 50.5). Для других представлений этих поверхностей она получается заменой переменных в интеграле в правой части равенства (51.13) с помощью гладкого преобразования параметров в гладком представлении поверхности.

В частном случае, когда на замкнутой области $\overline{D}$ всюду $P = Q = 0$, т. е. $a = (0, 0, R)$, имеем

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = R\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

Формула (51.13) в этом случае принимает вид

$$\iint\limits_S R\,dxdy = \iint\limits_D R\,(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,dudv.$$

Если поверхность S имеет явное представление $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$, то

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(здесь $x = u$, $y = v$) и для интеграла по верхней стороне $\widehat{S}$ поверхности S (см. пример в п. 50.10) в случае, когда $P = Q = 0$, на $\widehat{S}$ имеем

$$\iint\limits_{\widehat{S}} R\,dxdy \underset{(51.13)}{=} \iint\limits_D R(x, y, f(x, y))\,dxdy, \qquad (51.14)$$

а для интеграла по нижней стороне $\check{S}$ поверхности S получим

$$\iint\limits_{\check{S}} R\,dxdy = -\iint\limits_D R(x, y, f(x, y))\,dxdy.$$

Вместо $\iint\limits_{\widehat{S}} R\,dxdy$ иногда пишут просто $\iint\limits_S R\,dxdy$, а вместо $\iint\limits_{\check{S}} R\,dxdy$ — соответственно $\iint\limits_S R\,dydx$, т. е. в случае нижней стороны $\check{S}$ поверхности S дифференциалы dx и dy пишут в обратном порядке.

Если функция R непрерывна на поверхности S, то формула (51.14) справедлива и тогда, когда явно заданная поверхность S гладкая в широком смысле (см. п. 50.5), т. е. тогда, когда функция f, будучи непрерывной на замыкании $\overline{D}$ об-

ласти D, непрерывно дифференцируема лишь в самой области D; однако наряду с этим предполагается, что у поверхности S имеется представление

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in \overline{D}_1,$$

непрерывно дифференцируемое вплоть до границы квадрируемой области D_1, на замыкании которой оно задано, и, следовательно, для этого представления справедлива формула (51.13).

Действительно, достаточно, как это отмечалось выше, в интеграле

$$\iint_D R(x, y, f(x,y))dxdy$$

сделать замену переменных $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}_1$.

Это возможно, так как функция $R(x, y, f(x, y))$ непрерывна на замыкании $\overline{D}$ квадрируемой области D, а якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ непрерывен вплоть до границы области D_1 (по предположению частные производные $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ непрерывны вплоть до границы области D_1, т. е. на ее замыкании) и не обращается в нуль в самой области D_1.

Итак, имеем

$$\iint_D R(x, y, f(x, y))dxdy =$$

$$= \iint_{D_1} R(x(u, v), y(u, v), f(x(u, v), y(u, v))) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv.$$

Из доказанного следует, что формула (51.14) справедлива, например, для поверхностных интегралов от непрерывных функций по полусфере, заданной явным представлением $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$ (оно не является непрерывно дифференцируемым вплоть до границы $x^2 + y^2 = 1$ круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$, на котором оно задано).

51.3. Поверхностные интегралы как пределы интегральных сумм

Поверхностные интегралы могут быть получены также и как пределы соответствующих поверхностных интегральных сумм. Пусть S — гладкая поверхность и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, — ее представление, D — квадрируемая область.

Рассмотрим разбиение τ_k замкнутой области $\overline{D}$, состоящее из всевозможных непустых ее пересечений с квадратами ранга k (ср. с п. 50.9). Пусть $\tau_k\,(\partial D) = \{A_j^{(k)}\}_{j=1}^{j=j_k}$ — совокупность можеств, входящих в разбиение τ_k и являющихся квадратами ранга k, т. е. квадратами ранга k, целиком лежащими в замкнутой области $\overline{D}$. Иными словами, $\tau_k\,(\partial D)$ состоит из элементов разбиения τ_k, не пересекающихся с границей ∂D области D.

Пусть

$$A^{(k)} = \bigcup_{j=1}^{j_k} A_j^{(k)},\quad B^{(k)} = \overline{D} \setminus A^{(k)}.$$

Множество $B^{(k)}$ содержится в объединении j_k всех элементов разбиения τ_k, пересекающихся с границей ∂D области D, т. е. с множеством меры нуль. Поэтому (см. лемму 4 в п. 44.3)

$$\lim_{k\to\infty} \mu\, B^{(k)} = 0. \tag{51.15}$$

Сужение отображения $r(u,\ v)$, $(u,\ v) \in \overline{D}$, на замкнутый квадрат $A_j^{(k)}$ является представлением некоторой поверхности, которую обозначим $S_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \ldots, j_k$. Очевидно, все эти поверхности также гладкие.

Пусть функция $\Phi\,(r(u,\ v))$ непрерывна на замкнутой области $\overline{D}$, пусть также $(u_j^{(k)},\ v_j^{(k)}) \in A_j^{(k)}$ и $\Phi_{k,j} = \Phi\,(r(u_j^{(k)},\ v_j^{(k)}))$. Положим

$$\sigma^{(1)}_{\tau_{k(\partial D)}} = \bigcup_{j=1}^{i_k} \Phi_{k,j}\, \mu S_j^{(k)}$$

и назовем ее *поверхностной* (неполной) *интегральной суммой* для интеграла $\iint\limits_S \Phi dS$ и докажем, что

$$\lim_{k\to\infty} \sigma^{(1)}_{\tau_{k(\partial D)}} = \iint\limits_S \Phi\, dS. \tag{51.16}$$

Прежде всего заметим, что

$$\iint\limits_S \Phi dS = \iint\limits_D \Phi \sqrt{EG - F^2}\ du dv =$$

$$= \iint\limits_{A^{(k)}} \Phi \sqrt{EG - F^2}\ du dv + \iint\limits_{B^{(k)}} \Phi \sqrt{EG - F^2}\ du dv,$$

где

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{B^{(k)}} \Phi\ \sqrt{EG - F^2}\ du dv = 0.$$

Это следует из ограниченности подынтегральной функции $\Phi\sqrt{EG - F^2}$ и равенства (51.15). Поэтому

$$\lim_{k \to \infty} \iint\limits_{A^{(k)}} \Phi \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \iint\limits_{S} \Phi\, dS. \qquad (51.17)$$

Обозначим через $\omega(\delta, \Phi)$ модуль непрерывности функции Φ на замкнутой области $\overline{D}$. В силу равномерной непрерывности функции Φ на $\overline{D}$, имеем

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta, \Phi) = 0.$$

Далее,

$$\left|\sigma^{(1)}_{\tau_{k(\partial D)}} - \iint\limits_{A^{(k)}} \Phi \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{j_k} \Phi_{k,j}\, \mu S^{(k)}_j - \iint\limits_{A^{(k)}} \Phi \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{j_k} \Phi_{k,j} \iint\limits_{A^{(k)}_j} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv - \sum_{j=1}^{j_k} \iint\limits_{A^{(k)}_j} \Phi \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{j_k} \iint\limits_{A^{(k)}_j} \left|\Phi_{k,j} - \Phi\right| \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \leqslant$$

$$\leqslant \omega\left(\frac{\sqrt{2}}{10^k}; \Phi\right) \iint\limits_{A^{(k)}} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \leqslant \omega\left(\frac{\sqrt{2}}{10^k}; \Phi\right) \mu S \to 0 \qquad (51.18)$$

при $k \to \infty$. Из (51.17) и (51.18) непосредственно следует равенство (51.16).

Рассмотрим теперь интеграл второго рода

$$\iint\limits_{S} \Phi dx\, dy = \iint\limits_{S} \Phi \cos(\widehat{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}})\, dS.$$

Если обозначить через $\cos_{k,j}(\widehat{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}})$ косинус угла между нормалью $\boldsymbol{\nu}$ к поверхности S и координатным ортом $\boldsymbol{k}$ в точке $(u^{(k)}_j, v^{(k)}_j)$ и положить

$$\sigma^{(2)}_{\tau_k(\partial D)} = \sum_{j=1}^{j_k} \Phi_{k,j} \cos_{k,j}(\widehat{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}})\, \mu\, S^{(k)}_j,$$

то, аналогично равенству (51.16), доказывается формула

$$\lim_{k \to \infty} \sigma^{(2)}_{\tau_k(\partial D)} = \iint\limits_{S} \Phi(x, y, z)\, dx\, dy. \qquad (51.19)$$

Подобные утверждения справедливы и для интегралов второго рода других типов (51.11), следовательно, и для интеграла $\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}$.

УПРАЖНЕНИЕ. Доказать формулу (51.19).

51.4. Поверхностные интегралы по кусочно-гладким поверхностям

Определим поверхностные интегралы по кусочно-гладким поверхностям.

Определение 3. *Пусть* $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=k}$ *— кусочно-гладкая поверхность* (см. определение 23 в п. 50.11) *и* $\Phi(x, y, z)$ *— функция, определенная на множестве точек поверхности* S. *Тогда, по определению,*

$$\iint\limits_S \Phi\, dS = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{S_i} \Phi\, dS_i.$$

Определение 4. *Если кусочно-гладкая поверхность* $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=k}$ *ориентируема и* $S^+ = \{S_i^+\}_{i=1}^{i=k}$ *— одна из соответствующих ей ориентированных поверхностей* (обозначения см. в п. 50.13) *с помощью нормалей* $\boldsymbol{\nu}_i$ *на* S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, *то, по определению,*

$$\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\, dS = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{S_i} \boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}_i \boldsymbol{dS}.$$

Конечно, это определение содержательно только в том случае, когда интегралы, стоящие в правых частях равенств, существуют. Для этого, прежде всего, представления поверхностей S_i должны быть заданы на квадрируемых областях.

Аналогично в рассматриваемом случае определяются и интегралы по поверхности $S^- = \{S_i^-\}_{i=1}^{i=k}$.

Мы остановились только на тех свойствах поверхностных интегралов, которые связаны со спецификой их определения и с поверхностью, по которой производится интегрирование. Естественно, что, поскольку они сводятся к обычным кратным интегралам, на них переносятся и различные их свойства (линейность, интегральная теорема о среднем и т. п.).

51.5. Обобщение понятия поверхностного интеграла второго рода

Подобно тому как в п. 47.5 было обобщено понятие криволинейного интеграла второго рода, может быть обобщено и понятие поверхностного интеграла второго рода на более широкий класс поверхностей, по которым производится интегрирование.

Для функций многих переменных, как и для функций одной переменной, существует понятие интеграла Стилтьеса, с помощью которого можно обобщить понятие поверхностного

интеграла второго рода. Но чтобы не вводить новых понятий, проделаем непосредственно нужное нам для дальнейшего обобщение.

Пусть S — элементарная поверхность, т. е. непрерывное отображение $r(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, замкнутой плоской области в пространство, $r(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$ (см. п. 50.2), D — квадрируемая область, функция Φ задана на множестве точек поверхности S и отображение

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ (u, v) \in D, \tag{51.20}$$

является гомеоморфизмом и отображает множества меры нуль также в множества меры нуль.

Если $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ — разбиение замкнутой области $\overline{D}$ (см. п. 44.3), то образы D^* и X_i^* соответственно множеств D и X_i, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$, при отображении (52.20) также измеримы и система множеств $\tau^* = \{X_i^*\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ является разбиением множества $\overline{D^*}$.

Пусть $(u_i, v_i) \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$. Положим

$$\sigma_{\tau^*} = \sigma_{\tau^*}(\Phi; \varphi; \psi; (u_1, v_1), \ldots, (u_{i_\tau}, v_{i_\tau})) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{i_\tau} \Phi(r(u_i, v_i))\, \mu X_i^*. \tag{51.21}$$

К числу элементарных поверхностей, удовлетворяющих указанным выше условиям, относятся полусфера $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$, цилиндрическая поверхность $z = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, и т. п.

Определение 2′. *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma_{\tau^*}$ *сумм* (51.21), *то он называется поверхностным интегралом второго рода от функции* Φ *по элементарной поверхности* S *и обозначается* $\iint\limits_S \Phi((x, y, z)dxdy$.

Таким образом,

$$\iint\limits_S \Phi((x, y, z)dxdy \overset{\text{def}}{=} \lim_{|\tau| \to 0} \sigma_{\tau^*}. \tag{51.22}$$

В этом определении не предполагается какой-либо гладкости элементарной поверхности S, поэтому в целом к такому классу поверхностей неприменимо ранее сформулированное определение 2 поверхностных интегралов второго рода. Правомерность же использования в определении (51.22) термина «поверхностный интеграл второго рода» оправдывается

тем, что если элементарная поверхность S — гладкая, отображение (51.20) — регулярное (см. определение 7 в п. 50.3), а функция Φ — непрерывна на S, то на поверхности S можно так выбрать ориентацию, что определения 2 и 2′ будут эквивалентны. Это доказывается аналогично доказательству равенства (51.16) в п. 51.3. Действительно, используем обозначения, введенные в п. 51.3. Пусть $\tau_k = \{X_i^{(k)}\}_{j=1}^{j=i_{\tau_k}}$, $X^{*(k)}_j$ — образ множества $X_i^{(k)}$ при отображении (51.20), $j = 1, 2, \ldots, j_{\tau_k}$, $\tau_k^* = \{X^{*(k)}_j\}_{j=1}^{j=j_{\tau_k}}$. В силу равномерной непрерывности отображения (51.20), имеем $\lim\limits_{k\to\infty} |\tau_k^*| = 0$.

Обозначим через $A_j^{*(k)}$ образ множества $A_j^{(k)} = X_j^{(k)} \in \tau_k(\partial D)$, $j = 1, 2, \ldots, j_k$ (см. п. 51.3) при отображении (51.20) и снова рассмотрим соответствующую неполную интегральную сумму

$$\sigma_{\tau_k^*(\partial D^*)} = \sum_{j=1}^{j_k} \Phi_{k,j}\, \mu A_j^{*(k)} = \sum_{j=1}^{j_k} \Phi_{k,j} \iint\limits_{A_j^{(k)}} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \qquad (51.23)$$

(мы воспользовались теоремой 2 п. 46.3 о замене переменных в двойных интегралах). Нетрудно убедиться, что в предположении существования предела (51.22) справедливы равенства

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{\tau_k^*(\partial D^*)} = \lim_{|\tau|\to 0} \sigma_{\tau^*} \underset{(51.22)}{=} \iint\limits_D \Phi\, dx\,dy. \qquad (51.24)$$

С другой стороны, если поверхность S — гладкая и $A^{(k)} = \bigcup\limits_{j=1}^{j_k} A_j^{(k)}$, то (см. п. 51.3)

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{A^{(k)}} \Phi \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du\,dv = \iint\limits_D \Phi \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du\,dv = \iint\limits_S \Phi \cos \widehat{(\boldsymbol{\nu k})}\, dS, \qquad (51.25)$$

где поверхностный интеграл в правой части равенства понимается в смысле определения 2 п. 51.1.

Далее, выбрав ориентацию плоскости переменных u, v так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} > 0$, легко показать, что разность

$$\left|\sigma_{\tau_k^*(\partial D^*)} - \iint\limits_{A^{(k)}} \Phi \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du\,dv\right| \underset{(51.23)}{\leqslant} \sum_{j=1}^{j_k} \iint\limits_{A_j^{(k)}} \left|\Phi_{k,j} - \Phi\right| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du\,dv$$

стремится к нулю при $k \to \infty$ и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{\tau_k^*(\partial D^*)} = \lim_{k\to\infty} \iint\limits_{A^{(k)}} \Phi \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, du\,dv \underset{(51.25)}{=} \iint \Phi\cos \widehat{(\boldsymbol{\nu k})}\, dS.$$

Отсюда, в силу равенства (51.24), следует, что в случае гладких поверхностей S новое определение 2′ равносильно определению 2 в п. 51.1.

Рассмотрим примеры, на которых хорошо видны преимущества расширенного понятия поверхностного интеграла второго рода.

Пусть элементарная поверхность S имеет явное представление $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$, D — измеримая по Жордану область и функция Φ (непрерывна на S, т. е. непрерывна функция $\Phi(x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in \overline{D}$. В этом случае отображение (51.20) является тождественным, и поэтому применимо определение (51.22). Сумма σ_{τ^*} имеет здесь вид

$$\sigma_{\tau^*} = \sum_{i=1}^{i_\tau} \Phi(x_i, y_i, f(x_i, y_i))\mu X_i, \ (x_i, y_i) \in X_i,$$

т. е. является обычной интегральной суммой Римана σ_τ функции, непрерывной на замкнутой квадрируемой области $\overline{D}$. Поэтому

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sigma_{\tau^*} = \iint_D \Phi(x, y, f(x, y))dx\,dy. \tag{51.26}$$

Следовательно, в этом случае поверхностный интеграл второго рода (51.22) равен интегралу Римана, стоящему в правой части равенства (51.26):

$$\iint_S \Phi(x, y, z)dxdy = \iint_D \Phi(x, y, f(x, y))dxdy. \tag{51.27}$$

По аналогии со случаем гладких поверхностей интеграл (51.27) будем называть «интегралом по верхней стороне поверхности» и обозначать $\iint_{\hat{S}} \Phi(x, y, z)dxdy$, а тот же интеграл со знаком минус, т. е. $-\iint_D \Phi(x, y, f(x, y))dxdy$, будем называть «интегралом по нижней стороне поверхности» и обозначать $\iint_{\check{S}} \Phi(x, y, z)dxdy$ или $\iint_S \Phi(x, y, z)dydx$. Следовательно,

$$\iint_S \Phi(x, y, z)dx\,dy = \iint_{\hat{S}} \Phi(x, y, z)dx\,dy =$$

$$= \iint_D \Phi(x, y, f(x, y))dx\,dy, \tag{51.28}$$

$$\iint_S \Phi(x, y, z)dy\,dx = \iint_{\check{S}} \Phi(x, y, z)dx\,dy = -\iint_D \Phi(x, y, f(x, y))dx\,dy.$$

Таким образом, для поверхностного интеграла (51.22) получены те же самые формулы (51.26), что и для поверхностного интеграла в смысле определения 2 (см. (51.14) и (51.15)). Однако на этот раз эти формулы доказаны без предположения о какой-либо гладкости элементарной поверхности, кроме ее не-

прерывности, тогда как раньше, в силу самого определения 2, предполагалось, что рассматривается поверхность непрерывно дифференцируемая.

Опишем еще один случай поверхностного интеграла (51.22), который встретится в дальнейшем. Пусть представление $r(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, поверхности S таково, что образ множества $\overline{D}$ при отображении (51.20) имеет меру Жордана, равную нулю, а Φ — произвольная функция, заданная на поверхности S. Тогда

$$\iint_S \Phi(x, y, z)dxdy = 0. \tag{51.29}$$

В самом деле, в этом случае для любого разбиения $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ замкнутой области $\overline{D}$ мера всех множеств X_i^* на плоскости переменных x, y равна нулю. Поэтому все суммы σ_{τ^*} равны нулю, а следовательно, их предел при $|\tau| \to 0$, т. е. интеграл (51.22) также равен нулю. В этом случае бывает удобно для единообразия терминологии говорить об интеграле по той или иной стороне поверхности, в зависимости от задачи она может называться верхней, нижней, внутренней или внешней. Будем по определению считать, что в рассматриваемом случае все термины «поверхностный интеграл по той или иной стороне поверхности S» равносильны, и писать

$$\iint_S \Phi(x, y, z)dxdy = \iint_S \Phi(x, y, z)dydx = 0. \tag{51.30}$$

В частности, если S является ориентируемой кусочно-гладкой цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz, то отмеченная выше эквивалентность определений 2 и 2′ поверхностных интегралов легко проверяется непосредственно. Действительно, образ на плоскости xOy замкнутой области $\overline{D}$ при отображении (51.20) совпадает с проекцией на эту плоскость самой поверхности S. Поэтому поверхность в данном случае является частью цилиндра, основанием которого является указанная проекция меры нуль, а образующая — параллельна оси Oz. Таким образом, если $\nu = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — какая-либо ориентация поверхности S, то нормаль $\boldsymbol{\nu}$ ортогональна оси Oz, поэтому $\cos\gamma = 0$, откуда явствует, что интеграл $\iint_S \Phi(x, y, z)\cos\gamma dS = 0$, и тем самым в этом случае справедлива формула

$$\iint_S \Phi(x, y, z)dxdy = \iint_S \Phi(x, y, z)\cos\gamma dS,$$

так как обе части этого равенства равны нулю.

Так же как и в частных случаях (51.26) и (51.29), можно и для общего понятия интеграла второго рода (51.22) ввести по-

нятие интеграла по той или иной стороне поверхности. Именно, по аналогии со случаем гладких поверхностей, интегралы

$$\iint_S \Phi(x, y, z)dxdy \text{ и } -\iint_S \Phi(x, y, z)dxdy$$

называются *интегралами по разным сторонам поверхности* S.

При этом следует обратить внимание на то, что термин «та или иная сторона поверхности» как самостоятельный термин не определяется, а определяется только в целом термин «поверхностный интеграл второго рода по той или иной стороне поверхности».

Аналогично тому, как выше было введено обобщение понятия поверхностного интеграла второго рода (51.22) вида $\iint_S \Phi(x, y, z)dxdy$, вводятся и обобщения понятий поверхностных интегралов второго рода вида $\iint_S \Phi(x, y, z)dydz$ и $\iint_S \Phi(x, y, z)dzdx$, следовательно, и вида $\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$ по заданной стороне поверхности.

§ 52

Скалярные и векторные поля

52.1. Определения

Вместо терминов «числовая функция точки», «векторная функция точки» употребляются и равнозначные им: «скалярное поле», «векторное поле». Эта терминология подчеркивает, что значения рассматриваемых функций зависят именно от точек пространства (в которых эти функции определены), а не от их координат, при выборе той или иной системы координат.

Используя эту терминологию, можно сказать, например, что всякое скалярное поле $u = u(M)$, определенное и дифференцируемое в некоторой области G, порождает векторное поле его градиентов (см. п. 37.6 и п. 50.5): $\boldsymbol{a}(M) = \operatorname{grad} u(M)$.

Определение 1. *Пусть в области* G* *задано векторное поле* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ *и существует определенная в* G *функция* $u = u(M)$ *такая, что* $\boldsymbol{a}(M) = \operatorname{grad} u(M)$. *Тогда функция* $u(M)$ *называет-*

* В этом параграфе для простоты рассматриваются только плоские или трехмерные области G.

*ся потенциальной функцией или потенциалом данного векторного поля**.

Вводя символический вектор набла, $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$ (см. п. 37.7), можно написать grad $u = \nabla u$, где в правой части равенства стоит «произведение» символического вектора набла на числовую функцию u.

Пусть, например, $\boldsymbol{E}(M)$ — напряженность электрического поля, созданного единичным отрицательным зарядом, который помещен в начале координат. Тогда в точке $M(x, y, z)$ вектор $\boldsymbol{E}(M)$ имеет, как это известно из физики, длину $\frac{1}{r^2}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, и направлен от точки M к началу координат. Отсюда получаем, что

$$\boldsymbol{E}(M) = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right).$$

Электрический потенциал рассматриваемого поля, т. е. функция $u(M) = \frac{1}{r}$, является и потенциалом в указанном выше смысле, поскольку grad $u(M) = \boldsymbol{E}(M)$.

Рассмотрим снова векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$, определенное в некоторой области G. Зафиксируем систему координат, в этом случае векторную функцию $\boldsymbol{a}(M)$ можно рассматривать как функцию трех переменных — координат x, y, z точки M: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x, y, z)$.

Пусть точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in G$ и задан единичный вектор $\boldsymbol{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Проведем через точку M_0 прямую в направлении $\boldsymbol{e}$:

$$x = x_0 + t\cos\alpha,\quad y = y_0 + t\cos\beta,\quad z = z_0 + t\cos\gamma,$$
$$-\infty < t < +\infty.$$

Определение 2. *Производная векторной функции*

$$\boldsymbol{a} = (x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$$

по t при $t = 0$ (если она существует) называется производной векторной функции $\boldsymbol{a}(M)$ по направлению $\boldsymbol{e}$ в точке M_0 и обозначается через $\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{e}}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}(M_0)}{\partial \boldsymbol{e}} = \left.\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right|_{t=0}.$$

* Иногда в приложениях потенциал u определяется формулой $\boldsymbol{a} = -\text{grad}\, u$.

По правилу дифференцирования сложной функции, опуская для простоты обозначения аргумента, получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{e}} = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (52.1)$$

Полагая $\boldsymbol{e}\nabla = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}$ («скалярное произведение» вектора $\boldsymbol{e}$ и символического вектора ∇), перепишем формулу (52.1) в виде $\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{e}} = (\boldsymbol{e}\nabla)\boldsymbol{a}$.

Определение 3. *Если $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ — произвольный (не обязательно единичный) фиксированный вектор, то вектор*

$$(\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a} = b_x\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} + b_y\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y} + b_z\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}$$

называется градиентом вектора $\boldsymbol{a}$ по вектору $\boldsymbol{b}$.

Если $\boldsymbol{b} = b\boldsymbol{b}_0$, где $|\boldsymbol{b}_0| = 1$, то «формальными преобразованиями» получим

$$(\boldsymbol{b}\nabla)\,\boldsymbol{a} = (b\boldsymbol{b}_0\,\nabla)\boldsymbol{a} = b(\boldsymbol{b}_0\nabla)\boldsymbol{a} = b\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{b}_0}.$$

Переходя к координатной записи, легко непосредственно убедиться в справедливости полученной формулы и показать, что с символом ∇ можно обращаться при вычислениях, как с настоящим вектором, не забывая, конечно, при этом, что, кроме этого, ∇ означает также и определенную операцию дифференцирования. Мы не будем останавливаться на обосновании законности таких «формальных преобразований с символом ∇». Любая формула, полученная подобным образом, может быть, конечно, получена и без применения символа ∇ обычными обоснованными рассуждениями в координатах. Следует иметь в виду, однако, что применение символа ∇ часто весьма существенно сокращает выкладки.

Вернемся снова к исходному векторному полю $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ в области G.

Определение 4. *Пусть поле $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ дифференцируемо в некоторой точке. Число $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ называется дивергенцией поля в этой точке и обозначается через* $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$, *т. е.*

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \qquad (52.2)$$

Символически $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ может быть записана как скалярное произведение символического вектора ∇ и вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \nabla\boldsymbol{a}.$$

Геометрический и физический смысл $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ будет выяснен в дальнейшем.

Определение 5. *Вектор с координатами*

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \tag{52.3}$$

называется вихрем, или ротором, векторного поля $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ *и обозначается* $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

С помощью символического вектора ∇ ротор можно записать в виде следующего векторного произведения:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \tag{52.4}$$

Термин «ротор» происходит от слова «ротация» (вращение). Это объясняется следующими обстоятельствами. Рассмотрим движение твердого тела. Зафиксируем в нем точку и обозначим ее M_0. Из механики известно, что скорость $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(M)$ любой точки M этого тела выражается по формуле

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{v}_0$ — скорость точки M_0, $\boldsymbol{\omega}$ — мгновенная угловая скорость вращения всего твердого тела относительно точки M_0, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор с началом в точке M_0 и концом в точке M. Векторы $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$ не зависят от точки тела M (при фиксированной точке M_0), а радиус является, очевидно, функцией точки тела: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$.

Зафиксируем в пространстве систему координат x, y, z, и пусть $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$; тогда

$$v_x = v_{0x} + \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = v_{0y} + \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = v_{0z} + \omega_x y - \omega_y x.$$

Отсюда

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\omega_z, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \omega_y, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \omega_z, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\omega_x, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = -\omega_y, \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} = \omega_x.$$

Выясним теперь, как меняется в рассматриваемом твердом теле ротор скоростей его точек. Для этого воспользуемся формулами (52.3):

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 2\omega_x, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 2\omega_y, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega_z.$$

Таким образом, rot $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}$. Иначе говоря, с точностью до числового множителя ротор скоростей $\boldsymbol{v}$ точек тела совпадает с мгновенной угловой скоростью вращения твердого тела. Отсюда и происходит название «ротор».

Приведем пример формальных преобразований с символом ∇. Если за символом ∇ следует несколько членов, на один из которых он действует как оператор дифференцирования, а на другие нет, то для ясности будем обозначать этот член вертикальной стрелкой. Поясним это на примере.

Пусть f — скалярное, $\boldsymbol{a}$ — векторное поле; тогда

$$\operatorname{rot} f\boldsymbol{a} = \nabla \times f\boldsymbol{a} = \nabla \times f\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}} + \nabla \times \overset{\downarrow}{f}\boldsymbol{a} = f(\nabla \times \boldsymbol{a}) + (\nabla f \times \boldsymbol{a}) =$$
$$= f \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + \operatorname{grad} f \times \boldsymbol{a}.$$

Введем некоторые определения, связанные с векторным полем $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ в области G.

Определение 6. *Пусть* Γ — *замкнутая кусочно-гладкая кривая в области* G. *Интеграл*

$$\int_\Gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \int_\Gamma a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

называется циркуляцией векторного поля $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ *по кривой* Γ. *Здесь* $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$.

Если Γ — ориентированная гладкая кривая, s — переменная длина дуги, $\boldsymbol{t} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — ее единичный касательный вектор, а $\text{пр}_t\, \boldsymbol{a}$ — величина проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на касательную, то

$$\int_\Gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \int_\Gamma \text{пр}_t\, \boldsymbol{a}\,ds.$$

Действительно,

$$\int_\Gamma \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r} = \int_\Gamma a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_\Gamma (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)ds =$$
$$= \int_\Gamma \boldsymbol{a}\boldsymbol{t}ds = \int_\Gamma \text{пр}_t\, \boldsymbol{a}ds.$$

Определение 7. *Поле, циркуляция которого по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой, лежащей в области* G, *равна нулю, называется потенциальным.*

Напомним, что в п. 47.8 было показано (см. лемму 2), что условие равенства нулю интеграла $\int_\Gamma Pdx + Qdy$ по любому замкнутому контуру $\Gamma \subset G$ равносильно тому, что интеграл $\int_{\widehat{AB}} dx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования между точка-

ми A и B. При доказательстве этого утверждения нигде не использовался тот факт, что кривая Γ лежит в плоской области. Поэтому доказательство леммы 2, приведенное в п. 47.8, сохраняет силу и для криволинейных интегралов по пространственным кривым. Таким образом,

циркуляция $\int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \int\limits_{\Gamma} a_x dx + a_y dy + a_z dz$ *равна нулю по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру* $\Gamma \subset G$ *тогда и только тогда, когда интеграл* $\int\limits_{\widehat{AB}} a_x dx + a_y dy + a_z dz$ *не зависит от пути интегрирования, т. е. от кривой с началом в точке* A*, концом в точке* B *и целиком лежащей в области* G*.*

Рассмотрим в качестве примера плоское векторное поле, т. е. поле $\boldsymbol{a} = (P, Q)$, заданное на плоской области $G : P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$. Вихрь этого поля имеет вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Теорема 4 п. 47.11 во вновь введенных терминах может быть перефразирована следующим образом. *Для односвязной плоской области* G *потенциальность поля, существование потенциальной функции и условие, что вихрь поля во всех точках равен нулю, эквивалентны.*

Определение 8. *Пусть* S *— некоторая кусочно-гладкая ориентированная поверхность, лежащая в области* G*,* $\boldsymbol{\nu}$ *— единичный вектор нормали к поверхности, задающей ее ориентацию, и* S^+ *— поверхность* S *с указанной ориентацией. Интеграл* $\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S} = \iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}\,dS$ *называется потоком векторного поля через поверхность.*

Очевидно, что $\boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu} = \text{пр}_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{a}$, поэтому

$$\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S} = \iint\limits_{S} \text{пр}_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{a}\,dS.$$

В дальнейших пунктах этого параграфа будут рассмотрены некоторые свойства векторных полей, в частности, установлены в трехмерном случае необходимые и достаточные условия потенциальности поля. Предварительно докажем теоремы о кратных и поверхностных интегралах, тесно связанные с понятия-

ми, введенными в этом пункте. Начнем с доказательства инвариантности этих понятий.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Доказать следующие формулы:

а) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0$;
б) $\operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$;
в) $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u$, где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;
г) $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a}$, где $\Delta\boldsymbol{a} = (\Delta a_x, \Delta a_y, \Delta a_z)$, $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$;
д) $\operatorname{div}(f\boldsymbol{a}) = f\operatorname{div}\boldsymbol{a} + \operatorname{grad} f\boldsymbol{a}$;
е) $\operatorname{div} \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$.

52.2. Об инвариантности понятий градиента, дивергенции и вихря

Прежде всего заметим, что при ортогональном преобразовании декартовых координат символический вектор ∇ преобразуется по правилам преобразования обычных векторов. Действительно, пусть задано ортогональное преобразование координат

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned} \tag{52.5}$$

Для таких преобразований матрица обратного преобразования совпадает с транспонированной матрицей, поэтому

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z', \\ y &= a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z', \\ z &= a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z'. \end{aligned} \tag{52.6}$$

При этом, как хорошо известно, по формулам (52.5) и (52.6) преобразуются как координаты точек, так и координаты векторов.

Используя формулы (52.5) и правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} = a_{11}\frac{\partial}{\partial x'} + a_{21}\frac{\partial}{\partial y'} + a_{31}\frac{\partial}{\partial z'}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} = a_{12}\frac{\partial}{\partial x'} + a_{22}\frac{\partial}{\partial y'} + a_{32}\frac{\partial}{\partial z'}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} = a_{13}\frac{\partial}{\partial x'} + a_{23}\frac{\partial}{\partial y'} + a_{33}\frac{\partial}{\partial z'}. \end{aligned} \tag{52.7}$$

Обратные формулы, выражающие производные по переменным x', y', z' через производные по x, y, z, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= a_{11}\frac{\partial}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial}{\partial y} + a_{13}\frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= a_{21}\frac{\partial}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial}{\partial y} + a_{23}\frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= a_{31}\frac{\partial}{\partial x} + a_{32}\frac{\partial}{\partial y} + a_{33}\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \tag{52.8}$$

Формулы (52.5)—(52.8) показывают, что координаты обычных векторов и «координаты» символического вектора ∇ при ортогональных преобразованиях декартовых координат преобразуются по одному и тому же правилу. В частности, из (52.8) следует, что градиент функции u в системе координат x, y, z, т. е. вектор с координатами $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, в системе x', y', z' будет иметь координаты $\frac{\partial u}{\partial x'}$, $\frac{\partial u}{\partial y'}$, $\frac{\partial u}{\partial z'}$, т. е. являться градиентом и в этой системе координат. Тем самым еще раз доказано (см. п. 20.7), что градиент функции не зависит от выбора декартовой системы координат. Так как вектор ∇ преобразуется подобно обычным векторам, то естественно ожидать, что и скалярное произведение $\nabla\boldsymbol{a}$ не зависит от выбора указанной системы координат.

Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ в системе x, y, z имеет координаты a_x, a_y, a_z, а в системе x', y', z' — координаты $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$. В силу формул (52.7) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} &= a_{11}\frac{\partial a_x}{\partial x'} + a_{21}\frac{\partial a_x}{\partial y'} + a_{31}\frac{\partial a_x}{\partial z'} + \\ &+ a_{12}\frac{\partial a_y}{\partial x'} + a_{22}\frac{\partial a_y}{\partial y'} + a_{32}\frac{\partial a_y}{\partial z'} + a_{13}\frac{\partial a_z}{\partial x'} + a_{23}\frac{\partial a_z}{\partial y'} + a_{33}\frac{\partial a_z}{\partial z'} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x'}(a_{11}a_x + a_{21}a_y + a_{31}a_z) + \frac{\partial}{\partial y'}(a_{21}a_x + a_{22}a_y + a_{23}a_z) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z'}(a_{31}a_x + a_{32}a_y + a_{33}a_z). \end{aligned} \tag{52.9}$$

Применяя формулы (52.5) к вектору $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ (т. е. заменяя в этих формулах x, y, z на a_x, a_y, a_z, а x', y', z' на a'_x, a'_y, a'_z), получим, что выражения в круглых скобках в правой части равенства (52.9) равны последовательно $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$ и, следовательно,

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}.$$

Это равенство и показывает, что дивергенция векторного поля в каждой точке однозначно определяется самим вектор-

ным полем, а не зависит от выбора системы координат, как это могло бы показаться сначала из формулы (52.2).

Векторное произведение обычных векторов в силу своего геометрического смысла не зависит от выбора декартовых систем координат с одинаковой ориентацией (например, векторное произведение двух векторов не изменится, если от одной правой декартовой системы координат (см. п. 50.8) перейти к такой же другой). Поэтому естественно ожидать, что тем же свойством обладает и «символическое векторное произведение» $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a}$.

В самом деле, если обозначить единичные координатные векторы системы координат x', y', z' соответственно через $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$, то, как известно, единичные координатные векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ системы координат x, y, z выражаются через $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ посредством матрицы, транспонированной к матрице преобразования (52.5), т. е. посредством матрицы преобразования (52.6):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} &= a_{11}\boldsymbol{i}' + a_{21}\boldsymbol{j}' + a_{31}\boldsymbol{k}', \\ \boldsymbol{j} &= a_{12}\boldsymbol{i}' + a_{22}\boldsymbol{j}' + a_{32}\boldsymbol{k}', \\ \boldsymbol{k} &= a_{13}\boldsymbol{i}' + a_{23}\boldsymbol{j}' + a_{33}\boldsymbol{k}'. \end{aligned} \tag{52.10}$$

Используя формулы (52.6), (52.7) и (52.10), получим

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}\boldsymbol{i}'+a_{21}\boldsymbol{j}'+a_{31}\boldsymbol{k}' & a_{12}\boldsymbol{i}'+a_{22}\boldsymbol{j}'+a_{32}\boldsymbol{k}' & a_{13}\boldsymbol{i}'+a_{23}\boldsymbol{j}'+a_{33}\boldsymbol{k}' \\ a_{11}\dfrac{\partial}{\partial x'}+a_{21}\dfrac{\partial}{\partial y'}+a_{31}\dfrac{\partial}{\partial z'} & a_{12}\dfrac{\partial}{\partial x'}+a_{22}\dfrac{\partial}{\partial y'}+a_{32}\dfrac{\partial}{\partial z'} & a_{13}\dfrac{\partial}{\partial x'}+a_{23}\dfrac{\partial}{\partial y'}+a_{33}\dfrac{\partial}{\partial z'} \\ a_{11}a_{x'}+a_{21}a_{y'}+a_{31}a_{z'} & a_{12}a_{x'}+a_{22}a_{y'}+a_{32}a_{z'} & a_{13}a_{x'}+a_{23}a_{y'}+a_{33}a_{z'} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}' \\ \dfrac{\partial}{\partial x'} & \dfrac{\partial}{\partial y'} & \dfrac{\partial}{\partial z'} \\ a_{x'} & a_{y'} & a_{z'} \end{vmatrix}. \tag{52.11}$$

Последнее равенство доказывается так же, как для обычных числовых матриц доказывается тот факт, что определитель произведения двух квадратных матриц одного и того же порядка равен произведению их определителей. Для доказательства этого равенства достаточно убедиться, что в обеих его частях стоят одинаковые алгебраические суммы одних и тех же слагаемых.

Определитель ортогонального преобразования равен +1 или −1, причем если это преобразование сохраняет ориентацию, то +1. Поэтому если в рассматриваемом случае выбрать системы координат x, y, z и x', y', z', ориентированные одинаково, то будем иметь

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$$

и, следовательно, из (52.11) получим

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}' \\ \dfrac{\partial}{\partial x'} & \dfrac{\partial}{\partial y'} & \dfrac{\partial}{\partial z'} \\ a_{x'} & a_{y'} & a_{z'} \end{vmatrix}.$$

Это равенство и означает, что вихрь векторного поля не зависит от выбора декартовой системы координат, имеющей ту же ориентацию, что и заданная. Заметим, однако, что если от одной системы координат перейти к системе с другой ориентацией, например от правой системы координат — к левой, то каждый вихрь (как и обычное векторное произведение) заменится противоположным вектором. Это следует из формулы (52.11), поскольку определитель ортогонального преобразования, меняющего ориентацию, равен −1.

Таким образом, вихрь векторного поля однозначно «с точностью до знака» определяется самим векторным полем, а если ограничиться только одинаково ориентированными декартовыми системами координат, то не зависит от их выбора.

52.3. Формула Гаусса — Остроградского. Геометрическое определение дивергенции

Пусть G — область в пространстве $\boldsymbol{R}^3_{xyz}$. Предположим, что на плоскости $\boldsymbol{R}^2_{xy}$ существует такая квадрируемая область D, что граница ∂G области G состоит из двух поверхностей S_1 и S_2, задаваемых явными представлениями, соответственно $z = \varphi(x, y)$ и $z = \psi(x, y)$, где функции φ и ψ непрерывны на замкнутой области $\overline{D}$, $\varphi(x, y) < \psi(x, y)$, $(x, y) \in D$, и, быть может, из поверхности S_0, являющейся частью цилиндра, основанием которого является граница ∂D области D, а образующая параллельна оси Oz (см. п. 44.1),

$$\partial G = S_1 \cup S_2 \cup S_0. \tag{52.12}$$

В этом случае область G называется *элементарной относительно оси Oz*. Она имеет вид

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ \varphi(x, y) < z < \psi(x, y)\}. \quad (52.13)$$

Области такого типа уже встречались при изучении вопроса о сведении кратного интеграла к повторному. Обозначим для краткости границу ∂G области G через S: тогда (см. (52.12))

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_0. \quad (52.14)$$

Пусть на S задана функция $\Phi = \Phi\,(x, y, z)$. Поверхностные интегралы второго рада $\iint\limits_{\hat{S}_1} \Phi(x, y, z)\, dxdy$ от функции Φ по верхней стороне поверхности S_1, $\iint\limits_{\check{S}_2} \Phi(x, y, z)\, dxdy$ по нижней стороне поверхности S_2 и $\iint\limits_{S_0} \Phi(x, y, z)\, dxdy$ по поверхности S_0 (см. п. 51.4) называются «поверхностными интегралами второго рода по внешним сторонам этих поверхностей», а их сумма — «интегралом *по внешней стороне поверхности S*» и обозначается $\iint\limits_{S^+} \Phi(x, y, z)\, dxdy$, т. е.

$$\iint\limits_{S^+} \Phi(x, y, z)\, dxdy = \iint\limits_{\hat{S}_1} \Phi(x, y, z)\, dxdy + \iint\limits_{\check{S}_2} \Phi(x, y, z)\, dxdy + \\ + \iint\limits_{S_0} \Phi(x, y, z)\, dxdy. \quad (52.15)$$

Аналогично определяется «поверхностный интеграл $\iint\limits_{S^-} \Phi(x, y, z) dxdy$ *по внутренней стороне поверхности S*»:

$$\iint\limits_{S^-} \Phi(x, y, z) dxdy = \iint\limits_{\check{S}_1} \Phi(x, y, z) dxdy + \iint\limits_{\hat{S}_2} \Phi(x, y, z) dxdy + \\ + \iint\limits_{S_0} \Phi(x, y, z) dxdy. \quad (52.16)$$

Напомним (см. п. 51.5), что $\iint\limits_{S_0} \Phi(x, y, z) dxdy = 0$ и, следовательно, это слагаемое можно было бы и не писать. Его пишут для того, чтобы формулы (52.15) формально соответствовали формуле (52.14). Как следует из дальнейшего, это оказывается очень удобным.

Если поверхности S_1, S_2 и S_0 кусочно-гладкие, то интеграл $\iint\limits_{S^+} \Phi(x, y, z) dxdy$ представляет собой поверхностный ин-

теграл по поверхности S, ориентированной с помощью внешней единичной нормали $\boldsymbol{\nu}$. В этом случае если

$$\boldsymbol{\nu} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \qquad (52.17)$$

то

$$\iint_{S^+} \Phi(x, y, z)dxdy = \iint_{S} \Phi(x, y, z)\cos\gamma dS. \qquad (52.18)$$

Здесь термин «кусочно-гладкая поверхность» понимается в широком смысле (см. п. 50.11). Например, поверхность S (см. (52.14)) является кусочно-гладкой, если у замкнутой области $\overline{D}$ существует такое ее разбиение $\tau = \{\overline{D}_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$, где D_i — области, границы которых состоят из кусочно-гладких кривых, что функции φ и ψ непрерывны на замыканиях $\overline{D}_i$ областей D_i, непрерывно дифференцируемы в самих D_i и у поверхностей, задаваемых представлениями $\varphi(x, y)$, $(x, y)\in D_i$ и $\psi(x, y)$, $(x, y)\in D_i$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$, существуют представления, непрерывно дифференцируемые вплоть до границ областей, на которых они заданы. Отсюда следует, что поверхности S_1 и S_2 кусочно-гладкие в широком смысле. Кусочная гладкость поверхности S_0 следует из того, что граница области D состоит из частей границ областей D_i, т. е. является объединением конечного множества кусочно-гладких кривых. Поэтому цилиндр, основанием которого является граница области D, а образующая параллельна оси Oz, так же как и всякая поверхность, являющаяся его частью, представляет собой кусочно-гладкую поверхность.

Аналогично областям, элементарным относительно оси Oz, определяются области, *элементарные относительно осей* Ox, Oy, и интегралы

$$\iint_{S^+} \Phi dydz, \quad \iint_{S^-} \Phi dydz, \quad \iint_{S^+} \Phi dzdx, \quad \iint_{S^-} \Phi dzdx,$$

а следовательно, для областей, одновременно элементарных относительно всех координатных осей, и интегралы

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy, \iint_{S^-} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \qquad (52.19)$$

по внешней и внутренней сторонам границ этих областей.

Области, элементарные одновременно относительно всех координатных осей, называются *элементарными областями.*

Примерами элементарных областей являются тетраэдры, кубы (вообще любые выпуклые многогранники), шары, эллипсоиды и т. п. (рис. 99).

При рассмотрении поверхностных интегралов

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

по поверхностям, являющимся границами элементарных областей, становится ясной целесообразность включения третьего нулевого слагаемого в правых частях формул типа (52.15) и (52.16). Действительно, поверхность, являющаяся частью цилиндра с образующей, параллельной одной из осей координат, не является, кроме случая, когда она вырождается в точку, частью цилиндра с образующей, параллельной другой оси координат. Поэтому если бы не включать в интеграл (52.19) по всей границе области указанные нулевые слагаемые, то интегралы $\iint_S Pdydz$, $\iint_S Qdzdx$ и $\iint_S Rdxdy$ следовало бы понимать как интегралы по различным, вообще говоря, частям границы рассматриваемой области.

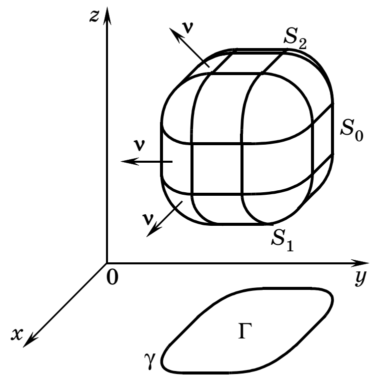


Рис. 99

ТЕОРЕМА 1. *Пусть G — элементарная область и на ее замыкании $\overline{G}$ заданы функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$* и *$R(x, y, z)$, непрерывные вместе со своими частными производными* $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$. Тогда имеет место формула*

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy, \quad (52.20)$$

где интеграл в правой части равенства берется во внешней стороне границы S области G.

Формула (52.20) называется *формулой Гаусса—Остроградского.*

СЛЕДСТВИЕ. *Если при выполнении условий теоремы граница области G кусочно-гладкая, то*

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS, \quad (52.21)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *— направляющие косинусы единичной внешней нормали* ν (см. (52.17)) *к поверхности S.*

---

* Непрерывность частных производных на границе понимается как их непрерывная продолжаемость на границу области.

Положив

$$\boldsymbol{a} \overset{\text{def}}{=} (P, Q, R), \qquad (52.22)$$

формулу (52.21) Гаусса—Остроградского можно переписать в виде

$$\iiint\limits_G \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dx dy dz = \iint\limits_S \boldsymbol{a} \nu dS. \qquad (52.23)$$

Доказательство. Рассмотрим, например, интеграл $\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz$. Использовав обозначения, введенные в начале этого пункта, получим

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\, dx dy dz = \iint\limits_D \left[\int\limits_{\varphi(x,\, y)}^{\psi(x,\, y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz dx dy = \right.$$

$$= \iint\limits_D \{R[x, y, \psi(x, y)] - R[x, y, \varphi(x, y)]\} dx dy \underset{(51.27)}{=}$$

$$\underset{(51.27)}{=} \iint\limits_{\hat{S}_2} R(x, y, z) dx dy + \iint\limits_{\check{S}_1} R(x, y, z) dx dy. \qquad (52.24)$$

Заметим далее (см. (51.27)), что $\iint\limits_{S_0} R(x, y, z) dx dy = 0$, так как проекция на плоскость xOy поверхности S содержится в границе квадрируемой области D и поэтому имеет плоскую меру Жордана, равную нулю. Таким образом, формулу (52.24) можно переписать в виде

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\, dx dy dz = \iint\limits_{\hat{S}_2} R dx dy + \iint\limits_{\check{S}_1} R dx dy + \iint\limits_{S_0} R dx dy \underset{(52.15)}{=}$$

$$\underset{(52.15)}{=} \iint\limits_{S^+} R dx dy. \qquad (52.25)$$

Совершенно аналогично доказываются формулы

$$\iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x}\, dx dy dz = \iint\limits_{S^+} P dy dz, \quad \iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint\limits_{S_0} Q dz dx. \qquad (52.26)$$

Складывая (52.25) и (52.26), получим формулу (52.20). □

Подчеркнем, что формула (52.20) доказана без предположения о какой-либо дифференцируемости поверхности, ограничивающей область G (поверхностные интегралы второго рода берутся здесь в смысле определений п. 51.5).

Формула Гаусса—Остроградского (52.12) может быть доказана и в случае областей G более общего вида, чем было указано, а именно для таких, для которых существует конечное разбиение на элементарные области G_i, $i = 1, 2, \ldots, i_0$. Для этого достаточно написать формулу Гаусса — Остроградского

для каждой области G_i, и полученные результаты сложить; в результате получается искомая формула для области G. Действительно, в левой части равенства, в силу аддитивности интеграла, получится соответствующий интеграл по области G, а в правой части равенства сумма всех поверхностных интегралов по частям границ, которые принадлежат границам двух областей, равна нулю. В самом деле, если некоторая поверхность представляет собой часть границ двух областей, то интеграл по внешней стороне поверхности относительно одной из этих областей является интегралом по внутренней стороне поверхности относительно другой области, т. е. первый интеграл отличается от второго только знаком и поэтому они взаимно уничтожаются. В результате останутся только интегралы по частям границ G_i, составляющим в совокупности границу области G (ср. с п. 47.5). Указанные разбиения области G часто бывает удобно производить плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Заметим, что среди областей такого типа есть и области, граница которых состоит из нескольких «кусков», т. е. может быть представлена как сумма конечного числа кусочно-гладких непересекающихся поверхностей (ср. с соответствующими обобщениями формулы Грина в п. 47.8).

Можно показать, что формула Гаусса—Остроградского справедлива для любой ограниченной области, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей. Однако это довольно громоздко, и мы не будем на этом останавливаться, а ограничимся лишь формулировкой теоремы.

ТЕОРЕМА 1′ (теорема Гаусса—Остроградского). *Пусть граница ∂G ограниченной области G состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей, а вектор-функция $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$ и частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны на замыкании $\overline{G}$ области; тогда*

$$\iiint\limits_G \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial G} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}.$$

В качестве ориентации на гладких частях границы ∂G области G здесь выбрана внешняя нормаль.

Например, если $G = \{x, y, z) : 0 < a < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < b\}$ — шаровое кольцо и, следовательно, его граница состоит из двух сфер $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ и $S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = b^2\}$, то на внутренней сфере S_1 надо взять нормаль, направленную к центру шара G, а на внешней сфере S_2 — от центра шара.

Формула Гаусса—Остроградского позволяет найти выражение для объема области через соответствующий поверхностный интеграл. В самом деле, полагая в (52.20) $P(x, y, z) = x$, $Q(x, y, z) = y$, $R(x, y, z) = z$ и заметив, что $\iiint\limits_G dx\,dy\,dz = \mu G$, получим

$$\mu G = \frac{1}{3}\iint\limits_{S^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy,$$

или в случае (52.21)

$$\mu G = \frac{1}{3}\iint\limits_{S^+}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS.$$

Формула Гаусса—Остроградского дает также возможность установить геометрический подход к понятию дивергенции.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть в трехмерной области G* определено непрерывно дифференцируемое векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$. Пусть $M_0 \in G$ и D — область с кусочно-гладкой границей S такая, что $M_0 \in D$, $\overline{D} \subset G$ и, следовательно, для области D справедлива формула Гаусса—Остроградского**.*

Обозначим через S^+ поверхность S, ориентированную с помощью выбора внешней нормали, а через $\operatorname{diam} D$ — диаметр области D. Тогда

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M_0) = \lim_{\operatorname{diam} D \to 0} \frac{\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}}{\mu D}. \qquad (52.27)$$

Доказательство. По формуле (52.23) имеем

$$\iiint\limits_D \operatorname{div}\boldsymbol{a}\;dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}. \qquad (52.28)$$

Но по интегральной теореме о среднем (п. 44.6)

$$\iiint\limits_D \operatorname{div}\boldsymbol{a}\;dx\,dy\,dz = \operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)\mu D, \quad M \in D. \qquad (52.29)$$

Подставив (59.29) в (52.28), получим

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M) = \frac{\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}}{\mu D}. \qquad (52.30)$$

---

* Здесь на структуру области G не накладывается никаких ограничений.

**К таким областям D, например, относятся все шары достаточно малого радиуса с центром в точке M_0 и кубы достаточно малого размера с центром в точке M_0.

Переходя к пределу в формуле (52.30) при $\operatorname{diam} D \to 0$, в силу непрерывности в точке M_0 функции $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M)$, получим формулу (52.27). □

Можно показать, что величины, входящие в правую часть равенства (52.27), не зависят от выбора системы координат (в правую часть входит двойной интеграл от скалярного произведения векторов и объем области), поэтому отсюда еще раз следует, что дивергенция векторного поля не зависит от выбора системы координат.

Из равенства (52.27) следует также, что правая часть этого равенства может быть принята за определение дивергенции данного поля.

Точки векторного поля $\boldsymbol{a}$, в которых $\operatorname{div} \boldsymbol{a} \neq 0$, называются *источниками* векторного поля. Интуитивно естественность этого термина объясняется тем обстоятельством, что если точка является «источником», то, как видно из формулы (52.27), для всех достаточно малых по диаметру областей D, содержащих точку M_0, будем иметь $\iint\limits_S \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{dS} \neq 0$, т. е. поток векторного поля $\boldsymbol{a}$ через любую достаточно малую поверхность, окружающую источник, не равен нулю.

52.4. Формула Стокса. Геометрическое определение вихря

Пусть S — дважды непрерывно дифференцируемая поверхность без особых точек в пространстве $\boldsymbol{R}^3_{xyz}$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in \overline{D}$, — ее представление, D — плоская ограниченная область, для которой справедлива формула Грина. Допустим, что граница области D состоит из одного простого кусочно-гладкого контура. Обозначим через Γ_0 положительно ориентированный контур, ограничивающий область D, и через $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — его представление. Пусть $\boldsymbol{\nu} = \dfrac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}$ — ориентация на поверхности S (см. определение 20 в п. 50.10), $\boldsymbol{\nu} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. При сделанных предположениях нормаль $\boldsymbol{\nu}$ непрерывна на $\overline{D}$.

Обозначим через S^+ поверхность S с выбранной на ней нормалью $\boldsymbol{\nu}$. Пусть Γ — контур с представлением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\ (u(t), v(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, т. е. Γ является краем поверхности S. Будем говорить также, что *поверхность S натянута на контур* Γ.

Пусть, наконец, G — область в пространстве $\boldsymbol{R}^3_{xyz}$ и $S \subset G$. При выполнении этих предположений справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3 (теорема Стокса*). *Пусть функции P, Q и R непрерывны вместе со своими первыми частными производными в области G и пусть $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$. Тогда*

$$\int_\Gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \iint_{S^+} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}, \tag{52.31}$$

т. е. циркуляция векторного поля по контуру Γ, являющемуся краем поверхности S, равна потоку вихря этого поля через эту поверхность. В координатной форме формула (52.31) *имеет вид*

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

или

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS. \tag{52.32}$$

Доказательство. Рассмотрим, например, интеграл $\int_\Gamma Pdx$. Заметив, что вдоль кривых Γ_0 и Γ переменные u и v являются функциями от t, и употребив обозначения, введенные в начале этого пункта, получим

$$\int_\Gamma P(x, y, z)dx =$$

$$= \int_a^b P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))x'_t(u(t)), v(t))dt =$$

$$= \int_{\Gamma_0} P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\left(\frac{\partial x(u, v)}{\partial u}\,du + \frac{dx(u, v)}{dv}\,dv\right).$$

Мы здесь воспользовались формулой

$$x'_t(u(t), v(t)) = \frac{\partial x(u(t), v(t))}{\partial u}\frac{du}{dv} + \frac{\partial x(u(t), v(t))}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

* Дж. Стокс (1819—1903) — английский механик и математик.

Применив формулу Грина к получившемуся интегралу $\int\limits_{\Gamma_0} P\frac{\partial x}{\partial u}du + P\frac{\partial x}{\partial v}dv$, будем иметь

$$\int\limits_{\Gamma} Pdx = \iint\limits_{D}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]du\,dv =$$

$$= \iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial u}\right]du\,dv =$$

$$= \iint\limits_{D}\left[\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(z,\,x)}{\partial(u,\,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}\right]du\,dv = \iint\limits_{S^+}\frac{\partial P}{\partial z}dz\,dx - \iint\limits_{S^+}\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS. \qquad (52.33)$$

(Здесь использовано соотношение (51.13).) Аналогично доказывается, что

$$\int\limits_{\Gamma} Qdy = \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)dS, \qquad (52.34)$$

$$\int\limits_{\Gamma} Rdz = \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)dS. \qquad (52.35)$$

Складывая формулы (52.33), (52.34) и (52.35), получим формулу (52.32), которая называется *формулой Стокса*. □

Используя координатную запись поверхностного интеграла второго рода (см. формулу (51.10)), формулу Стокса (52.32) можно записать в следующем виде:

$$\iint\limits_{S^+}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Чтобы наглядней представить себе связь выбора нормали ν на поверхности S с ориентацией ограничивающего ее контура Γ, рассмотрим поверхность S, имеющую явное представление $z = f(x,\,y)$, $(x,\,y) \in \overline{D}$.

Пусть Γ_0 — положительно ориентированный на плоскости xOy контур, являющийся границей D, и $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — его представление. Как и выше, ориентацию кривой Γ зададим представлением

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = f(x(t),\quad y(t)),\quad a \leqslant t \leqslant b. \qquad (52.36)$$

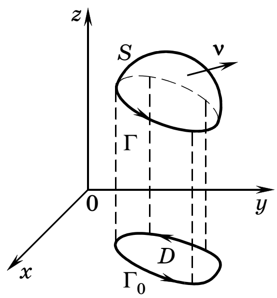


Рис. 100

В рассматриваемом случае контур Γ_0 является проекцией кривой Г. Нормаль же **ν**, как это было показано, при явном представлении поверхности образует острый угол с осью Oz (см. п. 50.10), поэтому если смотреть на поверхность S с положительного направления оси Oz, то контур Г будет ориентирован против часовой стрелки, т. е. ориентация кривой Г согласована с нормалью **ν** «по правилу штопора» (рис. 100). Это равносильно тому, что наблюдатель, обходящий поверхность S по ориентированному контуру Г и смотрящий на нее из конца нормали **ν**, видит поверхность S слева. Такая наглядная интерпретация согласованности ориентации нормали **ν** и контура имеет то преимущество, что она не связана с выбором системы координат и остается справедливой для любой поверхности S рассматриваемой в теореме Стокса, а не только для явно заданной поверхности. Конечно, все подобные рассуждения не являются математическими доказательствами, а служат лишь для наглядного пояснения формулы Стокса.

Следует заметить, что формула Стокса остается справедливой, если в ней взять противоположную ориентацию контура и противоположные нормали $-\boldsymbol{\nu}$, в этом случае обе части равенства (52.31) изменят знаки на противоположные.

Формула Стокса может быть доказана и для ориентируемых кусочно-гладких поверхностей $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$, а именно таких, для которых поверхности S_i, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, удовлетворяют условиям доказанной теоремы 3. При этом край поверхности ∂S (см. п. 50.11) состоит из конечного числа замкнутых контуров Γ_j, $j = 1, 2, \ldots, j_0$.

Для доказательства этого достаточно написать формулы Стокса для каждой поверхности S_i, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, и сложить их (ср. с обобщениями формулы Грина в п. 47.5 и теоремы Гаусса—Остроградского в п. 52.3).

Отметим также, что в теореме 3 условие д в а ж д ы непрерывной дифференцируемости поверхности S было наложено только для простоты доказательства (оно в этом случае с у щ е с т в е н н о упрощается, вторые производные появились в процессе доказательства и затем исчезли). Формула Стокса (52.31) справедлива и при предположении лишь глад-

кости поверхности S (при сохранении прочих условий теоремы 3). Доказательство этого факта выходит за рамки нашего курса.

Из всего сказанного следует, что формула Стокса остается справедливой и для просто ориентированных кусочно-гладких поверхностей $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ (т. е. без предположения о дважды непрерывной дифференцируемости поверхностей S_i).

Сформулируем теорему для этого случая.

ТЕОРЕМА 3′ (теорема Стокса). *Пусть векторная функция* $\boldsymbol{a}$ *непрерывно дифференцируема в области* G *и пусть* $S^+ = \{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ *— ориентированная кусочно-гладкая поверхность* (S_i *— гладкие поверхности*), *лежащая в* G, *и* ∂S *— ее край с ориентацией, порожденной заданной ориентацией поверхности* S^+ (см. п. 50.13). *Тогда*

$$\int\limits_{\partial S} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \iint\limits_{S^+} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}.$$

Наглядно согласование ориентаций контуров Γ_j, из которых состоит край ∂S поверхности S, с ориентацией этой поверхности и, следовательно, с ориентациями $\boldsymbol{\nu}$ поверхностей S_i, означает, что наблюдатель, движущийся по контуру Γ_j, $j = 1, 2, \ldots, j_0$, и смотрящий на поверхность S из конца нормали $\boldsymbol{\nu}$, видят поверхность S слева.

Теорема Стокса дает возможность установить геометрический подход к понятию вихря векторного поля.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть в трехмерной области* G *определено непрерывно дифференцируемое векторное поле* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$; M_0 *— фиксированная точка,* $M_0 \in G$; $\boldsymbol{\nu}$ *— произвольный постоянный единичный вектор,* Π *— плоскость, перпендикулярная вектору* $\boldsymbol{\nu}$ *и проходящая через точку* M_0, S *— ограниченная область в плоскости* Π, *границей которой является кусочно-гладкий контур* Γ; $\operatorname{diam} S$ *— диаметр области* S; *пусть контур* Γ *согласованно ориентирован с нормалью* $\boldsymbol{\nu}$*, $M_0 \in S$ *и* $S \subset G$** (рис. 101).

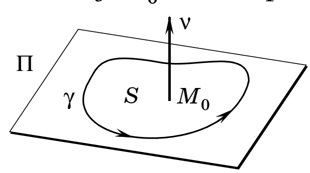


Рис. 101

* Как и в теореме 3 (по «правилу штопора»).

**Указанные области S, очевидно, всегда существуют (почему?).

Тогда*

$$\operatorname{rot}_\nu \boldsymbol{a}(M_0) = \lim_{\operatorname{diam} S \to 0} \frac{\int\limits_\Gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}}{\mu S}. \qquad (52.37)$$

Доказательство. По формуле Стокса,

$$\int\limits_\Gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \iint\limits_S \operatorname{rot}_\nu \boldsymbol{a}\,dS,$$

но по интегральной теореме о среднем

$$\iint\limits_S \operatorname{rot}_\nu \boldsymbol{a}\,dS = \operatorname{rot}_\nu \boldsymbol{a}(M)\mu S, \quad M \in S.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot}_\nu \boldsymbol{a}(M) = \frac{\int\limits_\Gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}}{\mu S}. \qquad (52.38)$$

Заметим, что при $\operatorname{diam} S \to 0$ и $M \to M_0$. В силу непрерывности в точке M_0 функции $\operatorname{rot}_\nu \boldsymbol{a}(M)$, переходя к пределу в (52.38) при $\operatorname{diam} S \to 0$, получим формулу (52.37). □

Из формулы (52.37) следует, что ее правая часть может быть принята за определение проекции вихря данного поля на произвольный, но фиксированный единичный вектор ν. Это приводит и к новому определению самого вихря, так как достаточно, например, взять три произвольных ортогональных единичных вектора ν_1, ν_2, ν_3, проекциями на которые, как это хорошо известно, однозначно определяется всякий вектор.

Можно показать, что величины, входящие в правую часть равенства (52.37), не зависят от выбора системы координат, однако согласованность ориентаций вектора ν и контура Γ зависит от ориентации системы координат: при переходе от правой системы координат к левой согласованность ориентаций ν и Γ по правилу штопора заменяется согласованностью по правилу «антиштопора», т. е. при фиксированной ориентации вектора ν ориентация контура Γ изменяется на противоположную. Тем самым интеграл $\int\limits_\Gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$ при изменении ориентации системы координат изменяет знак, так же как и векторное произведение, каковым в данном случае является $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

---

* Через $\operatorname{rot}_\nu \boldsymbol{a}$ обозначена проекция вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ на вектор ν, т. е. $\operatorname{rot}_\nu \boldsymbol{a} = \text{пр}_\nu \operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

Из сказанного следует, что формула Стокса (52.32) справедлива как в правой, так и в левой системе координат, так как при изменении ориентации системы координат и левая, и правая части равенства (52.32) меняют знак.

52.5. Соленоидальные векторные поля

В этом пункте ограниченную область, для которой справедлива формула Гаусса—Остроградского (52.23), будем называть *допустимой*.

Выше отмечалось (см. п. 52.3), что теорема Гаусса—Остроградского справедлива для любой ограниченной области, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей. Поэтому всякая такая область допустима.

Читатель, предпочитающий пользоваться только доказанными фактами, может под допустимыми областями понимать именно те, для которых в настоящем курсе была доказана теорема Гаусса—Остроградского.

Определение 9. *Непрерывно дифференцируемое в области G векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x, y, z)$ называется соленоидальным в этой области, если его поток через ориентированную границу любой допустимой области D, замыкание $\overline{D}$ которой лежит в G : $\overline{D} \subset G$, равен нулю*:

$$\int\limits_{\partial S} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S} = 0. \qquad (52.39)$$

Если рассматриваемое векторное поле является, например, полем скоростей текущей жидкости, то его соленоидальность означает, что в каждую область, содержащуюся внутри текущей жидкости, сколько жидкости втекает в каждый момент времени, столько же ее и вытекает.

Граница ∂D допустимой области D имеет две ориентации, порожденные соответственно внутренней и внешней нормалями. Очевидно, если условие (52.39) выполняется при одной ориентации, то оно выполняется и при другой, так как соответствующие интегралы могут отличаться только знаками.

Поясним определение соленоидальности поля на примере. Пусть G — шаровое кольцо: часть пространства, заключенная между двумя сферами S_r и S_R с общим центром O и радиусами r и R, $r < R$, а векторное поле $\boldsymbol{a}$ соленоидально в G. Тогда его поток будет равен нулю, например, через любую сферу S, лежащую в G и ограничивающую шар, также лежащий в G.

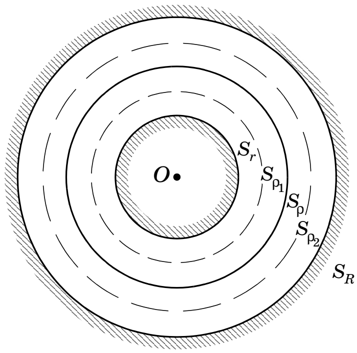


Рис. 102

Однако поток векторного поля $\boldsymbol{a}$ через сферу S_ρ с центром в точке O и радиусом ρ, $r < \rho < R$, не обязан быть равным нулю, так как шар, ограниченный этой сферой, не содержится в области G (рис. 102).

Вместе с тем сумма потоков векторного поля $\boldsymbol{a}$ будет равна нулю через две сферы S_{ρ_1} и S_{ρ_2} с тем же центром и радиусами ρ_1 и ρ_2, $r < \rho_1 < \rho_2 < R$, если одну из них ориентировать, выбрав нормаль, идущую к центру, а другую — от центра. Действительно, указанные сферы ограничивают шаровое кольцо, целиком лежащее в области G, а выбранная их ориентация является ориентацией границы, соответствующей внешней или внутренней нормали. Поэтому, по определению соленоидальности поля, его поток через рассматриваемую ориентированную границу будет равен нулю.

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемое в области G векторное поле было соленоидальным в ней, необходимо и достаточно, чтобы его дивергенция равнялась нулю во всех точках области G:*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M_0) = 0, \quad M \in G.$$

Доказательство необходимости. Пусть $\boldsymbol{a}$ — соленоидальное в области G векторное поле и $M_0 \in G$. Обозначим через Q_r открытый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке M_0, а через S_r — ограничивающую его сферу. Поскольку все точки $M \in G$, в том числе и точка M_0, являются внутренними для G, то существует такое $r_0 > 0$, что при $r < r_0$ все шары радиуса r вместе с ограничивающими их сферами S_r будут содержаться в G.

Заметим теперь, что предел (52.27), равный значению дивергенции векторного поля $\boldsymbol{a}$ в точке M_0, существует для произвольных допустимых областей D, $D \subset \overline{D} \subset G$, диаметры которых стремятся к нулю. Поэтому он существует и при специальном выборе $D = Q_r$, $r < r_0$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M_0) = \lim_{r \to 0} \frac{\iint\limits_{S_r} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}}{\mu Q_r}.$$

В силу определения соленоидальности поля, для всех $r < r_0$ имеет место равенство

$$\iint_{S_r} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = 0,$$

поэтому $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M_0) = 0$.

Доказательство достаточности. Пусть $\boldsymbol{a}$ — непрерывно дифференцируемое в области G векторное поле с дивергенцией, равной нулю во всех точках области G. Если D — произвольная допустимая область такая, что $D \subset \overline{D} \subset G$, то, в силу теоремы Гаусса—Остроградского,

$$\iint_{\partial D} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = \iiint_{D} \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz = 0,$$

т. е. поле $\boldsymbol{a}$ соленоидально. □

Типичным примером соленоидального поля является векторное поле, представляющее собой в некоторой области поле роторов дважды непрерывно дифференцируемого в этой области векторного поля.

Действительно, если $\boldsymbol{a}$ — дважды непрерывно дифференцируемое в области G поле, то $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ является соленоидальным в G полем, так как $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$.

Нетрудно провести правдоподобное рассуждение, убеждающее в справедливости этого соотношения. Для этого достаточно перейти к символическому вектору ∇; тогда рассматриваемое равенство примет вид $\nabla(\nabla \times \boldsymbol{a}) = 0$. Смешанное произведение обычных векторов в случае, когда два сомножителя совпадают, равно нулю, ибо в этом случае параллелепипед, натянутый на эти векторы, вырождается в параллелограмм, и, следовательно, его объем равен нулю. Поэтому естественно ожидать, что указанное равенство справедливо и для вектора ∇. Это правдоподобное рассуждение можно превратить в математически обоснованное и тем самым имеющее доказательную силу, если доказать, что символический вектор ∇ на самом деле обладает использованными нами свойствами, аналогичными соответствующим свойствам обычных векторов. Это можно сделать простой проверкой, переходя, например, к координатной записи (см. формулы (52.2) и (52.4)).

52.6. Потенциальные векторные поля

В этом пункте поверхность S, для которой справедлива теорема Стокса, будем называть допустимой.

Определение 10. *Трехмерная область G называется односвязной, если, какова бы ни была замкнутая ломаная Λ, ле-*

жащая в G, существует допустимая поверхность S, также лежащая в G и натянутая на ломаную Λ (см. п. 52.4).

Если рассматриваемая область G выпуклая, то существует очень простой способ натягивания поверхностей на контур. Искомую поверхность всегда можно взять в этом случае в виде конуса с вершиной в произвольно фиксированной точке $M_0 \in G$, направляющей которого служит заданная кривая Γ. Если $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u)$, $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$, — представление этой кривой и $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор точки M_0, то искомый конус S, натянутый на данный контур, задается представлением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + v[\boldsymbol{\rho}(u) - \boldsymbol{r}_0], \quad 0 \leqslant u \leqslant 2\pi, 0 \leqslant v \leqslant 1. \qquad (52.40)$$

Рассматривая u и v как полярные координаты, видим, что «представление» конуса задано на единичном круге, причем единичная окружность $\Gamma_0 = \{(u, v) : v = 1\}$ переходит в заданный контур Γ, ее центр — в вершину конуса (рис. 103).

Слово «представление» взято в кавычки, так как понятие представления поверхности было введено выше лишь для случая, когда параметры u и v являлись декартовыми координатами. Конус (52.40) в общем случае будет иметь кратные точки и не будет кусочно-гладкой поверхностью даже в случае, когда Γ достаточно гладкая кривая, т. е. если Γ достаточное число раз непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек. При этом на конусе (52.40) будут иметься, вообще говоря, особые точки, отличные от вершины. Чтобы устранить это затруднение наиболее простым образом, мы и ограничились при определении односвязной области рассмотрением лишь контуров, являющихся замкнутыми ломаными.

В этом случае вершину конуса M_0 всегда можно выбрать таким образом, что указанный конус будет кусочно-гладкой поверхностью. Действительно, при любом выборе вершины конуса в случае, когда его направляющей является некоторая ломаная Λ, конус распадается на конечное число треугольников S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, правда, быть может, вырожденных, т. е. превратившихся в отрезок или точку. Одной из вершин этих треугольников будет вершина конуса M_0, а противоположной стороной — одно из звеньев ломаной Λ. Каждый такой треугольник можно рассматривать как непрерывно дифференцируемую любое

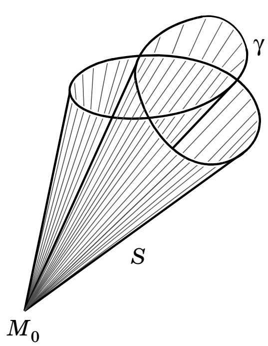


Рис. 103

число раз поверхность и задавать его представлением, осуществляемым линейными функциями (см. п. 16.5 и (52.40)). Если треугольник вырожденный, то все его точки будут особыми. Однако сколь угодно малым смещением вершины конуса можно добиться того, что она окажется в общем положении со всеми звеньями ломаной Λ, т. е. не будет лежать ни на одной прямой, проходящей через какое-либо звено ломаной Λ. В результате все треугольники S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, станут невырожденными и, следовательно, могут рассматриваться как гладкие поверхности без особых точек. Сам же конус S окажется, таким образом, кусочно-гладкой поверхностью $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=k}$. При этом поскольку при всех достаточно малых смещениях каждой точки области она остается внутри области, вершину M_0 конуса S всегда можно выбрать в области, и поэтому, в силу ее выпуклости, весь конус S будет лежать в этой области. К получившемуся кусочно-гладкому конусу S можно применить теорему Стокса, иначе говоря, этот конус является допустимой в этом пункте поверхностью. Итак, мы доказали, что всякая *выпуклая область односвязна*.

Примером неодносвязной области является тор, т. е. область, образуемая вращением круга вокруг не пересекающей его оси (рис. 104).

Напомним, что поле называется потенциальным, когда его циркуляция $\int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$ равна нулю по любому замкнутому контуру $\Gamma \subset G$, или, что то же, когда интеграл $\int\limits_{\widehat{AB}} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$ не зависит от пути интегрирования, соединяющего в области G точки A и B. Подробнее об этом см. п. 52.1.

В п. 47.11 (теорема 6) для произвольной плоской области было доказано, что непрерывное в ней векторное поле является потенциальным тогда и только тогда, когда у него существует потенциальная функция. В приведенном там доказательстве не было существенным, что рассматриваемая область была именно плоской. Подобным же рассуждением и для пространственной области устанавливается аналогичный факт.

Для того чтобы непрерывное в трехмерной области векторное поле $\boldsymbol{a}$ *было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно имело в этой области потенциальную функцию* u:

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u.$$

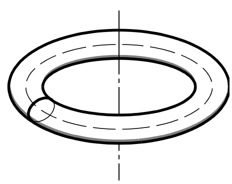


Рис. 104

При этом потенциальную функцию u можно получить из векторного поля $\boldsymbol{a}$ по формуле

$$u(M) = \int\limits_{\overset{\frown}{M_0 M}} \boldsymbol{a}\, dr,$$

где кусочно-гладкая кривая M_0M лежит в рассматриваемой области, а M_0 — ее произвольно фиксированная точка.

Как и в плоском случае, в пространстве для односвязных областей имеется еще один критерий потенциальности векторного поля, очень удобный, в частности, для приложений.

Оказывается, что в односвязной области векторное поле потенциально тогда и только тогда, когда оно безвихревое. Это утверждение содержится в нижеформулируемой и доказываемой теореме 6.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть в односвязной области G задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$. Тогда эквивалентны следующие три свойства*:

1^0. *Векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ является в области G потенциальным.*

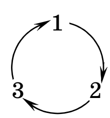
2^0. *Существует потенциальная в G функция $u = u(M)$, т. е. такая функция $u(M)$, что $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u$. В этом случае для любых двух точек $A \in G$ и $B \in G$ и любой кусочно-гладкой кривой $\overset{\frown}{AB}$, соединяющей в G эти точки*,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = u(B) - u(A).$$

3^0. *Векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ является безвихревым*: $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$ *в области G, т. е.*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{52.41}$$

Доказательство. Применим следующую схему.



Первый шаг: $1 \to 2$. Это утверждение, т. е. существование потенциальной функции, как это уже отмечалось выше, доказывается совершенно аналогично рассмотренному раньше случаю плоской области (см. теорему 4 в п. 47.11), и поэтому не будем приводить его доказательство.

Второй шаг: $2 \to 3$. Утверждение $2 \to 3$ также доказывается аналогично плоскому случаю: оно означает просто-напросто равенство соответствующих вторых смешанных производных потенциальной функции.

Утверждения $1 \to 2$ и $2 \to 3$ справедливы и без предположения односвязности области.

Третий шаг: $3 \to 1$. Пусть $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$ в G. Допустим сначала, что Γ — кусочно дважды непрерывно дифференцируемая замкнутая кривая, лежащая в G. Если существует допустимая поверхность S, содержащаяся в G и ограниченная контуром Γ, то из теоремы Стокса сразу получаем

$$\int_\Gamma \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S} = 0.$$

В силу односвязности области G (см. определение 10), это верно, в частности, для любой конечнозвенной ломаной. Поэтому, если Γ — любая кусочно-гладкая замкнутая кривая, лежащая в G, то, выбирая последовательность ломаных Λ_n, вписанных в Γ со звеньями, стремящимися к нулю при $n \to \infty$, по лемме 4 п. 47.10 получим

$$\int_\Lambda \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \lim_{n \to \infty} \int_{\Lambda_n} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = 0. \square$$

Замечание 1. Условие потенциальности $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u$ непрерывного векторного поля $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$ в некоторой области равносильно тому, что функция $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом потенциальной функции $u = u(x, y, z)$ в указанной области. Действительно, условие $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u$ означает, что $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$, и, следовательно, $du = Pdx + Qdy + Rdx$. Поэтому теорема 6 может быть перефразирована следующим образом.

Если функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы в односвязной области G, то для того чтобы в области G функция $Pdx + Qdy + Rdz$ была бы полным дифференциалом некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы в области G выполнялись условия (52.41).

Замечание 2. Если функции P, Q, R непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0), то теорема 6 дает ответ на вопрос, когда существует окрестность точки (x_0, y_0, z_0), в которой функция $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y, z)$. Действительно, поскольку открытый шар является односвязной областью, согласно теореме 6, ответ на поставленный вопрос гласит: тогда и только тогда, когда у точки (x_0, y_0, z_0) существует окрестность, в которой выполняются условия (52.41), так как если существует какая-то окрестность, обла-

дающая этим свойством, то существует и шаровая окрестность с тем же свойством.

Примеры. Пусть $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1. Векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$ потенциальное, так как функция $u = \frac{1}{2} r^2$ является, очевидно, его потенциалом:

$$\nabla \left(\frac{1}{2} r^2\right) = \frac{1}{2} \nabla (x^2 + y^2 + z^2) = (x, y, z) = \boldsymbol{r}.$$

Рассматриваемое поле не солиноидально, так как $\operatorname{div} \boldsymbol{r} = 3$.

2. Рассмотрим поле $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$, $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$. Заметив, что $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$, видим, что $\nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$, т. е. поле $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ потенциальное и функция $u = r$ является его потенциалом.

Найдем его дивергенцию. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{r - x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}$$

и аналогично

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{r^2 - y^2}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{z}{r}\right) = \frac{r^2 - z^2}{r^3}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{3r^2 - x^2 - y^2 - z^2}{r^3} = \frac{2}{r} \neq 0$$

и поэтому поле $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ не соленоидальное.

3. Рассмотрим поле $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2} = \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)$, $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$. Для выяснения его потенциальности найдем его ротор. Вычислим первую координату ротора:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{r^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r^2} = -\frac{2y}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{2x}{r^3}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{-2yx + 2xy}{r^3} = 0.$$

Аналогичным образом показывается, что и две другие координаты ротора равны нулю. Поскольку пространство с выколотым началом координат является односвязной областью, векторное поле $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$ потенциальное. Нетрудно найти и его потенциал $u = u(x, y, z)$. Например, заметив, что

$$\frac{d}{dt} \ln (t^2 + a^2) = \frac{2t}{t^2 + a^2},$$

видим, что $u = \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2 + z^2)$:

$$\nabla u = \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right) = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}.$$

Заметим, что векторное поле $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$, рассматриваемое, например, на плоскости переменных x и y, т. е. при $\boldsymbol{r} = (x,\ y)$, $x^2 + y^2 > 0$, также будет потенциальным с потенциалом $u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$. При этом плоскость с выколотым началом координат уже не будет односвязной. Вообще любое потенциальное поле является безвихревым, т. е. его ротор равен нулю во всех точках области определения поля — это доказывается без предположения об ее односвязности (см. доказательство теоремы 6).

Для выяснения вопроса о соленоидальности поля $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}/r^2$ найдем его дивергенцию. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^2}\right) = \frac{r^2 - 2xr\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^4} = \frac{r^2 - 2x^2}{r^4}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^2}\right) = \frac{r^2 - 2y^2}{r^4}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^2}\right) = \frac{r^2 - 2z^2}{r^4}.$$

Поэтому

$$\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r^2} = \frac{3r^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)}{r^4} = \frac{1}{r^2} \neq 0,$$

т. е. поле $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$ не соленоидальное.

4. Рассмотрим поле $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$. Заметив, что $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{y}{r^3}$, $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{z}{r^3}$, видим, что функция $u = -\frac{1}{r}$ является потенциалом рассматриваемого векторного поля, т. е. $\nabla u = \boldsymbol{r}/r^3$ и, значит, поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}/r^3$ является потенциальным.

Найдем дивергенцию этого поля. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{r^3 - 3xr^2\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) = \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

Отсюда

$$\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = 0,$$

т. е. поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}/r^3$ является соленоидальным в пространстве с выколотым началом координат. Напомним, что в этом случае

его поток через любую кусочно-гладкую поверхность, ограничивающую область, не содержащую начало координат, равен нулю.

Таким образом, векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}/r^3$ является потенциальным и соленоидальным. С физической точки зрения оно представляет собой поле напряженностей единичного заряда.

Его дивергенция в любой точке, отличной от начала координат, равна нулю, а его поток через любую кусочно-гладкую поверхность, ограничивающую область, не содержащую начало координат, равен нулю. Последнее неверно для поверхностей, ограничивающих области, содержащие начало координат. Поток векторного поля $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}/r^3$ через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ равен $4\pi/3$. Действительно, заметив, что в этом случае единичная нормаль $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{r}/r$, имеем

$$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=r^2} \boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}\, dS = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\, dS = \frac{1}{r^2}\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=r^2} dS = \frac{4}{3}\pi.$$

В заключение заметим, что хотя потенциальные и соленоидальные векторные поля не исчерпывают совокупности всех возможных векторных полей, однако они позволяют описать широкий класс векторных полей. Именно: при достаточно общих предположениях любое векторное поле $\boldsymbol{a}$ представляет собой сумму потенциального и соленоидального векторного поля. Более точно, существуют такие скалярная функция u и векторное поле $\boldsymbol{b}$, что $\boldsymbol{a} = \nabla u + \operatorname{rot} \boldsymbol{b}$. Так как $\operatorname{rot} \nabla u = 0$ и $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{b} = 0$, то первое слагаемое является потенциальным полем, а второе — соленоидальным.

Это предложение называется теоремой Гельмгольца* (ее доказательство можно найти в кн.: *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Функции нескольких переменных. — М.: Наука, 1972).

УПРАЖНЕНИЯ. 2. Доказать, что поток ротора непрерывно дифференцируемого в некоторой области векторного поля через любую сферу, лежащую в указанной области, равен нулю.

3. Доказать, что

$$\iiint\limits_G \operatorname{grad} \varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_S (\boldsymbol{a} \times \operatorname{grad} \varphi)\, dS.$$

Здесь предполагается, что для области G, ограниченной поверхностью S, применима теорема Гаусса—Остроградского.

* Г. Гельмгольц (1821—1894) — немецкий физик и физиолог.

§ 53
Собственные интегралы, зависящие от параметра

53.1. Определение интегралов, зависящих от параметра; их непрерывность и интегрируемость по параметру

Пусть Y — некоторое множество действительных чисел, $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ — две функции, определенные на Y, $\varphi(y) \leqslant \psi(y)$, и функция $f(x, y)$ определена на множестве

$$\{(x, y) : y \in Y,\ x \in [\varphi(y), \psi(y)]\}. \tag{53.1}$$

Интегралы вида

$$\Phi(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx \tag{53.2}$$

называют *интегралами, зависящими от параметра*, а переменную y называют обычно *параметром*.

Часто встречается тот частный случай такого типа интегралов, когда функции φ и ψ постоянны, т. е. интегралы вида

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)dx. \tag{53.3}$$

Если Y является множеством всех натуральных чисел $Y = N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$, то, полагая $f_n(x) = f(x, n)$, $n = 1, 2, \dots$, интеграл (53.3) можно переписать в виде

$$\int_a^b f_n(x)dx,\ \ n = 1, 2, \dots .$$

Тем самым получилась числовая последовательность, образованная интегралами от функций некоторой функциональной последовательности.

Рассмотрим случай, когда множество Y представляет собой отрезок $[\alpha, \beta]$, функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на этом отрезке и $\varphi(y) < \psi(y)$, $y \in [\alpha, \beta]$. Пусть графики функций $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ и, быть может, отрезки прямых $y = \alpha$ и $y = \beta$ образуют границу ограниченной области G (рис. 105). Она, очевидно, квадрируема (см. п. 44.1). В этом случае множество (53.1), на котором определена функция $f(x, y)$, является замыканием $\overline{G}$ указанной области G:

$$\overline{G} = \{(x, y);\ \alpha \leqslant y \leqslant \beta,\ \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\}. \tag{53.4}$$

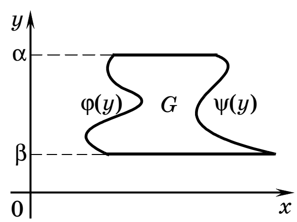


Рис. 105

В дальнейшем мы изучим свойства функции $\Phi(y)$ (ее непрерывность, правила ее дифференцирования и интегрирования) в зависимости от свойств функций $f(x, y)$, $\varphi(y)$, $\psi(y)$. Некоторые из этих свойств были получены раньше при изучении кратного интеграла. Так, например, лемма, доказанная в п. 45.1, дает условия, при которых интеграл, зависящий от параметра, является непрерывной функцией этого параметра. Сформулируем эту лемму в обозначениях настоящего параграфа в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Если функция* $f(x, y)$ *непрерывна на замыкании* $\overline{G}$ *области* G (см. (53.4)), *то функция* $\Phi(y)$, *задаваемая формулой* (53.2), *непрерывна на отрезке* $[\alpha, \beta]$.

Утверждению этой теоремы можно придать следующий вид:

$$\lim_{y \to y_0} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx = \int_{\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y)}^{\lim\limits_{y \to y_0} \psi(y)} \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, dx. \qquad (53.5)$$

Действительно, из теоремы 1 следует, что предел, стоящий в левой части равенства (53.5), равен $\Phi(y_0)$, а, в силу непрерывности функций φ, ψ и f, правая часть равенства также равна

$$\int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x, y_0)\, dx = \Phi(y_0).$$

В частности, для интеграла (53.3) имеем

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y_0) dx,$$

т. е. в этом случае возможен предельный переход под знаком интеграла.

В теореме о предельном переходе под знаком интеграла можно ослабить требования, накладываемые на функцию $f(x, y)$, потребовав вместо ее непрерывности по совокупности переменных лишь непрерывность по одной переменной и равномерное стремление к пределу по другой.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функция* $f(x, y)$ *определена для всех* $x \in [a, b]$, $y \in Y$ *и непрерывна по* x *на* $[a, b]$ *при любом фиксированном* $y \in Y$. *Тогда если при* $y \to y_0^*$ *функция* $f(x, y)$ *равномерно на отрезке* $[a, b]$ *стремится к* $\varphi(x)$ (см. п. 39.4), *то*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

---

* Здесь Y — произвольное числовое множество: $Y \subset \boldsymbol{R}$, а y_0 — число или одна из бесконечностей ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Доказательство. Рассмотрим какую-либо последовательность $y_n \in Y$, $n = 1, 2, \ldots$, такую, что $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y_0$. Тогда (см. упражнение 5 в п. 39.4) последовательность $\varphi_n(x) = f(x, y_n)$ будет равномерно на отрезке $[a, b]$ стремиться к функции $\varphi(x)$. Отсюда следует (см. п. 32.4), во-первых, что $\varphi(x)$ непрерывна и, следовательно, интегрируема на отрезке $[a, b]$, а во-вторых, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x, y_n)dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx,$$

и так как это верно для любой указанной последовательности $\{y_n\}$, то теорема доказана. □

Перейдем к вопросу об интегрировании интегралов (53.2), зависящих от параметра.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть область G элементарна относительно обеих осей координат, т. е.*

$$G = \{(x, y) : \alpha < y < \beta, \varphi(y) < x < \psi(y)\} = \\ = \{(x, y) : a < x < b, \varphi_1(x) < y < \psi_1(x)\},$$

где функции φ и ψ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функции φ_1 и ψ_1 — на отрезке $[a, b]$. Тогда если функция $f(x, y)$ непрерывна на замыкании $\overline{G}$ области G, то

$$\int_\alpha^\beta \Phi(y)dy = \int_\alpha^\beta \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx\right]dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} f(x, y)dy\right]dx = \\ = \iint_G f(x, y)dxdy. \quad (53.6)$$

Очевидно, теорема 3 является перефразировкой соответствующей теоремы о сведении кратного интеграла к повторному (см. п. 45.1).

53.2. Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра

При изучении дифференциальных свойств интегралов, зависящих от параметра, рассмотрим сначала интегралы вида (53.3).

ТЕОРЕМА 4 (правило Лейбница). *Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в замкнутом прямоугольнике $\Delta = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, \alpha \leqslant y \leqslant \beta$, то функция $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ и*

$$\frac{d\Phi(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dx.$$

Таким образом, чтобы при сделанных предположениях продифференцировать интеграл, зависящий от параметра, достаточно продифференцировать подынтегральное выражение, оставляя пределы интегрирования неизменными.

Доказательство. Пусть $y \in [\alpha, \beta]$ и $y + \Delta y \in [\alpha, \beta]$; тогда

$$\frac{\Phi(y+\Delta y)-\Phi(y)}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y}\int_a^b [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y+\theta\Delta y)}{\partial y}dx,$$
$$0 < \theta < 1.$$

Здесь применена формула конечных приращений Лагранжа.

Обозначив теперь через $\omega\left(\delta; \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ модуль непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial y}$, получим

$$\left|\frac{\Phi(y+\Delta y)-\Phi(y)}{\Delta y} - \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dx\right| \leqslant \int_a^b \left|\frac{\partial f(x, y+\theta\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{dy}\right|dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b \omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx \leqslant \omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right)(b-a). \qquad (53.7)$$

В силу равномерной непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial y}$ на замкнутом прямоугольнике Δ, имеем $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$; поэтому из (53.7) получим

$$\lim_{y \to 0} \frac{\Phi(y+\Delta y)-\Phi(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dx. \square$$

Теорема 4 легко обобщается и на случай зависящего от параметра интеграла общего вида (53.2).

ТЕОРЕМА 4′. *Пусть:* 1) *функция* $f(x, y)$ *и ее частная производная* $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ *непрерывны на замкнутом прямоугольнике* $\Delta = \{(x, y)\colon a \leqslant x \leqslant b, \alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$;

2) $\overline{G} \subset \Delta$ (см. (53.4));

3) *пусть функции* $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ *имеют непрерывные на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *производные.*

Тогда интеграл (53.2), *зависящий от параметра, также имеет производную на отрезке* $[\alpha, \beta]$, *причем*

$$\frac{d\Phi}{dy} = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dx - f(\varphi(y), y)\frac{d\varphi(y)}{dy} + f(\psi(y), y)\frac{d\psi(y)}{dy}. \qquad (53.8)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(y, u, v) = \int_u^v f(x, y)dx, \quad a \leqslant u \leqslant b, \quad a \leqslant v \leqslant b, \quad \alpha \leqslant y \leqslant \beta.$$

Нетрудно непосредственно проверить, что частные производные $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$ функции F существуют и непрерывны по совокупности переменных y, u, v. Проверим сначала существование и непрерывность частной производной $\frac{\partial F}{\partial y}$. Ее существование непосредственно следует из теоремы 4, причем

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_u^v \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx. \quad \textbf{(53.9)}$$

Докажем ее непрерывность. Пусть $a \leqslant u \leqslant b$, $a \leqslant v \leqslant b$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, $a \leqslant u + \Delta u \leqslant b$, $a \leqslant v \leqslant \Delta v \leqslant b$, $\alpha \leqslant y \leqslant \Delta y \leqslant \beta$; положив

$$\Delta \frac{\partial F(y, u, v)}{\partial y} = \frac{\partial F(y + \Delta y, u + \Delta u, v + \Delta v)}{\partial y} - \frac{\partial F(y, u, v)}{\partial y},$$

получим

$$\left| \Delta \frac{\partial F(y, u, v)}{\partial y} \right| = \left| \int_{u+\Delta u}^{v+\Delta v} \frac{\partial f(x, y + \Delta y)}{\partial y} dx - \int_u^v \frac{\partial f(x, y)}{dy} dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_u^v \left[\frac{\partial f(x, y + \Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{dy} \right] dx \right| + \left| \int_{u+\Delta u}^{u} \frac{\partial f(x, y + \Delta y)}{\partial y} dx \right| +$$

$$+ \left| \int_v^{v+\Delta v} \frac{\partial f(x, y + \Delta y)}{dy} dx \right|. \quad \textbf{(53.10)}$$

Поскольку функция $\frac{\partial f}{\partial y}$ определена на прямоугольнике Δ, в силу вышеуказанного выбора значений аргументов, все написанные интегралы имеют смысл и

$$|v - u| \leqslant b - a. \quad \textbf{(53.11)}$$

Далее, из непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial y}$ на прямоугольнике Δ следует, что она ограничена на нем, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех точек $(x, y) \in \Delta$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{dy} \right| \leqslant M. \quad \textbf{(53.12)}$$

Обозначив, как и выше, через $\omega\left(\delta; \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ модуль непрерывности функции $\frac{\partial f}{\partial y}$ на прямоугольнике Δ и использовав неравенства **(53.11)** и **(53.12)**, из **(53.10)** получим

$$\left| \Delta \frac{\partial F(y, u, v)}{\partial y} \right| \leqslant \omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right) \left| \int_u^v dx \right| + M \left| \int_{u+\Delta u}^{u} dx \right| + M \left| \int_v^{v+\Delta v} dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant (b - a)\omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right) + M|\Delta u| + M|\Delta v|.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\sqrt{\Delta y^2 + \Delta u^2 + \Delta v^2} \to 0} \Delta \dfrac{\partial F(y, u, v)}{\partial y} = 0$. Это и означает непрерывность частной производной $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ на множестве $\{(y, u, v) : c \leqslant y \leqslant d,\ a \leqslant u \leqslant b,\ a \leqslant v \leqslant b\}$. Непрерывность на этом множестве частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -f(u, y), \quad \frac{\partial F}{\partial v} = f(v, y) \qquad (52.13)$$

очевидна.

Связь между функциями Φ и F устанавливается формулой

$$\Phi(y) = F(y, \varphi(y), \psi(y)).$$

В силу доказанного выше, функцию Φ можно дифференцировать по правилу дифференцирования сложных функций:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Подставляя сюда выражения для частных производных $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial v}$ (см. (53.9) и (53.13)) и полагая $u = \varphi(y)$ и $v = \psi(y)$, получим формулу (53.8). □

§ 54
Несобственные интегралы, зависящие от параметра

54.1. Основные определения. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра

Мы будем рассматривать интегралы вида

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx, \qquad (54.1)$$

где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, переменная y принадлежит некоторому множеству Y и интеграл (54.1), быть может, при некоторых (в частности, при всех) значениях y является несобственным.

Определение 1. *Если для каждого* $y_0 \in Y$ *интеграл*

$$\Phi(y_0) = \int_a^b f(x, y_0)\, dx$$

сходится, то интеграл (54.1) *называется сходящимся на множестве* Y.

В дальнейшем, если не оговорено что-либо другое, будем рассматривать только случай, когда выполняются условия:

1) $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) при любом $y \in Y$ функция $f(x, y)$ по переменной x интегрируема, по Риману, на каждом отрезке $[a, \eta]$, где η таково, что $a < \eta < b$.

В этом случае сходимость интеграла (54.1) на множестве Y означает, что при любом $y \in Y$ существует предел

$$\lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x, y)dx = \int_a^b f(x, y)dx$$

(если $b = +\infty$, то $b - 0 = +\infty$). Отсюда, в силу равенства

$$\int_a^b f(x, y)dx - \int_a^\eta f(x, y)dx = \int_\eta^b f(x, y)dx,$$

при каждом фиксированном $y \in Y$ имеем

$$\lim_{\eta \to b-0} \int_\eta^b f(x, y)dx = 0.$$

Таким образом, *если интеграл* (54.1) *сходится на множестве* Y, *то при каждом фиксированном* $y \in Y$ *для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\eta_\varepsilon = \eta_\varepsilon(y) < b$, *что если* $\eta_\varepsilon < \eta < b$, *то*

$$\left|\int_\eta^b f(x, y)dx\right| < \varepsilon. \tag{54.2}$$

Условия, при которых для несобственных интегралов, зависящих от параметра, справедливы теоремы, аналогичные доказанным в предыдущем параграфе для собственных интегралов, основаны на понятии так называемой равномерной сходимости интеграла.

Будем предполагать, как было отмечено, что интеграл (54.1) удовлетворяет вышеуказанным условиям 1) и 2).

Определение 2. *Сходящийся на множестве* Y *интеграл* $\int_a^b f(x, y)dx$ *называется равномерно сходящимся на этом множестве, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\eta_\varepsilon < b$, *что для всех* $y \in Y$ *и всех* η *таких, что* $\eta_\varepsilon < \eta < b$, *выполняется неравенство* $\left|\int_\eta^b f(x, y)dx\right| < \varepsilon$.

Напомним, что в рассматриваемом нами случае b может быть как конечным, т. е. числом, так и бесконечным, т. е. равным $+\infty$. Таким образом, в приведенном виде определение равномерной сходимости годится одновременно как для случая, когда интегрирование производится по конечному отрез-

ку $[a, b]$, а несобственный интеграл может возникнуть за счет неограниченности подынтегральной функции, так и для случая, когда несобственный интеграл получается за счет неограниченности промежутка интегрирования $[a, +\infty)$.

Приведенные определения сходимости и равномерной сходимости интеграла напоминают соответствующие определения для рядов (см. п. 32.1 и 32.3). Между ними действительно имеется связь.

Пусть $\{\eta_n\}$ — некоторая последовательность такая, что

$$\eta_1 = a, \quad \eta_n \in [a, b), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \text{и} \lim_{n \to \infty} \eta_n = b.$$

Наряду с интегралом (54.1) рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x, y)dx. \tag{54.3}$$

Пусть

$$S_n(y) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x, y)dx = \int_a^{\eta_n} f(x, y)dx$$

— его частичная сумма. Тогда, если интеграл (54.1) сходится (соответственно равномерно сходится) на множестве Y, то, очевидно, сходится (соответственно равномерно сходится) на множестве Y и ряд (54.3); при этом

$$\int_a^b f(x, y)dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^{\eta_n} f(x, y)dx = \lim_{n \to \infty} S_n(y),$$

т. е. рассматриваемый интеграл равен сумме ряда (54.3).

Определение равномерной сходимости интеграла можно перефразировать еще следующим образом.

Определение 2′. *Сходящийся на множестве Y интеграл* (54.1) *называется равномерно сходящимся на этом множестве, если*

$$\lim_{\eta \to b - 0} \sup_{y \in Y} \left| \int_\eta^b f(x, y)dx \right| = 0. \tag{54.4}$$

Действительно, если интеграл (54.1) равномерно сходится на множестве Y в смысле определения 2, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta_\varepsilon < b$, что выполняется неравенство (54.2) при $y \in Y$ и $\eta_\varepsilon < \eta < b$ и, следовательно,

$$\sup_{y \in Y} \left| \int_\eta^b f(x, y)dx \right| \leqslant \varepsilon, \quad \eta_\varepsilon < \eta < b,$$

откуда и следует (54.4). Обратно, если рассматриваемый интеграл равномерно сходится на множестве Y в смысле определения 2′, то из условия (54.4) для любого $\varepsilon > 0$ следует сущест-

вование такого числа η_ε, что при всех $y \in Y$ и $\eta_\varepsilon < \eta < b$ выполняется неравенство (54.2). □

Если рассмотреть интеграл

$$F(y, \eta) \overset{\text{def}}{=} \int_\eta^b f(x, y)dx,$$

то очевидно, что условие (54.4) означает, что этот интеграл равномерно на Y стремится к нулю при $\eta \to b - 0$ (здесь в терминологии п. 39.4 параметром является не y, как это было там, а переменная η).

Равномерная сходимость на множестве Y интеграла (54.1) означает также равномерное стремление на множестве Y функции

$$\Phi(y, \eta) \overset{\text{def}}{=} \int_a^\eta f(x, y)dx \tag{54.5}$$

при $\eta \to b - 0$ к функции (54.1).

Действительно, последнее означает (см. п. 39.4), что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta_\varepsilon < b$, что для каждого η, удовлетворяющего условию $\eta_\varepsilon < \eta < b$, и всех $y \in Y$ выполняется неравенство $|\Phi(y) - \Phi(y, \eta)| < \varepsilon$. Но

$$\Phi(y) - \Phi(y, \eta) = \int_a^b f(x, y)dx - \int_a^\eta f(x, y)dx = \int_\eta^b f(x, y)dx.$$

Поэтому $\left|\int_\eta^b f(x, y)dx\right| < \varepsilon$.

Таким образом, условие $\Phi(x, \eta) \underset{Y}{\rightrightarrows} \Phi(y)$ при $\eta \to b - 0$ равносильно выполнению условий определения 2, т. е. равномерной сходимости на множестве Y интеграла (54.1).

Примеры. 1. Рассмотрим интеграл $\Phi(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx$. В качестве множества Y возьмем полуось $y \geqslant 0$ (при любом $y < 0$ этот интеграл расходится). Легко убедиться, что рассматриваемый интеграл сходится на Y. Он даже вычисляется: при $y = 0$ он равен нулю, а при $y > 0$ имеем

$$\int_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dxy = -e^{-xy}\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Для любого $\alpha > 0$ он сходится равномерно на промежутке $[\alpha, +\infty)$. Действительно, в этом случае легко проверяется, например, выполнение условия (54.4)

$$\lim_{\eta \to +\infty} \sup_{y \geqslant \alpha} \left|\int_\eta^{+\infty} ye^{-xy}dx\right| = \lim_{\eta \to +\infty} \sup_{y \geqslant \alpha} e^{-\eta y} = \lim_{\eta \to +\infty} e^{-\alpha\eta} = 0.$$

На всей же полуоси Y равномерной сходимости нет. В самом деле,

$$\lim_{\eta \to +\infty} \sup_{y \geqslant 0} \left| \int_{\eta}^{+\infty} y e^{-xy} dx \right| = \lim_{\eta \to +\infty} \sup_{y \geqslant 0} e^{-\eta y} = 1,$$

т. е. на множестве Y условие (54.4) не выполняется.

2. Рассмотрим более общий пример. Если функция f неотрицательна при $x \geqslant 0$, а интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится, то при $\alpha > 0$ интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(y^\alpha x)\, dx$ не сходится равномерно на полуоси $y > 0$, но при любом $y_0 > 0$ сходится равномерно на полуоси $y \geqslant y_0$.

Действительно, для любого $\eta > 0$ имеем

$$\sup_{y>0} \int_{\eta}^{+\infty} f(y^\alpha x) dx \underset{t = y^\alpha x}{=} \sup_{y>0} \frac{1}{y^\alpha} \int_{y^\alpha \eta}^{+\infty} f(t) dt \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{0<y<1} \frac{1}{y^\alpha} \int_{y^\alpha \eta}^{+\infty} f(t) dt \geqslant \sup_{0<y<1} \frac{1}{y^\alpha} \int_{\eta}^{+\infty} f(t) dt = +\infty,$$

поэтому

$$\lim_{\eta \to +\infty} \sup_{y>0} \int_{\eta}^{+\infty} f(y^\alpha x) dx = +\infty,$$

т. е. условие (54.4) не выполняется, это и означает, что рассматриваемый интеграл не сходится равномерно для $y > 0$.

Если же $y \geqslant y_0 > 0$, то

$$\sup_{y \geqslant y_0} \int_{\eta}^{+\infty} f(y^\alpha x) dx \underset{t = y^\alpha x}{=} \sup_{y \geqslant y_0} \frac{1}{y^\alpha} \int_{y^\alpha \eta}^{+\infty} f(t) dt \leqslant \frac{1}{y_0^\alpha} \int_{y_0^\alpha \eta}^{+\infty} f(t) dt.$$

Так как по условию $\int\limits_0^{+\infty} f(t) dt$ сходится, то $\lim\limits_{\eta \to +\infty} \int\limits_{y_0^\alpha \eta}^{+\infty} f(t)\, dt = 0$, и поэтому из полученного неравенства следует, что

$$\lim_{\eta \to +\infty} \sup_{y \geqslant y_0} \int_{\eta}^{+\infty} f(y^\alpha x) dx = 0,$$

т. е. выполняется условие (54.4), а это и означает равномерную сходимость рассматриваемого интеграла при $y \geqslant y_0$.

В частности, интеграл $\int\limits_{\eta}^{+\infty} e^{-yx^2} dx$ является интегралом указанного вида при $f(t) = e^{-t^2}$ и $\alpha = 1/2$. Поэтому этот интеграл не сходится равномерно для $y > 0$, но при любом $y_0 > 0$ он сходится равномерно на полуоси $y \geqslant y_0$.

З а м е ч а н и е. Отметим, что равномерная сходимость не сохраняется, вообще говоря, при замене переменной, по кото-

рой производится интегрирование, если в формулу замены входит параметр. Так, в примере 2 сходящийся интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt$ сходится равномерно, так как не зависит от параметра, а интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(y^\alpha x)dx$, получающийся из него заменой переменной $t = y^\alpha x$, не сходится равномерно на множестве $y > 0$.

ТЕОРЕМА 1 (признак Вейерштрасса). *Если существует неотрицательная функция* $\varphi(x)$, *определенная на промежутке* $[a, b)$ *и интегрируемая по Риману на каждом отрезке* $[a, \eta]$, *где* $a < \eta < b$, *и такая, что*:

1) $|f(x, y)| \leqslant \varphi(x)$, *где* $a \leqslant x < b$, $y \in Y$;

2) *интеграл* $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ *сходится*,

то интеграл (54.1) *равномерно сходится на множестве* Y.

Доказательство. Прежде всего, в силу признака сравнения (см. п. 33.3), интеграл (54.1) абсолютно, а значит, и просто сходится при любом $y \in Y$. Далее, в силу сходимости интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta_\varepsilon < b$, что если $\eta_\varepsilon < \eta < b$, то $\int\limits_\eta^b \varphi(x)dx < \varepsilon$. Тогда, в силу условия 1 теоремы,

$$\left|\int\limits_\eta^b f(x, y)dx\right| \leqslant \int\limits_\eta^b |f(x, y)|dx \leqslant \int\limits_\eta^b \varphi(x)dx < \varepsilon,\ \eta_\varepsilon < \eta < b,\ y \in Y,$$

а это и означает равномерную сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x, y)dx$ на множестве Y. □

С помощью признака Вейерштрасса, например, сразу устанавливается, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2 + y^2}$ равномерно сходится на всей вещественной оси $-\infty < y < +\infty$. Действительно, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi$ сходится и при любых x и y выполняется неравенство $\frac{1}{1 + x^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{1 + x^2}$.

Из критерия Коши равномерной сходимости функции по параметру (см. п. 39.4) непосредственно получаются необходимые и достаточные условия (также называемые критерием Коши) для равномерной сходимости интегралов.

ТЕОРЕМА 2 (критерий Коши равномерной сходимости интегралов). *Для того чтобы интеграл* (54.1) *равномерно сходился на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\eta < b$, что для всех η' и η'', удовлетворяющих условиям $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$, и всех $y \in Y$ выполнялось неравенство*

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)dx\right| < \varepsilon. \tag{54.6}$$

Действительно, как было отмечено, равномерная сходимость интеграла (54.1) равносильна равномерному стремлению к пределу функции $\Phi(y, \eta)$ (см. (54.5)), а неравенство (54.6) в обозначениях (54.5) можно записать в виде

$$|\Phi(y, \eta'') - \Phi(y, \eta')| < \varepsilon.$$

Поэтому теорема 2 является просто перефразировкой теоремы 4 из п. 39.4 для рассматриваемого здесь случая.

54.2*. Признак равномерной сходимости интегралов

В этом пункте будет доказан признак равномерной сходимости интегралов, аналогичный соответствующему признаку для равномерной сходимости рядов (см. п. 32.3).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ определены для $x \in [a, +\infty)$, $a \in \boldsymbol{R}$ и $y \in Y \subset \boldsymbol{R}$, причем функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной x, а функция $g(x, y)$ имеет непрерывную по x производную. Если*:

1) *функция $g(x, y)$ при каждом $y \in Y$ монотонно убывает по x и равномерно стремится к нулю на множестве Y при $x \to +\infty$;*

2) *интегралы $\int_a^x f(t, y)\,dt$ ограничены в совокупности на множестве $[a, +\infty) \times Y$, то интеграл*

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)\,g(x, y)\,dx \tag{54.7}$$

равномерно сходится на множестве Y.

Доказательство. Из условия 1) теоремы следует, что

$$g(x, y) \geqslant 0 \tag{54.8}$$

и что $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \leqslant 0$, поэтому

$$\left|\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\right| = -\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}. \tag{54.9}$$

Условие 2) теоремы означает, что существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in [a, +\infty)$ и $y \in Y$ выполняется неравенство

$$\left|\int_a^x f(t, y)dt\right| \leqslant c. \qquad (54.10)$$

Интегрируя по частям на отрезке $[a, b]$, получаем

$$\int_a^b f(x, y)g(x, y)dx = \int_a^b g(x, y)d\int_a^x f(t, y)dt =$$

$$= g(b, y)\int_a^b f(t, y)dt - \int_a^b \left(\int_a^x f(t,y)dt\right)\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}dx. \qquad (54.11)$$

Согласно условию (54.10), имеем

$$\left|g(b, y)\int_a^b f(t, y)dt\right| \leqslant cg(b, y)$$

и, следовательно, в силу условия 1) теоремы, первое слагаемое правой части равенства (54.11) равномерно стремится к нулю на множестве Y при $b \to +\infty$.

Для того чтобы оценить поведение второго слагаемого при $b \to +\infty$, докажем, что интеграл $\int_a^{+\infty}\left(\int_a^x f(t, y)dt\right)\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}dx$ абсолютно и равномерно сходится на множестве Y, т. е. равномерно сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty}\left|\int_a^x f(t, y)dt\right|\left|\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\right|dx.$$

Проверим для этого интеграла выполнение критерия Коши равномерной сходимости. Зададим $\varepsilon > 0$. В силу 1) теоремы найдется такое $\xi_0 \geqslant a$, что для всех $\xi > \xi_0$ и всех $y \in Y$ будет выполняться неравенство $g(\xi, y) < \dfrac{\varepsilon}{c}$ и, следовательно, при $\eta > \xi$ неравенство

$$\int_\xi^\eta \left|\int_a^x f(t, y)dt\right|\left|\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\right|dx \underset{\substack{(54.9)\\(54.10)}}{\leqslant} -c\int_\xi^\eta \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}dx =$$

$$= c(g(\xi, y) - g(\eta, y)) \underset{(54.8)}{\leqslant} cg(\xi, y) < \varepsilon.$$

Итак, оба слагаемых правой части неравенства (54.11) при $b \to +\infty$ равномерно стремятся к конечным пределам на множестве Y и, таким образом, интеграл (54.7) равномерно сходится. □

З а м е ч а н и е. Предположение о существовании у функции $g(x, y)$ непрерывной по x производной $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ не является существенным: оно сделано лишь для упрощения доказательства.

П р и м е р. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{1+x^2} dx$ равномерно сходится при $y \geqslant y_0 > 0$. Действительно, функция $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{1+x^2}$ убывает при $x \geqslant 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, причем, поскольку $g(x)$ не зависит от y, стремление $g(x)$ к нулю при $x \to +\infty$ происходит равномерно относительно y; кроме того,

$$\left| \int\limits_0^x \sin ty\, dt \right| = \frac{1 - \cos xy}{y} \leqslant \frac{2}{y_0}.$$

Таким образом, оба условия теоремы 3 выполнены.

Задача 15. Доказать, что если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ определены при $-\infty < a \leqslant x < +\infty$ и $y \in Y$, причем $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y) dx$ равномерно сходится на Y, а функция $g(x, y)$ монотонна по x и ограничена на множестве $[a, +\infty) \times Y$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx$ сходится равномерно на Y.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x, y)$ непрерывны по x, функция $g(x, y)$ монотонно и равномерно относительно $y \in Y$ стремится к нулю при $x \to +\infty$ и имеет непрерывную производную $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$, $x \geqslant a$, $y \in Y$, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится. Доказать, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x) g(x, y) dx$ равномерно сходится на множестве Y.

54.3. Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

При изучении свойств несобственных интегралов, зависящих от параметра, очень часто придется иметь дело с перестановкой предельных переходов по различным переменным. Поэтому прежде всего докажем лемму, относящуюся к этому вопросу.

Л Е М М А 1. *Пусть X и Y — два числовых множества; функция $f(x, y)$ определена на их произведении $X \times Y : x \in X, y \in Y$; x_0 и y_0 — числа или какие-то из бесконечностей ∞, $+\infty$, $-\infty$ и существуют конечные пределы*

$$\varphi(x) = \lim_{y \to y_0} f(x, y), \ \ x \in X, \ \ и \ \ \psi(y) = \lim_{x \to x_0} f(x, y), \ \ y \in Y.$$

Если стремление функции f хотя бы к одному из указанных пределов происходит равномерно, то существуют и равны оба повторных предела:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y).$$

Доказательство. Пусть, например, функция $f(x, y)$ равномерно на X стремится к $\varphi(x)$ при $y \to y_0$. Тогда для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(y_0)$ такая, что, каковы бы ни были $y \in U(y_0) \cap Y$ и $x \in X$, выполняется неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (54.12)$$

Если $y_1 \in U(y_0) \cap Y$ и $y_2 \in U(y) \cap Y$, то

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant |f(x, y_1) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - f(x, y_2)| < \varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу при $x \to x_0$, получим

$$|\psi(y_1) - \psi(y_2)| \leqslant \varepsilon. \qquad (54.13)$$

Согласно критерию Коши для существования предела функции (см. п. 4.11), из (54.13) следует существование конечного предела $\lim\limits_{y \to y_0} \psi(y) = A$. Итак, доказано существование повторного предела

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = A.$$

Зафиксируем теперь $y_1 \in U(y_0) \cap Y$. Тогда из (54.12) при $y = y_1$ и из (54.13) при $y_2 \to y_0$ соответственно получим

$$|f(x, y_1) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\psi(y_1) - A| \leqslant \varepsilon. \qquad (54.14)$$

Для всех $y \in Y$ существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \psi(y)$. Поэтому при фиксированном $y_1 \in U(y_0) \cap Y$ для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $U(x_0)$, что для всех $x \in U(x_0) \cap X$ будем иметь

$$|f(x, y_1) - \psi(y_1)| < \varepsilon. \qquad (54.15)$$

Из неравенств (54.14) и (54.15) для всех $x \in U(x_0) \cap X$ имеем

$$|\varphi(x) - A| \leqslant |\varphi(x) - f(x, y_1)| + |f(x, y_1) - \psi(y_1)| + |\psi(y_1) - A| < 3\varepsilon,$$

что и означает существование повторного предела

$$A = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y)$$

и равенства его повторному пределу

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y). \ \square$$

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ и функция $f(x, y)$ определена для всех $x \in [a, b)$, $y \in Y$ и при любом $y \in Y$ непрерывна по x на $[a, b)$. Тогда если при любом $\eta \in [a, b)$ функция $f(x, y)$*

равномерно на отрезке $[a, \eta]$ *стремится к функции* $\varphi(x)$ *при* $y \to y_0$* *и интеграл*

$$\int_a^b f(x, y)dx \qquad (54.16)$$

равномерно сходится на множестве Y, *то*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)dx = \int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (54.17)$$

Доказательство. Если $a < \eta < b$, то, в силу теоремы 2 п. 53.1, имеем

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^\eta f(x, y)dx = \int_a^\eta \lim_{y \to y_0} f(x, y)dx = \int_a^\eta \varphi(x)dx. \qquad (54.18)$$

Поэтому, согласно определению несобственного интеграла, равенство (54.17) можно переписать в виде

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{\eta \to b - 0} \int_a^\eta f(x, y)dx = \lim_{\eta \to b - 0} \lim_{y \to y_0} \int_a^\eta f(x, y)dx. \qquad (54.19)$$

Таким образом, остается доказать возможность перестановки порядка предельных переходов для функции

$$\Phi(y, \eta) = \int_a^\eta (x, y)dx.$$

Это следует из доказанной выше леммы. В самом деле, согласно (54.18), существует предел $\lim\limits_{y \to y_0} \Phi(y, \eta)$. С другой стороны, существует и предел

$$\lim_{\eta \to b - 0} \Phi(y, \eta) = \lim_{\eta \to b - 0} \int_a^\eta f(x, y)dx = \int_a^b f(x, y)dx,$$

причем здесь, согласно условию теоремы, стремление к пределу происходит равномерно на множестве Y. Следовательно, справедливость равенства (54.19) непосредственно вытекает из утверждения леммы. □

ТЕОРЕМА 5. *Пусть функция* $f(x, y)$ *определена и непрерывна (как функция двух переменных) на полуоткрытом «прямоугольнике»* $\{(x, y) : a \leqslant x < b,\ c < y \leqslant d\}$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $-\infty < c < d < +\infty$. *Тогда, если интеграл*

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

сходится равномерно на $[c, d]$, *то он является непрерывной функцией на этом отрезке.*

* Здесь y_0 — число или одна из бесконечностей ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Доказательство. Каково бы ни было $y_0 \in [c, d]$, функция $f(x, y)$ при $y \to y_0$ равномерно на любом отрезке $[a, \eta]$, $a < \eta < b$, стремится к функции $f(x, y_0)$ (см. (39.4). Поэтому, согласно предыдущей теореме (см. (54.17)),

$$\lim_{y \to y_0} \Phi(y) = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)dx = \int_a^b f(x, y_0)dx = \Phi(y_0). \ \square$$

ТЕОРЕМА 6. *Если выполнены предположения теоремы* 5, *то*

$$\int_c^d \Phi(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy. \qquad (54.20)$$

Доказательство. Если $a < \eta < b$, то по теореме 3 п. 53.1 имеем

$$\int_c^d dy \int_a^\eta f(x, y)dx = \int_a^\eta dx \int_c^d f(x, y)dy. \qquad (54.21)$$

Функция $\Phi(y, \eta) = \int_a^\eta f(x, y)dx$ непрерывна по y и при $\eta \to b - 0$ стремится к своему пределу $\Phi(y)$ равномерно на отрезке $[c, d]$. Поэтому, согласно теореме 2 п. 53.1, в левой части равенства (54.21) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\eta \to b - 0$:

$$\lim_{\eta \to b - 0} \int_c^d dy \int_a^\eta f(x, y)dx = \lim_{\eta \to b - 0} \int_c^d \Phi(y, \eta)dy =$$

$$= \int_c^d \lim_{\eta \to b - 0} \Phi(y, \eta)dy = \int_c^d \Phi(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx;$$

при этом полученный предел конечен. Следовательно, при $\eta \to b - 0$ существует тот же предел и у правой части равенства (54.21), который, в силу определения несобственного интеграла, равен $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$. $\square$

Докажем одну теорему о перестановке порядка интегрирования для случая, когда оба интеграла несобственные.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на полуоткрытом прямоугольнике*

$$\{(x, y) : a \leqslant x < b, c < y < d\},$$

$$-\infty < a < b \leqslant +\infty, \quad -\infty < c < d \leqslant +\infty.$$

Если интеграл

$$\int_a^b f(x, y)dx \qquad (54.22)$$

равномерно сходится на любом отрезке $[c, \eta]$, $c < \eta < d$, *а интеграл*

$$\int_c^d f(x, y)dy \tag{54.23}$$

равномерно сходится на любом отрезке $[a, \xi]$, $a < \xi < b$, *и существует один из двух повторных интегралов*

$$\int_c^d dy \int_a^b |f(x, y)|dx, \quad \int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)|dy,$$

то существуют и равны между собой оба повторных интеграла

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx \quad \text{и} \quad \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy,$$

т. е.

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy. \tag{54.24}$$

Доказательство. Пусть, например, существует интеграл

$$\int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)|dy \tag{54.25}$$

и пусть $c < \eta < d$. В силу равномерной сходимости на отрезке $[c, \eta]$ интеграла (54.22), согласно теореме 6, имеем

$$\int_c^\eta dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y)dy. \tag{54.26}$$

Предел левой части этого равенства при $\eta \to d - 0$, очевидно, равен интегралу $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx$. Покажем, что предел правой части равенства (54.26) равен интегралу $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$, т. е. что в этом случае возможен предельный переход при $\eta \to d - 0$ под знаком интеграла. Проверим выполнение предпосылок теоремы 4 этого пункта. Функция $\Phi(x, \eta) = \int_c^\eta f(x, y)dy$ непрерывна по x (см. теорему 1 п. 53.1) и, согласно условию теоремы, на любом отрезке $[a, \xi]$, $a < \xi < b$, при $\eta \to d - 0$ равномерно стремится к интегралу (54.23), т. е. к функции $F(x) = \int_c^d f(x, y)dy$. Наконец, интеграл

$$\int_a^b \Phi(x, \eta)dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y)dy$$

сходится равномерно относительно η, $c < \eta < d$, так как

$$|\Phi(x, \eta)| \leqslant \int_c^d |f(x, y)| dy,$$

а интеграл (54.25), по предположению, сходится.

Следовательно, условия теоремы 4 для правой части равенства (54.26) выполнены, поэтому

$$\lim_{\eta \to d-0} \int_a^b \Phi(x, \eta) dx = \int_a^b \lim_{\eta \to d-0} \Phi(x, \eta) dx = \int_a^b dx \int_c^d \Phi(x, y) dy.$$

Итак, доказываемое равенство (54.24) получается из (54.26) предельным переходом при $\eta \to d - 0$. □

Перейдем теперь к рассмотрению дифференцируемости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть функции* $f(x, y)$ *и* $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ *определены и непрерывны на полуоткрытом прямоугольнике*

$$\Delta = \{a \leqslant x < b,\ c \leqslant y \leqslant d\},$$

$$-\infty < a < b \leqslant +\infty,\ -\infty < c < d < +\infty.$$

Если интеграл $\int_a^b f(x, y) dx$ *сходится, а интеграл* $\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$ *равномерно сходится на отрезке* $[c, d]$, *то функция* $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ *непрерывно дифференцируема на этом отрезке и*

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

Доказательство. Представим функцию $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ в виде сходящегося на отрезке $[c, d]$ ряда

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} f(x, y) dx, \qquad (54.27)$$

где η_n, $n = 1, 2, \ldots$, — фиксированная последовательность такая, что $\eta_n \in [a, b)$, $\eta_1 = a$ и $\lim_{n \to \infty} \eta_n = b$, а функцию $\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$ — в виде равномерно сходящегося на отрезке $[c, d]$ ряда

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx. \qquad (54.28)$$

Согласно теореме 4 п. 53.2, каждый член ряда (54.28) является производной по переменной y от соответствующего члена ряда (54.27), а поэтому, в силу теоремы о дифференцировании рядов (см. п. 32.4), сумма ряда (54.28) является производной суммы ряда (54.27). □

Как уже отмечалось, все предыдущие формулировки и доказательства относятся к несобственным интегралам, зависящим от параметра, которые удовлетворяют условиям 1) и 2), сформулированным в начале п. 54.1. Совершенно аналогично рассматриваются и другие случаи, например когда:

1′) $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$;

2′) при любом $y \in Y$ функция $f(x, y)$ на переменной x интегрируема по Риману на каждом отрезке $[\xi, \eta]$, где $a < \xi < \eta < b$.

Построенная теория интегралов, зависящих от параметра, естественным образом переносится и на случай, когда интеграл зависит от двух или вообще от некоторого конечного числа параметров $y_1, \dots, y_n$. При этом многие формулировки определений и теорем, а также доказательства формально остаются прежними, если только вкладывать новый смысл в применяемые обозначения. Это относится, например, к определению равномерной сходимости и теореме о предельном переходе под знаком интеграла, следует только считать, что $y = (y_1, \dots, y_n)$ — конечная точка n-мерного евклидова пространства, y_0 — конечная или бесконечно удаленная точка того же пространства, а $y \to y_0$ понимать в смысле предела в этом пространстве.

54.4. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению определенных интегралов

До сих пор в нашем распоряжении было два способа вычисления определенных интегралов. Первый из них исходит из определения интеграла как предела интегральных сумм и широко используется в численных методах (с ними мы более подробно ознакомимся в п. 62.4). Второй способ, которым мы уже постоянно пользовались, основан на нахождении первообразной подынтегральной функции и применении формулы Ньютона—Лейбница. Оказывается, что иногда удается получать точные значения определенных интегралов, используя теорию интегралов, зависящих от параметра. При этом ценность этого метода состоит в том, что с его помощью в ряде случаев вычисляются интегралы от функций, первообразные которых

не являются элементарными функциями, и тем самым обычный способ использования формулы Ньютона—Лейбница оказывается неприменимым.

Примеры. 1. Пусть требуется вычислить интеграл

$$J = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}dx. \tag{54.29}$$

Приведем способы вычисления этого интеграла, основанные на его замене некоторым интегралом, зависящим от параметра, для которого (54.29) является частным значением.

Рассмотрим функцию $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}$ и интеграл

$$J(y) = \int_0^1 f(x, y)dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}dx. \tag{54.30}$$

Очевидно, что интеграл (54.29) получается отсюда при $y = 1$. Так как $\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} = O(1)$при $x \to 0$ и $\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ при $x \to 1$ и любом фиксированном y, то интеграл (54.30) сходится при любом y.

Из неравенства $\left|\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| = \left|\dfrac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и сходимости интеграла $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ следует, что интеграл

$$\int_0^1 \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dx \tag{54.31}$$

равномерно сходится на всей вещественной оси и, согласно теореме 8 п. 54.3, равен $J'(y)$.

Выполнив последовательно замены переменного интегрирования $x = \cos\varphi$ и $\varphi = \operatorname{arctg} t$, получим

$$J'(y) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{1+y^2\cos^2\varphi} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+y^2+t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{1+y^2}}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.$$

Отсюда, согласно определению неопределенного интеграла, вытекает, что

$$J(y) = \int J'(y)dy = \frac{\pi}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2}\ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) + C.$$

Но из (54.30) следует, что $J(0) = 0$, поэтому $C = 0$ и

$$J(y) = \frac{\pi}{2} \ln \left(y + \sqrt{1 + y^2}\right).$$

Подставляя сюда $y = 1$, получаем значение искомого интеграла (54.29) $J = J(1) = \frac{\pi}{2}\ln (1 + \sqrt{2})$.

Интеграл (54.29) можно вычислить и используя интегрирование по параметру. Заметив, что $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int\limits_0^1 \frac{dy}{1 + x^2y^2}$, получим для J выражение

$$J = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \int\limits_0^1 \frac{dy}{1 + x^2y^2}. \qquad (54.32)$$

Интеграл же $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2y^2)\sqrt{1 - x^2}}$ сходится равномерно по y, так как $\frac{1}{(1 + x^2y^2)\sqrt{1 - x^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, а интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ сходится. Поэтому в (54.32) можно переменить порядок интегрирования (см. теорему 6 п. 54.3). Тогда (используя непосредственно найденное выше значение получающегося интеграла по x) находим

$$J = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2y^2)\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \frac{\pi}{2}\ln (1 + \sqrt{2}).$$

2. Вычислим значение интеграла

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx. \qquad (54.33)$$

Можно показать, что соответствующий неопределенный интеграл при $\alpha \neq 0$ не выражается через элементарные функции, и тем самым данный интеграл нельзя вычислить обычным приемом с помощью формулы Ньютона—Лейбница.

Интеграл (54.33) сходится при всех значениях α. Действительно, если $\alpha = 0$, то, очевидно, $I(0) = 0$. Если же $\alpha \neq 0$, то, производя замену переменного $t = \alpha x$ при $\alpha > 0$ и $t = -\alpha x$ при $\alpha < 0$, получим

$$I(\alpha) = \begin{cases} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = I(1), & \text{если } \alpha > 0, \\ -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -I(1), & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$$

Интеграл же $I(1)$ сходится (см. т. 1, п. 29.5), поэтому и интеграл $I(\alpha)$ сходится.

Для того чтобы вычислить интеграл (54.33), рассмотрим более общий интеграл $I(\alpha,\ \beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\sin \alpha x}{x}dx$, сходящийся при $\beta \geqslant 0$.

Продифференцировав формально по α под знаком интеграла, получим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x dx$, который при любом фиксированном $\beta > 0$ равномерно сходится относительно параметра α, $-\infty < \alpha < +\infty$. Следовательно, при $\beta > 0$ (см. т. 1, п. 22.4)

$$\frac{\partial I(\alpha,\ \beta)}{\partial \alpha} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x\, dx = \frac{e^{-\beta x}(\alpha \sin \alpha x - \beta \cos \alpha x)}{\alpha^2 + \beta^2}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

откуда

$$I(\alpha,\ \beta) = \int\limits_0^{\alpha} \frac{\beta dt}{t^2 + \beta^2} + C(\beta) = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} + C(\beta).$$

Но $I(0,\ \beta) = 0$, следовательно, $C(\beta) = 0$. Итак,

$$I(\alpha,\ \beta) = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}, \quad \beta > 0.$$

Нас, однако, интересует значение интеграла $I(\alpha,\ \beta)$ при $\beta = 0$. Проще всего попытаться обосновать возможность предельного перехода под знаком интеграла $I(\alpha,\ \beta)$, при $\beta \to +0$. Зафиксируем число $b > 0$ и покажем, что интеграл $I(\alpha,\ \beta)$ при любом фиксированном $\alpha \neq 0$ равномерно сходится по параметру β на отрезке $[0,\ b]$. Действительно, интегрируя по частям (см. там же, п. 22.4), получим

$$\int\limits_{\eta}^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\sin \alpha x}{x}dx =$$

$$= -\frac{1}{x}e^{-\beta x}\ \frac{\alpha \cos \alpha x + \beta \sin \alpha x}{\alpha^2 + \beta^2}\Bigg|_{\eta}^{+\infty} - \int\limits_{\eta}^{+\infty} e^{-\beta x}\ \frac{\alpha \cos \alpha x + \beta \sin \alpha x}{\alpha^2 + \beta^2}\ \frac{dx}{x^2}.$$

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Выберем η_ε так, чтобы при $\eta > \eta_\varepsilon$ выполнялись неравенства

$$\left|\frac{\alpha \cos \alpha \eta + \beta \sin \alpha \eta}{\alpha^2 + \beta^2}\,\frac{1}{\eta}\,e^{-\eta\beta}\right| \leqslant \frac{|\alpha| + b}{\alpha^2}\ \frac{1}{\eta} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\int\limits_{\eta}^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\alpha \cos \alpha x + \beta \sin \alpha x}{\alpha^2 + \beta^2}\ \frac{dx}{x^2}\right| \leqslant \frac{|\alpha| + b}{\alpha^2}\int\limits_{\eta}^{+\infty}\frac{dx}{x^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $\eta > \eta_\varepsilon$ получим $\left|\int\limits_{\eta}^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\sin \alpha x}{x}dx\right| < \varepsilon$, что и доказывает равномерную сходимость интеграла $I(\alpha,\ \beta)$ по параметру β на любом отрезке $[0,\ b]$. Теперь, в силу теоремы 4 п. 54.3,

$$I(\alpha) = I(\alpha,\ 0) = \lim_{\beta \to 0} I(\alpha,\ \beta) = \lim_{\beta \to +0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} \alpha;$$

итак,

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = \begin{cases} \pi/2, & \text{если } \alpha > 0, \\ 0, & \text{если } \alpha = 0, \\ -\pi/2, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$$

Следует обратить внимание на то, что дифференцирование по α в (54.33) привело бы к расходящемуся интегралу $\int\limits_0^{\infty} \cos\alpha x dx$. Оно стало возможным в $I(\alpha, \beta)$, благодаря наличию множителя $e^{-\beta x}$, $\beta > 0$, называемого *множителем сходимости*. Вычисление интеграла вида $\int\limits_0^{\infty} f(x)dx$ путем перехода к $\int\limits_0^{\infty} e^{-\beta x} f(x)dx$, дифференцирования по β, нахождения полученного интеграла и перехода к пределу при $\beta \to 0$ называется *методом введения множителя сходимости*.

Знание значения $I(\alpha)$ позволяет легко находить и значение многих подобных интегралов. Например, легко можно показать (и это мы используем в дальнейшем), что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos\alpha x}{x^2} dx = |\alpha|\pi. \tag{54.34}$$

Действительно, интегрируя по частям, найдем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos\alpha x}{x^2} dx = \alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x} dx = 2\alpha \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x} dx = |\alpha|\pi.$$

54.5. Эйлеровы интегралы

Рассмотрим интегралы

$$\mathrm{B}(p, q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1 - x)^{q-1} dx, \tag{54.35}$$

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \tag{54.36}$$

называемые *эйлеровыми интегралами* соответственно *первого* и *второго рода*. Интеграл (54.35) называется также *бета-функцией*, а (54.36) — *гамма-функцией*.

Выясним прежде всего, для каких значений параметров p, q и s имеют смысл правые части формул (54.35) и (54.36). Рассмотрим сначала интеграл (54.35). Подынтегральная функция имеет, вообще говоря, две особенности: при $x = 0$ и при $x = 1$, поэтому представим его в виде

$$\mathrm{B}(p, q) = \int\limits_0^{1/2} x^{p-1}(1 - x)^{q-1} dx + \int\limits_{1/2}^1 x^{p-1}(1 - x)^{q-1} dx.$$

Сравнивая первый интеграл в правой части с интегралом $\int\limits_0^{1/2} x^{p-1}dx$, а второй — с $\int\limits_{1/2}^{1} (1-x)^{q-1}dx$, которые сходятся соответственно при $p > 0$ и $q > 0$ и соответственно расходятся при выполнении неравенств $p \leqslant 0$ и $q \leqslant 0$ (см. п. 29.3), получим, что областью определения бета-функции (54.35) в плоскости p, q является прямой угол $p > 0$, $q > 0$. Далее, интеграл $B(p, q)$ равномерно сходится в каждом прямом угле $p \geqslant p_0$, $q \geqslant q_0$, каковы бы ни были $p_0 > 0$ и $q_0 > 0$. Действительно, это следует, согласно признаку Вейерштрасса (см. п. 54.1), из неравенства

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leqslant x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

и доказанной выше сходимости интеграла

$$\mathrm{B}(p_0, q_0) = \int\limits_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}dx, \quad p_0 > 0,\ q_0 > 0.$$

Поскольку всякая точка (p, q), $p > 0$, $q > 0$, принадлежит некоторому углу: $p > p_0$, $q > q_0$, при соответствующем выборе чисел $p_0 > 0$ и $q_0 > 0$, в силу теоремы 5 п. 54.3, функция $\mathrm{B}(p, q)$ непрерывна по всей своей области определения.

Для отыскания области определения гамма-функции (54.36) представим ее в виде

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^1 x^{s-1} e^{-x}dx + \int\limits_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}dx. \qquad (54.37)$$

Сравнивая первое слагаемое в правой части равенства с интегралом $\int\limits_0^1 x^{s-1}dx$, который сходится при $s > 0$ и расходится при $s \leqslant 0$, получим, что $\int\limits_0^1 x^{s-1} e^{-x}dx$ сходится и расходится при тех же значениях параметра s. Что же касается второго интеграла в правой части равенства (54.37), то он сходится при всех значениях s. Это, например, следует из справедливости при любом s асимптотического равенства $x^{s-1} e^{-x} = o(e^{-x/2})$ для $x \to +\infty$ и из сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x/2}dx = 2e^{-1/2}$. Таким образом, интеграл (54.36) сходится для всех $s > 0$ и расходится при $s \leqslant 0$.

Покажем теперь, что интеграл (54.36) равномерно сходится на всяком отрезке $[s_1, s_2]$, где $0 < s_1 < s_2 < +\infty$. Действительно, пусть $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$, тогда если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$x^{s-1}e^{-x} \leqslant x^{s_1-1}e^{-x},$$

а если $x \geqslant 1$, то

$$x^{s-1}e^{-x} \leqslant x^{s_2-1}e^{-x},$$

и так как интегралы $\int\limits_0^1 x^{s_2-1}e^{-x}dx$ и $\int\limits_1^{+\infty} x^{s_1-1}e^{-x}dx$ сходятся, то из формулы (54.37), в силу признака Вейерштрасса равномерной сходимости интегралов (см. п. 54.1), вытекает равномерная сходимость интеграла $\Gamma(s)$ на отрезке $[s_1, s_2]$. Отсюда, в силу теоремы 5 п. 54.3, следует, что функция $\Gamma(s)$ непрерывна во всей своей области определения.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Доказать, что функции $\mathrm{B}(p, q)$ и $\Gamma(s)$ бесконечно дифференцируемы.

Задача 16. Доказать, что $\mathrm{B}(p, q)$ и $\Gamma(s)$ являются аналитическими функциями.

Установим некоторые свойства интегралов $\Gamma(s)$ и $\mathrm{B}(p, q)$. Прежде всего из формулы (54.36) непосредственно получаем

$$\Gamma(s) > 0 \;\; (s > 0), \tag{54.38}$$

в частности, гамма-функция не имеет нулей. Далее, проинтегрировав по частям, получим

$$\Gamma(s+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^s e^{-x}dx = -x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + s\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx = s\Gamma(s). \tag{54.39}$$

Таким образом, если $s > n$ ($n = 1, 2, \ldots$), то

$$\Gamma(s) = (s-1)(s-2)\ldots(s-n)\,\Gamma(s-n). \tag{54.40}$$

При любом $s > 0$ можно выбрать целое неотрицательное число n так, чтобы $0 < s - n \leqslant 1$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), и тогда $\Gamma(s)$ с помощью формулы (54.40) будет выражаться через значение гамма-функции в некоторой точке промежутка $(0, 1]$. Иначе говоря, зная значения гамма-функции на промежутке $(0, 1]$, можно найти ее значение в любой точке.

Заметим еще, что $\Gamma(1) = 1$, и, следовательно, в силу формулы (54.40), $\Gamma(n + 1) = n!$. Отсюда видно, что гамма-функция $\Gamma(s + 1)$ является продолжением функции $s!$, определенной только для целых $s = 0, 1, 2, \ldots$, на всю полуось $s > -1$ действительных чисел.

Из свойств бета-функции $\mathrm{B}(p, q)$ докажем следующие.

1^0. *Для любых $p > 0$ и $q > 0$*

$$\mathrm{B}(p, q) = \mathrm{B}(q, p). \tag{54.41}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно в интеграле (54.35) выполнить замену переменного $t = 1 - x$.

2^0. *Для любых $p > 0$ и $q > 1$*

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p, q-1). \qquad (54.42)$$

Аналогично, в силу симметрии (см. (54.41)), для любых $q > 0$ и $p > 1$

$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1, q). \qquad (54.43)$$

Действительно, проинтегрировав по частям (54.35) и заметив, что $x^p(1-x)^{q-2} = x^{p-1}(1-x)^{q-2} - x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, получим

$$B(p, q) = \int_0^1 (1-x)^{q-1}\, d\frac{x^p}{p} = \frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p}\Big|_0^1 + \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx =$$

$$= \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}\,dx - \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx =$$

$$= \frac{q-1}{p}B(p, q-1) - \frac{q-1}{p}B(p, q),$$

откуда следует (54.42), а в силу симметрии, и (54.43).

3^0. *Для любых $p > 0$*

$$B\,(p, n) = B(n, p) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}{p(p+1) \ldots (p+n-1)}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Эта формула получается последовательным применением соотношения (54.42), если только заметить, что $B(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1}dx = \frac{1}{p}$. Если же и $p = m$ — натуральное число, то $B(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$.

Между функциями $B(p, q)$ и $\Gamma(s)$ существует связь, которая устанавливается формулой Эйлера

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p > 0, \quad q > 0. \qquad (54.44)$$

Докажем ее, следуя методу Дирихле. Сделаем в формуле (54.36) замену переменного $x = (1 + t)y$, $t > 0$:

$$\frac{\Gamma(s)}{(1+t)^s} = \int_0^{+\infty} y^{s-1}\, e^{-(1+t)y}dy$$

и положим $s = p + q$, $p > 0$, $q > 0$; тогда

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^{+\infty} y^{p+q-1}\, e^{-(1+t)y}dy.$$

Умножим обе части этого равенства на t^{p-1} и проинтегрируем по t от 0 до $+\infty$:

$$\Gamma(p+q)\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt = \int_0^{+\infty}t^{p-1}dt\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dy. \qquad (54.45)$$

В интервале, стоящем в левой части этого равенства, выполним замену переменного $t = \dfrac{x}{1-x}$:

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \mathrm{B}(p, q). \qquad (54.46)$$

Для вычисления правой части равенства заметим, что

$$\int_0^{+\infty}t^{p-1}\,dt\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}\,e^{-(1+t)y}dy =$$
$$= \lim_{\xi\to+0}\int_0^{+\infty}t^{p-1}dt\int_\xi^{+\infty}y^{p+q-1}\,e^{-(1+t)y}dy. \qquad (54.47)$$

Действительно, обозначая $\Phi(t, \xi) = \int_\xi^{+\infty}y^{p+q-1}\,e^{-(1+t)y}dy$, из оценок

$$0 \leqslant \Phi(t, 0) - \Phi(t, \xi) \leqslant \int_0^\xi y^{p+q-1}\,e^{-y}dy,$$

$$\int_0^{+\infty}t^{p-1}\,\Phi(t, \xi)dt \leqslant \int_0^{+\infty}t^{p-1}\,\Phi(t, 0)dt$$

заключаем, что при $\xi \to +0$ функция $\Phi(t, \xi)$ стремится к $\Phi(t, 0)$ равномерно относительно $t\in(0, +\infty)$ и что интеграл $\int_0^{+\infty}t^{p-1}\,\Phi(t, \xi)dt$ равномерно сходится относительно ξ, так как сходится интеграл (54.45). Следовательно, в правой части (54.47) можно перейти к пределу под знаком внешнего интеграла. Далее,

$$\int_0^{+\infty}t^{p-1}\,dt\int_\xi^{+\infty}y^{p+q-1}\,e^{-(1+t)y}dy =$$
$$= \int_\xi^{+\infty}y^{p+q-1}\,e^{-y}dy\int_0^{+\infty}t^{p-1}\,e^{-ty}dt, \quad \xi > 0,\ p \geqslant 1,\ q \geqslant 1. \qquad (54.48)$$

Перестановка порядка интегрирования здесь возможна в силу того, что, во-первых, интеграл $t^{p-1}\int_\xi^{+\infty}y^{p+q-1}\,e^{-(1+t)y}dy$ равномерно сходится по t на любом отрезке $[0, a]$, что следует из равномерной оценки подынтегральной функции

$$t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y} \leqslant a^{p-1}y^{p+q-1}e^{-y}, \quad 0 \leqslant t \leqslant a,$$

и сходимости интеграла $\int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}dy$, во-вторых, интеграл $y^{p+q-1}e^{-y}\int\limits_{0}^{+\infty} t^{p-1}e^{-ty}dt$ равномерно сходится по y на любом отрезке $[\xi, b]$, $\xi > 0$, что следует из равномерной оценки подынтегральной функции $y^{p+q-1}e^{-y}\,t^{p-1}e^{-ty} \leqslant b^{p+q-1}t^{p-1}e^{-\xi t}$ и сходимости интеграла $\int\limits_{0}^{+\infty} t^{p-1}e^{-\xi t}dt$; в-третьих, интеграл, стоящий в правой части равенства (54.48), существует. Таким образом, законность перестановки порядка интегрирования в (54.48) следует из теоремы 7 п. 54.3 (отметим, что здесь подынтегральная функция неотрицательна).

Выполнив замену переменного $ty = u$, получим

$$\int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}dy\int\limits_{0}^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}dt = \Gamma(p)\int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}dy. \quad (54.49)$$

Наконец,

$$\lim_{\xi \to +0}\int\limits_{\xi}^{+\infty} y^{q-1}e^{-y} = \Gamma(q). \quad (54.50)$$

Из (54.45) — (54.50) получаем формулу (54.44) для $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$.

Если теперь $p > 0$ и $q > 0$, то, по доказанному,

$$\mathrm{B}\,(p+1, q+1) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}.$$

Применяя соотношения (54.39), (54.42) и (54.43), получим формулу (54.44) в предположении $p > 0$, $q > 0$. □

54.6. Комплекснозначные функции действительного аргумента

Мы будем в дальнейшем систематически рассматривать комплекснозначные функции $w(t) = u(t) + iv(t)$ действительного аргумента t (функции $u(t)$ и $v(t)$ принимают действительные значения). Мы уже встречались с понятием предела и непрерывности подобных функций. Производная функции $w(t)$ определяется по формуле

$$w'(t) \overset{\text{def}}{=} u'(t) + iv'(t).$$

Покажем, например, что, согласно этому правилу, $(e^{i\alpha t})' = i\alpha\, e^{i\alpha t}$. Действительно,

$$(e^{i\alpha t})' = (\cos \alpha t + i \sin \alpha t)' = -\alpha \sin \alpha t + i\alpha \cos \alpha t =$$
$$= i\alpha\,(\cos \alpha t + i \sin \alpha t) = i\alpha e^{i\alpha t}.$$

Исходя из определения производной w', легко доказывается и правило дифференцирования сложной функции: если $t = t(\tau)$ — дифференцируемая функция действительного аргумента τ, то $w'_\tau = w'_i t'_\tau$.

Аналогично определяется и интеграл (собственный или несобственный) от функции $w = u + iv$:

$$\int_a^b w(t)dt \overset{\text{def}}{=} \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt, \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty.$$

Интеграл $\int_a^b (u(t) + iv(t))dt$ называется *несобственным*, если хотя бы один из интегралов $\int_a^b u(t)dt$ и $\int_a^b v(t)dt$ несобственный. При этом несобственный интеграл $\int_a^b (u(t) + iv(t))dt$ называется *сходящимся*, если сходятся оба интеграла $\int_a^b u(t)dt$ и $\int_a^b v(t)dt$. В этом случае

$$\int_a^b (u(t) + iv(t))dt \overset{\text{def}}{=} \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt.$$

При этом функция w называется *абсолютно интегрируемой,* если абсолютно интегрируемы обе функции u и v. Это равносильно тому, что абсолютно интегрируема абсолютная величина $|w|$ самой функции w*, что сразу следует (в силу признака сравнения для сходимости интегралов), из неравенств $|u| \leqslant \sqrt{u^2 + v^2} = |w|$, $|v| \leqslant \sqrt{u^2 + v^2} = |w|$, $|w| = \sqrt{u^2 + v^2} \leqslant |u| + |v|$ (последнее неравенство получается возведением в квадрат обеих его частей).

Очевидно, что ряд свойств интегралов от действительных функций (линейность интеграла, аддитивность его по множествам и т. п.) автоматически переносится и на комплекснозначные функции. Отметим, например, что если $w(t) = u(t) + iv(t)$, где $u(t)$ и $v(t)$ — интегрируемые по Риману на отрезке $[a, b]$ действительные функции, то интеграл $\int_a^b w(t)dt$ также является пределом интегральных сумм $\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} w(\xi_i)\, \Delta t_i$,

---

* Здесь и везде предполагается выполнение условий, при которых имеют смысл несобственные интегралы от функций u и v (см. т. 1, п. 29.1).

$\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $t_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant t_i$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$:

$$\int_a^b w(t)dt = \lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau,$$

где $|\tau|$ — мелкость разбиения τ. Отсюда, как и для действительных функций, следует, что в этом случае функция $|w(x)|$ также интегрируема по Риману и что выполняется неравенство

$$\left|\int_a^b w(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |w(t)|dt.$$

Предельным переходом справедливость этого неравенства устанавливается и для абсолютно интегрируемых в несобственном смысле комплекснозначных функций.

Из того, что формула Ньютона—Лейбница, формула замены переменной в интеграле и формула интегрирования по частям справедливы для действительной и мнимой частей комплекснозначной функции действительного аргумента, следует, что эти формулы имеют место и для самой этой функции.

Вместе с тем в случае функций, принимающих комплексные значения, следует быть осторожным при использовании аналогов теорем, доказанных для действительных функций. Далеко не все утверждения, справедливые для функций действительного аргумента, принимающих только действительные значения, переносятся на комплекснозначные функции. С подобной ситуацией мы уже встречались при изучении векторных функций (см. п. 15.2 и п. 33.9*). Например, утверждения, подобные теореме Ролля, а следовательно, и теореме Лагранжа о средних значениях, не имеют места для комплекснозначных функций. Это показывает пример, приведенный в п. 15.2, если его записать в терминах комплексных чисел.

Именно: рассмотрим функцию $f(t) = \cos t + i\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$; тогда $f(0) = f(2\pi) = 1$, $f'(t) = -\sin t + i\cos t$. Так как $|f'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$, то не существует такой точки $\xi \in [0, 2\pi]$, что $f'(\xi) = 0$. Следовательно, аналог теоремы Ролля в этом случае не имеет места.

Неверным оказывается и правило Лопиталя, доказательство которого было основано на теоремах о среднем. Подтвердим это примером*.

---

* Этот пример заимствован из книги: *Рудин У.* Основы математического анализа. — М., 1966.

Пусть $f(t) = t$, $g(t) = t + t^2 e^{i/t^2}$, $0 < t < 1$. Поскольку, согласно формуле Эйлера, $e^{i/t^2} = \cos\frac{1}{t^2} + i\sin\frac{1}{t^2}$, то

$$|e^{i/t^2}| = \sqrt{\cos^2\frac{1}{t^2} + \sin^2\frac{1}{t^2}} = 1.$$

Поэтому $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{t\to 0} g(t) = 0$ и

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to 0}(1 + te^{i/t^2})^{-1} = 1. \qquad (54.51)$$

Заметив, что

$$g'(t) = 1 + \left(2t - \frac{2i}{t}\right)e^{i/t^2},$$

получим

$$|g'(t)| \geqslant \left|2\left(\frac{i}{t} - t\right)e^{1/t^2} - 1\right| \geqslant 2\left|\frac{i}{t} - t\right| - 1 =$$

$$= \frac{2\sqrt{1+t^4}}{t} - 1 \geqslant \frac{2}{t} - 1 = \frac{2-t}{t}.$$

Следовательно, $\left|\frac{f'(t)}{g'(t)}\right| = \frac{1}{|g'(t)|} \leqslant \frac{t}{2-t}$, вследствие чего

$$\lim_{t\to 0}\frac{f'(t)}{g'(t)} = 0. \qquad (54.52)$$

Сравнивая (54.51) и (54.52), убеждаемся, что в данном случае правило Лопиталя не применимо.

54.7* Асимптотическое поведение гамма-функции

Покажем, что асимптотическое поведение гамма-функции

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^s dx, \quad s > -1, \qquad (54.53)$$

при больших значениях независимой переменной s может быть описано довольно простой формулой, содержащей только элементарные функции.

Подынтегральная функция в интеграле (54.53) принимает, как легко видеть, наибольшее значение при $x = s$. Выполним в этом интеграле замену переменной интегрирования, перенеся точку $x = s$ в новое начало координат: $x = s + y$, а затем произведя преобразование подобия с коэффициентом, равным s: $y = st$, т. е. положим $x = s(1 + t)$. Получим

$$\Gamma(s+1) = e^{-s}s^{s+1}\int_{-1}^{+\infty}(e^{-t}(1+t))^s dt. \qquad (54.54)$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) \overset{\text{def}}{=} e^{-t}(1+t), \quad -\infty < t < +\infty. \qquad (54.55)$$

Поскольку $\varphi'(t) = -te^{-t}$, то при $t > 0$ функция φ убывает, при $t < 0$ — возрастает, а в точке $t = 0$ достигает наибольшего значения $\varphi(0) = 1$. Далее, положив

$$h(t) \stackrel{\text{def}}{=} -t + \ln(1 + t), \quad -1 < t < +\infty, \tag{54.56}$$

получим

$$\varphi(t) = e^{h(t)}, \quad -1 < t < +\infty, \tag{54.57}$$

где при $|t| < 1$

$$h(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots$$

и поэтому

$$h(t) = -\frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad t \to 0. \tag{54.58}$$

Итак, гамма-функция представима в виде (см. (54.54), (54.55) и (54.57))

$$\Gamma(s + 1) = e^{-s}\, s^{s+1} \int e^{sh(t)}\, dt, \tag{54.59}$$

где поведение функции $\int\limits_{-1}^{+\infty} h(t)$ при $t \to 0$ описывается соотношением (54.58).

Прежде чем переходить к выводу асимптотической формулы для $\Gamma(s + 1)$ при $s \to +\infty$, поясним метод ее получения с помощью нестрогих, но правдоподобных рассуждений. График функции $\varphi(t)$ имеет вид, изображенный на рис. 106. При возрастании параметра s график функции $[\varphi(t)]^s$ будет «прижиматься» к оси переменной t и к единичному отрезку оси ординат. Поэтому ясно, что интеграл

$$\int\limits_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)} dt, \tag{54.60}$$

стоящий в правой части формулы (54.59), при больших значениях s будет хорошо приближаться интегралом

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{sh(t)}\, dt, \tag{54.61}$$

(где $\delta > 0$ произвольно, но фиксировано), причем с тем большей точностью, чем больше значение параметра s. Иными словами, если s достаточно велико, то как при $-1 < t < -\delta$, так и при $t > \delta$ значения функции $e^{sh(t)}$ столь малы, что каждым из интегралов $\int\limits_{-1}^{\delta} e^{sh(t)}\, dt$ и $\int\limits_{\delta}^{\infty} e^{sh(t)}\, dt$ можно с высокой точностью пренебречь. Естественно ожидать, что при фиксированном $\delta > 0$ и отно-

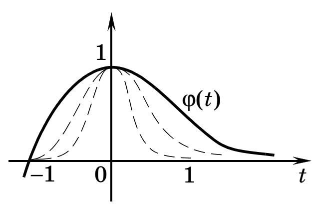


Рис. 106

сительная погрешность приближения интеграла (54.60) с помощью интегралов вида (54.61) может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора достаточно большого значения параметра s.

В силу (54.58), взяв достаточно малое $\delta > 0$, можно интеграл (54.61) хорошо приблизить интегралом

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-st^2/2}dt = \sqrt{\frac{2}{s}} \int_{-\delta\sqrt{s/2}}^{\delta\sqrt{s/2}} e^{-u^2}du. \qquad (54.62)$$

Если $\delta > 0$, то интеграл В правой части этого равенства при $s \to +\infty$ стремится к интегралу Пуассона (см. п. 48.2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}. \qquad (54.63)$$

В результате интеграл (54.60) при больших значениях s оказывается в каком-то смысле хорошо приближенным выражением $\sqrt{(2\pi)/s}$ (см. (54.62) и (54.63)). Поэтому естественно попытаться доказать асимптотическое равенство

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{s}}, \quad s \to +\infty.$$

Покажем, что оно действительно имеет место. Зададим произвольно ε, $0 < \varepsilon < 1/2$. В силу (54.58), существует такое δ, $0 < \delta < 1$, что для всех $t \in [-\delta, \delta]$ выполняется неравенство $|h(t) + t^2/2| < \varepsilon t^2$, т. е. $-(1/2 + \varepsilon)t^2 < h(t) < -(1/2 - \varepsilon)t^2$.

Следовательно, в силу монотонности функции e^x, при всех $s > 0$ имеет место неравенство

$$e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}} < e^{sh(t)} < e^{-\frac{(1-2\varepsilon)st^2}{2}}. \qquad (54.64)$$

Заготовим еще одно соотношение, которое нам понадобится: выполнив замену переменной интегрирования $t = u\sqrt{2/(1 \pm 2\varepsilon)s}$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(1\pm 2\varepsilon)st^2}{2}}dt = \sqrt{\frac{2}{(1 \pm 2\varepsilon)s}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du \underset{(54.63)}{=} \sqrt{\frac{2\pi}{(1 \pm 2\varepsilon)s}}. \qquad (54.65)$$

Нужная оценка сверху интеграла

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}dt \qquad (54.66)$$

получается легко:

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}dt \underset{(54.64)}{\leqslant} \int_{-1}^{+\infty} e^{-\frac{(1-2\varepsilon)st^2}{2}}dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(1-2\varepsilon)st^2}{2}}dt \underset{(54.65)}{=}$$

$$\underset{(54.65)}{=} \sqrt{\frac{2\pi}{(1-2\varepsilon)s}}. \tag{54.67}$$

Снизу интеграл **(54.66)** оценивается сложнее. Предварительно докажем одно вспомогательное неравенство:

$$\sqrt{\frac{2\pi}{(1+2\varepsilon)s}} - \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}dt \underset{(54.65)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}dt - \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{-\delta} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}dt + \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{-\delta} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)[(s-1)+1]t^2}{2}}dt + \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)[(s-1)+1]t^2}{2}}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{-\delta} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)t^2}{2}} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}}dt + \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)t^2}{2}} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}}dt \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)\delta^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{-\delta} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}}dt + \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}}dt \right) \underset{t = u\sqrt{2/(1+2\varepsilon)}}{\leqslant}$$

$$\underset{t = u\sqrt{2/(1+2\varepsilon)}}{\leqslant} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)\delta^2}{2}} \sqrt{\frac{2}{1+2\varepsilon}} \left(\int_{-\infty}^{-\delta\sqrt{(1+2\varepsilon)/2}} e^{-u^2}du + \right.$$

$$\left. + \int_{\sqrt{(1+2\varepsilon)/2}}^{+\infty} e^{-u^2}du \right) \leqslant e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)\delta^2}{2}} \sqrt{\frac{2}{1+2\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du \underset{(54.63)}{=}$$

$$\underset{(54.63)}{=} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)s\delta^2}{2}} e^{\frac{(1+2\varepsilon)\delta^2}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{1+2\varepsilon}} \underset{1+2\varepsilon>1}{<} ce^{-\alpha s} \tag{54.68}$$

(по ходу вычислений мы воспользовались здесь тем, что функция $e^{-(1+2\varepsilon)(s-1)t^2/2}$ на бесконечных промежутках $(-\infty, \delta]$ и $[\delta, +\infty)$ принимает наибольшие значения в точках $t = \pm\,\delta$), где

$$\alpha = (1+2\varepsilon)\delta^2/2 > 0,\ c = e^{(1+2\varepsilon)\delta^2/2}\sqrt{2\pi}.$$

Таким образом, α и c зависят от ε, но не зависят от s (напомним, что δ также зависит от ε).

Теперь можно оценить интеграл (54.66) снизу:

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}\,dt \underset{(54.64)}{\geqslant} \int_{-1}^{+\infty} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}\,dt \geqslant \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}\,dt \underset{(54.68)}{\geqslant}$$

$$\underset{(54.68)}{\geqslant} \sqrt{\frac{2\pi}{(1+2\varepsilon)s}} - ce^{-\alpha s}. \qquad (54.69)$$

Итак,

$$\sqrt{\frac{2\pi}{(1+2\varepsilon)s}} - ce^{-\alpha s} \underset{(54.69)}{\leqslant} \int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}dt \underset{(54.67)}{\leqslant} \sqrt{\frac{2\pi}{(1-2\varepsilon)s}}.$$

Поделим полученное неравенство на $\sqrt{2\pi/s}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon}} - ce^{-\alpha s}\sqrt{\frac{s}{2\pi}} < \frac{1}{\sqrt{(2\pi)/s}} \int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-2\varepsilon}}.$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $s \to +\infty$, получим, что для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon}} \leqslant \lim_{s \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)/s}} \int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-2\varepsilon}}.$$

Устремив здесь ε к нулю, получим

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)/s}} \int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}dt = 1,$$

или, что то же (см. (54.55) — (54.59)), искомое асимптотическое равенство

$$\int_{-1}^{+\infty} [e^{-t}(1+t)]^s\,dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{s}}, \quad s \to +\infty.$$

Умножив обе части этого равенства на $e^{-s}\,s^{s+1}$, в силу (54.54), получим асимптотическую формулу

$$\Gamma(s+1) \sim \sqrt{2\pi}\,e^{-s}\,s^{s+1/2}, \quad s \to +\infty, \qquad (54.70)$$

называемую *формулой Стирлинга для гамма-функции.* Эта формула является, очевидно, обобщением формулы Стирлинга для факториала натуральных чисел (см. п. 33.8), которая получается из (54.70), если положить $s = n$, ибо $\Gamma(n+1) = n!$ (см. п. 54.5).

54.8*. Асимптотические ряды

В п. 37.10* изучались разложения функций в асимптотические степенные ряды при $x \to +\infty$. Напомним, что ряд

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \ldots$$

называется *асимптотическим разложением функции* f при $x \to +\infty$, если частичные суммы

$$S_n(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} \ldots + \frac{a_n}{x^n}$$

удовлетворяют условию

$$f(x) - S_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty.$$

Понятие асимптотического разложения функции естественным образом обобщается на ряды по системам функций, образующих так называемые *асимптотические последовательности*.

Определение 3. *Последовательность функций* $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *определенных в некоторой проколотой окрестности точки* a (*конечной или бесконечно удаленной*), *называется асимптотической последовательностью при* $x \to a$, *если для всех* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *имеет место соотношение*

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)), \quad x \to a. \tag{54.71}$$

Примерами асимптотических последовательностей при $x \to a$ являются $\varphi_n(x) = (x - a)^n$, если a — конечная точка, и $\varphi_n(x) = x^{-n}$, если $a = +\infty$ или $a = -\infty$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Определение 4. *Пусть* $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *является асимптотической последовательностью при* $x \to a$. *Ряд*

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots \tag{54.72}$$

называется асимптотическим рядом (*или асимптотическим разложением*) *при* $x \to a$ *заданной функции* f, *определенной в некоторой проколотой окрестности точки* a, *если его частичные суммы*

$$S_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) \tag{54.73}$$

удовлетворяют условию: *для любого* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$f(x) - S_n(x) = o(\varphi_n(x)), \quad x \to a. \tag{54.74}$$

ЛЕММА 2. *Пусть* $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, — *асимптотическая при* $x \to a$ *последовательность. Для того чтобы ряд* (54.72) *являлся асимптотическим разложением функции* f *при* $x \to a$, *необходимо и достаточно*, *чтобы*

$$f(x) - S_n(x) = O(\varphi_{n+1}(x)), \quad x \to a, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{54.75}$$

Иначе говоря, ряд (54.72) является асимптотическим разложением функции f при $x \to a$ тогда и только тогда, когда его частичная сумма $S_n(x)$ служит приближенным значением функции $f(x)$ с точностью до $O(\varphi_{n+1}(x))$ при $x \to a$, т. е. ошибка имеет порядок первого отбрасываемого члена.

Доказательство необходимости условия (54.75). Соотношение (54.74) при $n = 1, 2, \ldots$ можно переписать в виде

$$f(x) - S_{n-1}(x) - a_n\varphi_n(x) = o(\varphi_n(x)), \quad x \to a,$$

откуда

$$f(x) - S_{n-1}(x) = a_n\varphi_n(x) + o(\varphi_n(x)) = O(\varphi_n(x)),\ x \to a,\ n = 1, 2, \ldots,$$

т. е. выполняется условие (54.75). □

Доказательство достаточности условия (54.75). В силу (55.75) и (54.71), имеем

$$f(x) - S_n(x) = O(\varphi_{n+1}(x)) = O(o(\varphi_n(x))) = o(\varphi_n(x)),$$
$$x \to a, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

что совпадает с (54.74). □

Отметим еще, что если для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется условие

$$f(x) - S_{n+1}(x) = O(\varphi_{n+1}(x)), \quad x \to a, \tag{54.76}$$

более слабое, чем (54.74), то из него, в силу (54.71), следует (54.74). Иначе говоря, выполнение условия (54.76) для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ означает, что ряд (54.72) является асимптотическим разложением функции f при $x \to a$.

Если асимптотическая последовательность $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, такова, что существует проколотая окрестность точки a, в которой при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место неравенство $\varphi_n(x) \neq 0$, то аналогично случаю степенных асимптотических рядов функций получаем:

если функция f раскладывается при $x \to a$ в асимптотический ряд (54.72), *то такое разложение единственно и его коэффициенты последовательно определяются по формулам*

$$a_0 = \lim_{x \to a} f(x), \quad a_n = \lim_{x \to a} \frac{1}{\varphi_n(x)}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,\varphi_k(x)\right], \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Однако для практического нахождения асимптотических разложений заданных функций эта формула оказывается не всегда удобной. Часто проще получить нужное разложение другим путем, например в случае интегралов при помощи интегрирования по частям. При этом обычно заранее не задаются асимптотической последовательностью $\{\varphi_n(x)\}$, а строят ее, исходя из свойств данной функции в окрестности точки a.

Пример. Разложим в асимптотический ряд при $x \to +\infty$ функцию

$$F(x, \alpha) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{i^\alpha}dt, \quad x > 0, \tag{54.77}$$

($\alpha > 0$ — параметр), подобрав соответствующую асимптотическую последовательность. В силу равенства

$$F(x, \alpha) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{i^\alpha}dt + i\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{i^\alpha}dt,$$

согласно признаку Дирихле (см. п. 33.6), мнимая и действительная части функции $F(x, \alpha)$ представляют собой при $x > 0$ сходящиеся интегралы. Поэтому сходится и интеграл (54.77). Отметим что действительной и мнимой частью интеграла $\frac{1}{2}F\left(x^2, \frac{1}{2}\right)$ являются неполные интегралы Френеля (см. § 29)

$$\int_x^{+\infty} \cos\theta^2 d\theta, \quad \int_x^{+\infty} \sin\theta^2 d\theta.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно в интеграле $\frac{1}{2}F\left(x^2, \frac{1}{2}\right)$ сделать замену переменной интегрирования $t = \theta^2$.

Интегрируя по частям (54.77), получим

$$F\left(x, \alpha\right) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{i^\alpha} dt = \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{i^{\alpha+1}} dt = \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha F(x, \alpha + 1).$$

Применяя последовательно эту формулу к значениям функции F, получающимся в правой части, будем иметь

$$F(x, \alpha) = \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha F(x, \alpha+1) =$$
$$= \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha\left[\frac{ie^{ix}}{x^{\alpha+1}} - i(\alpha+1)F(x, \alpha+2)\right] =$$
$$= \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - \frac{\alpha i^2 e^{ix}}{x^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)i^3 e^{ix}}{x^{\alpha+2}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^n \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)i^{n+1}e^{ix}}{x^{\alpha+n}} +$$
$$+ (-i)^{n+1}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)F(x, \alpha+n+1) =$$
$$= \frac{ie^{ix}}{x^\alpha}\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{(ix)^k} + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{i^{n+1}} F(x, \alpha+n+1). \tag{54.78}$$

Ряд

$$\frac{ie^{ix}}{x^\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{(ix)^k} \tag{54.79}$$

является асимптотическим разложением функции $F(x, \alpha)$ при $x \to +\infty$.

Действительно, последовательность функций $\varphi_n(x) = e^{ix}x^{-n-\alpha}$, $n = 0, 1, \ldots$, является, как легко проверить, асимптотической, а для частичных сумм $S_n(x, \alpha)$ ряда (54.79), в силу (54.78), имеем

$$|F(x, \alpha) - S_n(x, \alpha)| = \left|\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{i^{n+1}} F(x, \alpha+n+1)\right| =$$
$$= \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\left|\int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^{\alpha+n+1}} dt\right| \leqslant \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+n+1}} =$$
$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{x^{\alpha+n}} = O\left(\frac{e^{ix}}{x^{\alpha+n}}\right), \quad x \to \infty,$$

т. е. выполняется условие (54.76), и, следовательно, ряд (54.79) действительно является асимптотическим разложением функции $F(x, \alpha)$ при $x \to \infty$.

54.9* Асимптотическое разложение неполной гамма-функции

При любом $x > 0$ для гамма-функции $\Gamma(s)$ имеем

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt = \int_0^x t^{s-1}e^{-t}dt + \int_x^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt.$$

Функция

$$\Gamma(s, x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_x^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt, \quad x > 0, \tag{54.80}$$

называется *неполной гамма-функцией*. Она определена при всех действительных значениях параметра s. Найдем ее асимптотическое разложение при $x \to +\infty$. Выполняя в правой части (54.80) интегрирование по частям, получим

$$\Gamma(s, x) = \int_x^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt = x^{s-1}e^{-t} + (s-1)\int_x^{+\infty} t^{s-2}e^{-t}dt =$$
$$= x^{s-1}e^{-t} + (s-1)\Gamma(s-1, x).$$

Применяя последовательно эту формулу к значениям неполной гамма-функции, получающимся в правой части, будем иметь

$$\Gamma(s, x) = x^{s-1}e^{-x} + (s-1)x^{s-2}e^{-x} + \ldots$$
$$\ldots + (s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)x^{s-n}e^{-x} +$$
$$+ (s-1)(s-2)\ldots(s-n)\Gamma(s-n, x) =$$
$$= e^{-x}x^s\sum_{k=0}^{n}\frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-k+1)}{x^k} +$$
$$+ (s-1)(s-2)\ldots(s-n)\Gamma(s-n, x).$$

Отсюда при $n > s - 1$ имеем

$$\left|\Gamma(s, x) - e^{-x}x^s\sum_{k=0}^{n}\frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-k+1)}{x^k}\right| =$$
$$= |(s-1)(s-2)\ldots(s-n)\Gamma(s-n, x)| = |(s-1)\ldots(s-n)|\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{n-s+1}}dt \leqslant$$
$$\leqslant |(s-1)(s-2)\ldots(s-n)|\frac{1}{x^{n-s+1}}\int_x^{+\infty}e^{-t}dt =$$
$$= |(s-1)\ldots(s-n)|\frac{e^{-x}}{x^{n-s+1}} = O\left(\frac{e^{-x}}{x^{n-s+1}}\right), \quad x \to +\infty,$$

т. е. для частичных сумм ряда

$$e^{-x}x^s\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(s-1)(s-2)\,\ldots\,(s-n+1)}{x^n} \qquad (54.81)$$

и для последовательности $\varphi_n(x) = x^{-n+s-1}e^{-x}$, которая является, как это легко проверить, асимптотической, при $x \to +\infty$ выполняется условие (54.75). Таким образом, ряд (54.81) является асимптотическим разложением неполной гамма-функции $\Gamma(s, x)$ при $x \to +\infty$.

В п. 54.7* был найден первый член асимптотического разложения гамма-функции $\Gamma(s + 1)$ при $s \to +\infty$. Можно найти и следующие члены, т. е. разложить гамма-функцию в асимптотический ряд. Он выглядит следующим образом:

$$\Gamma(s+1) \sim \sqrt{2\pi}\,e^{-s}\,s^{s+(1/2)}\left(1 + 3c_3\frac{2!}{1!2^2}\frac{2}{s} + 5c_5\frac{4!}{2!2^4}\left(\frac{2}{s}\right)^2 + \ldots\right),\ s \to +\infty. \qquad (54.82)$$

Здесь $\{c_k\}$ — последовательность коэффициентов разложения в степенной ряд (в окрестности нуля) функции $t = t(z)$, определяемой равенством $\frac{1}{2}z^2 = -h(t)$, где $h(t)$ задана формулой (54.56).

Можно получить и асимптотическое разложение для натурального логарифма гамма-функции. Оно имеет вид

$$\ln\Gamma(s) \sim \left(s - \frac{1}{2}\right)\ln s - s + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{2n(2n-1)s^{2n-1}},\quad s \to +\infty, \qquad (54.83)$$

и называется *рядом Стирлинга*. Здесь B_{2n} — так называемые *числа Бернулли*, определяемые равенством

$$\sum_{k=0}^{m-1}k^n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}C_{n+1}^{j}B_j m^{n+1-j}$$

(все нечетные числа Бернулли, кроме $B_1 = -1/2$, равны нулю).

Из формулы (54.83) с помощью потенцирования можно найти асимптотическое разложение для гамма-функции, в котором коэффициенты выражены в явном виде. Оно имеет вид

$$\Gamma(s) \sim (2\pi)^{1/2}e^{-s}s^{s-(1/2)}\left\{1 + \frac{1}{12s} + \frac{1}{288s^2} - \frac{139}{51840s^3} + \ldots\right\},$$
$$s \to +\infty.$$

Доказательство формул (54.82) и (54.83) не входит в задачу настоящего курса. Описание методов, с помощью которых случаются подобные разложения, можно найти в книге: *Федорюк М. В.* Метод перевала. М., 1977.

54.10. Замечания о кратных интегралах, зависящих от параметра

Мы рассмотрели выше «одномерные» интегралы, зависящие от параметра, т. е. случай, когда и переменная интегрирования и параметр являлись числовыми переменными. Эта теория обобщается на случай кратных интегралов, зависящих от «многомерного» параметра, т. е. на интегралы вида

$$F(y) = \int f(x, y)dG. \tag{54.84}$$

Здесь функция $f(x, y)$ определена по переменной x на открытом множестве $G \subset \boldsymbol{R}^n$ и интегрируема по Риману на любом открытом измеримом по Жордану множестве Γ таком, что его замыкание содержится в G: $\overline{\Gamma} \subset G$. Параметр y пробегает некоторое множество Y, которое может быть, например, подмножеством m-мерного пространства $\boldsymbol{R}^m$, а интеграл (54.84) понимается, вообще говоря, в несобственном смысле.

Интеграл (54.84) называется *сходящимся* на множестве Y, если при каждом фиксированном $y_0 \in Y$ интеграл $\int f(x, y_0)dG$ сходится. В случае $n \geqslant 2$ это, как известно (см. п. 48.3), эквивалентно условию сходимости интеграла $\int |f(x, y_0)|dG$. Сходящемуся интегралу (54.84) и любой последовательности открытых измеримых по Жордану множеств G_k, $k = 1, 2, \dots$, монотонно исчерпывающей множество G, естественным образом сопоставляется ряд, суммой которого он является:

$$\int f(x, y)dG = \int f(x, y)dG_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \int f(x, y)d(G_{k+1} \setminus \overline{G}_k). \tag{54.85}$$

Подобно одномерному случаю определяется и равномерно сходящийся интеграл.

Определение 5. *Сходящийся интеграл* (54.84) *называется равномерно сходящимся на множестве* Y, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой компакт* $A \subset G$, *что для каждого открытого измеримого по Жордану множества* Γ, *для которого* $A \subset \Gamma \subset \overline{\Gamma} \subset$ $\subset G$, *и всех* $y \in Y$ *выполняется неравенство* $\left|\int f(x, y)d(G \setminus \overline{\Gamma})\right| < \varepsilon$.

Это определение равносильно следующему.

Определение 5′. *Сходящийся интеграл* (54.84) *называется равномерно сходящимся на множестве* Y, *если, какова бы ни была монотонно исчерпывающая открытое множество* G *последовательность открытых измеримых по Жордану*

множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, и каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует номер k_ε, зависящий от данной последовательности и числа ε, такой, что для каждого номера $k > k_\varepsilon$ и всех $y \in Y$ справедливо неравенство

$$\left|\int f(x, y)d(G\setminus\overline{G_k})\right| < \varepsilon.$$

Если интеграл (54.84) равномерно сходится на множестве G относительно параметра $y \in Y$, то ряд (54.85) также равномерно сходится на G.

Для кратных интегралов, зависящих от параметра, остаются в силе теоремы об их непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости, аналогичные доказанным выше. В этом легко убедиться, и мы не будем на этом останавливаться.

Встречаются интегралы, зависящие от параметра и более сложным образом: в них не только подынтегральная функция f, но и множество G, по которому происходит интегрирование, зависит от параметра, т. е. $G = G(y)$:

$$F(y) = \int f(x, y)dG(y). \tag{54.86}$$

Примером такого интеграла в одномерном случае является интеграл

$$F(y) = \int_a^b \frac{dx}{|x-y|^\alpha}, \quad a \leqslant y \leqslant b.$$

Здесь $G(y)$ состоит из двух (кроме случая $y = a$ и $y = b$) интервалов (a, y) и (y, b), меняющихся с изменением параметра y.

Рассмотрим аналогичный пример в n-мерном пространстве. Пусть G — открытое множество в $\boldsymbol{R}^n$, функция $\mu = \mu(x)$ непрерывна в G, $|x - y|$ — расстояние между точками x и y, $x \in G$, $y \in \boldsymbol{R}^n$ и α — некоторое число. Интегралы вида

$$u(y) = \int \frac{\mu(x)dG}{|x-y|^\alpha} \tag{54.87}$$

называются *потенциалами* и относятся к типу (54.86), так как в них множеством, по которому производится интегрирование, является множество $G\setminus\{y\}$, зависящее от y (в формуле (54.87), мы обозначили, как это делается обычно, область интегрирования просто через G). Если $\alpha = 1$ и $n = 3$, то функция (54.87) называется *ньютоновым потенциалом*.

Задача 16. Доказать, что если G — измеримое по Жордану открытое множество и функция $\mu = \mu(x)$ непрерывна на его замыкании $\overline{G}$, то интеграл (54.87) при $\alpha < n$ непрерывен во всем пространстве.

Предметно-именной указатель

Указатель основных обозначений

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ — ряд

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — бесконечное произведение

$f_n \underset{X}{\to} f$ — последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f на множестве X

$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$ — последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится к *функции* f на множестве X

$\mathrm{Ln}\, z$ — логарифмическая функция в комплексной области

$\ln z$ — главная ветвь логарифма

$\zeta(s)$ — дзета-функция Римана

$f \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$ *при* $x \to +\infty$ — асимптотический ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$ соответствует функции f при $x \to +\infty$

$\{x_{n_1 \dots n_k}\}$ — кратная последовательность

$\sum\limits_{n_1, \dots, n_k}^{\infty} u_{n_1 \dots n_k}$ — кратный ряд

$k = (k_1, \dots, k_n)$, k_i — целое неотрицательное число, $i = 1, 2, \dots, n$ — мультииндекс

$D^k = \dfrac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$, $k = (k_1, \dots, k_n)$ — частная производная k-го порядка

$f(x, y) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ *при* $y \to y^{(0)}$ — семейство функций $f(x, y)$ (y — параметр) равномерно по x стремится к функции $f(x)$ на множестве X при $y \to y^{(0)}$

$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$; (a_{ij}), $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$ — матрица

$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $\det(a_{ij})$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$ — определитель матрицы (a_{ij})

$\frac{\partial(u_1, ..., u_n)}{\partial(t_1, ..., t_n)}$, $\frac{D(u_1, ..., u_n)}{D(t_1, ..., t_n)}$ — якобиан системы функций $u_1, \ldots, u_n$ по переменным $t_1, \ldots, t_n$

$\|f\|$ — норма линейного оператора f

$\mathrm{Id} : X \to X$ — тождественное отображение множества X на себя

μ^*E — верхняя мера множества E

μ_*E — нижняя мера множества E

μE, $\mu_n E$ — n-мерная мера множества E

$\int f(x)dE, \underset{E}{\int\int\cdots\int} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$ — n-кратный интеграл от функции f по множеству E; несобственный n-кратный интеграл от функции f по множеству E

$\iint\limits_E f(x, y)dx\ dy$ — двойной интеграл от функции f по множеству E

$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy, \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$ — повторные интегралы

$\overset{\frown}{AB}$ — кривая с начальной точкой A и конечной точкой B

Γ^+ — положительно ориентированный контур

Γ^- — отрицательно ориентированный контур

$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)ds, \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(r(s))ds$ — криволинейный интеграл первого рода от функции F по кривой $\overset{\frown}{AB}$

$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ — криволинейный интеграл второго рода от векторной функции $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$ по кривой $\overset{\frown}{AB}$; циркуляция векторного поля $\boldsymbol{a}$ по кривой $\overset{\frown}{AB}$

$S = \{f(M); M \in \overline{D}\}$, $S = \{\boldsymbol{r}(u, v); (u, v) \in \overline{D}\}$,
$S = \{x(u, v); y(u, v); z(u, v); \quad (u, v) \in \overline{D}\}$ — поверхность

S^+ — положительно ориентированная поверхность

S^- — отрицательно ориентированная поверхность

$\iint\limits_S \Phi(x, y, z)dS$ — поверхностный интеграл первого рода от функции Φ по поверхности S

$\iint\limits_S \boldsymbol{a}dS = \iint\limits_S \boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}dS = \iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$ — поверхностный интеграл второго рода от векторной функции $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$ по поверхности S; поток векторного поля через ориентированную поверхность S^+

Δ — оператор Лапласа

$\operatorname{div} \boldsymbol{a}$, $\nabla\boldsymbol{a}$ — дивергенция вектора $\boldsymbol{a}$

$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$, $\nabla \times \boldsymbol{a}$ — ротор вектора $\boldsymbol{a}$

$\mathrm{B} = \mathrm{B}(p, q)$ — бета-функция

$\Gamma = \Gamma(s)$ — гамма-функция

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$ — «набла оператор»

$\operatorname{grad} f$, ∇f — градиент функции

Оглавление

Глава 4

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Глава 5

Интегральное исчисление функций многих переменных